УДК 532.54

В.Н. Монахов, Н.В. Хуснутдинова

О СОПРЯЖЕНИИ КАНАЛОВЫХ И ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В работе изучается проблема сопряжения высокоскоростных потоков вязкой жидкости в скважинах или открытых руслах (каналах) с фильтрационными ее потоками в окружающей пористой среде. Обычно в этом случае движение жидкости в скважине (канале) описывается на уровне балансовых соотношений [1—3] или в гидравлическом приближении уравнениями Сен-Венана и различными их модификациями [4]. Обоснованием для такого подхода служит предположение о малой относительной скорости движения сопрягаемых потоков. В том случае, когда эта скорость достаточно велика, взаимодействие сопрягаемых потоков возможно лишь через промежуточный пограничный слой вблизи границы их раздела.

Ниже предлагаются различные варианты сопряжения таких потоков в рамках приближений пограничного слоя для обоих потоков.

В последнем случае отыскивается класс автомодельных режимов течения, а также устанавливается разрешимость граничных задач для взаимно перпендикулярных пограничных слоев в скважине и в примыкающей к ней пористой среде.

1. Постановка задачи. Плоское стационарное движение несжимаемой жидкости в скважине (канале) описывается уравнениями Навье — Стокса

$$(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = \mu\Delta\mathbf{u} - \nabla p + \mathbf{F},\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0,\ (x, y) \in D_1,$$

где $\mathbf{u} = (u, v)$ — вектор скорости течения жидкости с плотностью $\rho = 1$; $\mu = \mathrm{const}$ — вязкость; $p = p_0 + \rho g h$, p_0 — давление; $\mathbf{g} = g\nabla h$ — вектор ускорения силы тяжести; $\mathbf{F} = 0$.

Фильтрационное течение жидкости в примыкающей к D_1 области D_2 будем описывать также уравнениями Навье — Стокса, в которых, согласно предположениям теории фильтрации, силы сопротивления $\mathbf{F}$ представляются в форме $\mathbf{F} = -\lambda\mathbf{u}$, $\lambda(x, y) = m\mu k^{-1}$, где m — пористость, k — проницаемость пористой среды ($\mathbf{v} = m\mathbf{u}$ — скорость фильтрации) ([1, с. 44—46] и [3, с. 159]). Отметим, что в [2] уравнения типа Навье — Стокса используются для описания фильтрации жидкости в гранулированных средах.

Ограничимся рассмотрением задач сопряжения фильтрационных потоков жидкости в пористой среде (пласте) и в галерее несовершенных скважин («плоской скважине» или просто скважине) [1—3, 5], отвечающих вертикальному разрезу пласта ($\mathbf{g} = (-g, 0)$).

Пусть в областях D_1 и D_2 потоки жидкости преимущественно направлены соответственно вдоль осей OX и OY. Тогда вместо уравнений Навье — Стокса в условиях приближений пограничного слоя могут быть использованы следующие уравнения:

$$\mathbf{u}\nabla u = \mu u_{yy} - p_x,\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0,\ (x, y) \in D_1; \tag{1.1}$$

$$\mathbf{u}\nabla v = \mu v_{xx} - p_y - \lambda v,\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0,\ (x, y) \in D_2. \tag{1.2}$$

На линии сопряжения потоков ($\Gamma = \overline{D}_1 \cap \overline{D}_2$) предполагаются непрерывными вектор скорости течения $\mathbf{u}$ и давление p:

$$[\mathbf{u}] = 0,\ [p] = 0,\ (x, y) \in \Gamma. \tag{1.3}$$

Здесь $[f] = f|_{\Gamma_2} - f|_{\Gamma_1}$; $\Gamma_k = \Gamma \subset \partial D_k$ $(k = 1, 2)$; $f|_{\partial D_k}$ — граничные значения $f(x, y)$, $(x, y) \in \partial D_k$.

Отметим, что с учетом направления фильтрационного потока после замены $x=\eta$, $y=-\xi$, $u=V$, $v=-U$ уравнения (1.2) при $\lambda=0$ превращаются в уравнения (1.1) Прандтля пограничного слоя для $U(\xi,\eta)$, $V(\xi,\eta)$.

В [6] отмечается наличие в экспериментах по изучению течений жидкости вблизи пористых поверхностей эффекта проскальзывания и предлагается простейшая модель для его описания.

Пусть для определенности линия склеивания Г: $y=0$ и соответственно области D_1: $y<0$, D_2: $y>0$. Тогда аналогично [6] вместо (1.3) могут быть использованы условия склеивания

$$[v]=[p]=0;\ \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_-=\frac{\alpha}{\sqrt{k}}(u-Q)\big|_+,\ (x,y)\in\Gamma,$$

где $f|_\pm=f(x,\pm 0)$; $Q|_+$ — расход жидкости через пористую поверхность; α — постоянная , характеризующая пористую среду вблизи Г.

2. Сопряжение фильтрационного и свободного потоков на стенке скважины. Пусть $D_1=\{x>0,\ 0<y<h\}$ — область, отвечающая симметричной части (относительно $y=h$) скважины, а $D_2=\{x>0,\ -H<y<0\}$ — область фильтрации жидкости.

Краевые условия для уравнений (1.1), (1.2) в областях D_1, D_2 соответственно имеют вид

(2.1) $\quad (\mathrm{u}-\mathrm{u}_0)|_{y=0}=0,\ u_y|_{y=h}=0,\ x\geqslant 0;\ u_x|_{x=0}=u_1(y)\geqslant 0,\ y\geqslant 0;$

(2.2) $\quad \mathrm{u}|_{x=0}=0,\ -H\leqslant y\leqslant 0;\ v|_{y=-H}=v_1(x),\ x\geqslant 0$

$$(\mathrm{u}_0=\mathrm{u}(x,-0)).$$

При $p_y=C=\mathrm{const}$, $y<0$ в области D_2 имеется частное решение $u=0$, $v=v_1(x)$ задачи (1.2), (2.2), где функция $v_1(x)$ в (2.2) определяется как решение задачи

$$\mu v_1''-\lambda v_1-C=0,\ v_1(0)=0,\ v_1(\infty)=-C\lambda^{-1}.$$

Тогда для задачи (1.1), (2.1) в скважине первое из условий (2.1) принимает вид

$$\mathrm{u}|_{y=0}=(0,v_1(x)).$$

Можно рассматривать в области D_1 вместо (2.1) также следующий аналог задачи о продолжении пограничного слоя:

$$(\mathrm{u}-\mathrm{u}_0)|_{y=0}=0,\ u|_{y=h}=u_2(x),\ x\geqslant 0;\ u|_{x=0}=u_1(y)\geqslant 0,\ y\geqslant 0.$$

Здесь скорость по центру скважины $u_2(x)>0$ и профиль скорости на входе в скважину $u_1(y)\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ считаются произвольно заданными функциями.

3. Сопряжение фильтрационного и свободного потоков на входе в скважину. Пусть пласт вскрыт симметричной (относительно $y=0$) скважиной без заглубления [5, с. 419] и соответственно этому

$$D_1=\{0<y<h,\ 0<x<X\},\ D_2=\{x<0,\ -H<y<h\}.$$

Течение в областях D_1 и D_2 ($h=H$) может быть описано решением краевых задач

(3.1) $\quad u|_{y=h}=(u_y,v)|_{y=0}=0,\ x\geqslant 0;\ u|_{x=0}=u_0(y),\ y\geqslant 0;$

(3.2) $\quad (\mathrm{u}-\mathrm{u}_0)|_{x=0}=0,\ y\geqslant 0;\ v|_{y=0}=v_1(x),\ x\leqslant 0$

для уравнений (1.1), (1.2) соответственно, где $\mathrm{u}_0=(u_0(y),v(+0,y))$, а $u_0(y)$, $v_1(x)$ — произвольно заданные функции.

Если на входе в скважину фильтрационный поток направлен строго вдоль нее, т.е. $v|_{y=0}=0$, то $u_0(y)=-(2\mu)^{-1}p_x(0)(h^2-y^2)$ однозначно определяется из решения краевой задачи

$$\mu u_{0yy}-p_x(0)=0,\ u_0(h)=0,\ u_0'(0)=0.$$

Рассмотрим теперь задачу о склеивании двух пристеночных пограничных слоев, когда прямая $\{y = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant X\}$ является стенкой скважины, прямая $\{x = 0,\ y \leqslant 0\}$ — непроницаемой кровлей пласта, а $\{x = 0,\ 0 \leqslant y \leqslant h\}$ — входом в скважину. Согласно этому, в областях D_1 и D_2 возникают следующие задачи о продолжении пограничных слоев (1.1) и (1.2):

(3.3) $\quad u|_{y=0} = 0,\ u|_{y=h} = u_1(x),\ 0 \leqslant x \leqslant X;\ u_x|_{x=0} = 0,\ y \geqslant 0;$

(3.4) $\quad (u - u_0(y),\ v)|_{x=0} = 0,\ v|_{y=-H} = v_1(x),\ x \leqslant 0;$

(3.5) $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} v(x, y) = v_\infty(y),\ -H \leqslant y \leqslant h;$

(3.6) $\quad v_\infty v_\infty' + p_y + \lambda v_\infty = 0,\ v_\infty(-H) = v_1(-\infty),\ y \geqslant -H.$

Здесь $u_0(y) = 0,\ y \leqslant 0$, а при $y > 0$ $u_0 = (2\mu)^{-1} p_x(0)(y - h)y + u_1(0)yh^{-1}$ определяется из решения краевой задачи

$$\mu u_0'' - p_x(0) = 0,\ u_0(0) = 0,\ u_0(h) = u_1(0),$$

которая является следствием (1.1), (3.3).

4. Автомодельные решения. Введем функцию тока $\psi(x, y)$, полагая $u = \psi_y$, $v = -\psi_x$. Тогда уравнения (1.1), (1.2) допускают автомодельные решения вида

$$\psi = y^k \varphi(\xi),\ \xi = y(nx + x_0)^{-1/n},\ x_0 = \text{const},$$

где постоянные k и n связаны между собой соотношениями: $k = n - 1$ для уравнения (1.1) и $k = 1 - n$ для уравнения (1.2).

Естественно возникают условия на входящие в уравнение заданные функции $p(x, y)$ и $\lambda(x, y)$:

$$p_x = \delta^{(1)}(nx + x_0)^{(k-3)/n} \text{ для } (1.1),\ \delta^{(1)} = \text{const};$$

$$p_y = \delta^{(2)} y^{k-3n},\ \lambda = -\delta_0^{(2)} y^{-2n} \text{ для } (1.2),\ (\delta^{(2)}, \delta_0^{(2)}) = \text{const}.$$

Тогда уравнения (1.1), (1.2) преобразуются в квазилинейные дифференциальные уравнения для функции $\varphi(\xi)$:

(4.1) $$L^{(m)}\varphi \equiv \sum_{i=0}^{3} \lambda_i^{(m)} \frac{d^i\varphi}{d\xi^i} - f^{(m)} = 0\ (m = 1, 2).$$

Здесь $\lambda_3^{(m)} = \mu\ (m = 1, 2);\ \lambda_2^{(1)} = k(3\mu\xi^{-1} + \xi^k\varphi);$

$\lambda_1^{(1)} = 3\mu k(k - 1)\xi^{-2} + 2k\varphi\xi^{k-1} - (k - 1)\xi^k\varphi';\ \lambda_0^{(1)} =$
$= \mu k(k - 1)(k - 2)\xi^{-3};$

$f^{(1)} = \delta^{(1)}\xi^{-k};\ \lambda_2^{(2)} = 3\mu(n + 1)\xi^{-1} + k\varphi\xi^{-(n+1)};\ \lambda_1^{(2)} = \mu(n+1)(2n +$
$+ 1)\xi^{-2} + k(n + 1)\varphi\xi^{-(n+2)} - (k - n)\xi^{-(n+1)}\varphi' + \delta_0^{(2)}\xi^{-2(n+1)};$

$f^{(2)} = \delta^{(2)}\xi^{-3(n+1)};\ \lambda_0^{(2)} = 0.$

На линии склейки должны выполняться очевидные следствия условий склейки (1.3), а при $\xi \to \pm\infty$ задаваться характеристики внешних потоков, например:

$$(k\varphi + \xi\varphi')|_{\xi=-\infty} = u_\infty^{(1)} \qquad \text{для (1.1)},$$

$$\xi^{n+1}\varphi'|_{\xi=-\infty} = v_\infty^{(2)} \qquad \text{для (1.2)}.$$

Рассмотрим частный случай склейки автомодельных решений уравнений (1.1), (1.2), соответствующих течению типа Пуазейля в открытом потоке (область $D_1(x > 0)$):

$$u = Cy^2,\ v = 0,\ p_x = 2C\mu,$$

при этом в (4.1) $m = 1,\ k = 3,\ n = 4,\ \varphi(\xi) = C = \text{const}.$

Тогда фильтрационному потоку, описываемому уравнением (1.2), отвечает уравнение (4.1) при $m = 2$, в котором $k = 3$, $n = -2$, $\xi = y(-2x)^{1/2}$ $(x < 0)$.

Условия склеивания и задание внешнего фильтрационного течения приводят к граничной задаче для уравнения (4.1):

$$\varphi(0) = \frac{1}{3}C,\ \varphi'(0) = 0,\ \xi^{-1}\varphi|_{\xi=\infty} = C_0.$$

5. Теорема существования. Рассмотрим задачу (1.1), (1.2), (3.3)—(3.6).

Заданные на ∂D ($D = D_1 \cup D_2$) функции $u_1(x)$, $v_1(x)$ в (3.3), (3.4), $p = p_1(x)$, $x \geqslant 0$; $p = p_2(y)$, $y \leqslant 0$ ($p_1 = p_1(0)$, $y > 0$) в (1.1), (1.2), а также скорость $v_\infty(y)$ внешнего течения в пористой среде в (3.5), (3.6) подчиняются обычным предположениям теории пограничного слоя [7—9]:

(5.1)
$$\begin{aligned}
&(p_1, p_2, u_1, v_1) \in C^{2+\alpha}(\partial D),\ \alpha > 0;\ p_1' < 0,\ x \geqslant 0;\\
&p_2' < 0,\ y \leqslant 0;\ v_\infty > 0,\ y \geqslant -H;\\
&(u_1, u_1') > 0,\ x > 0,\ u_1(0) > 0,\ u_1'(0) = 0;\\
&(v_1, v_1') > 0,\ x < 0,\ v_1(0) = 0,\ v_1'(0) > 0;\\
&\text{при } y = -H,\ x \to 0\ \mu v_1'' - p_2'(-H) - \lambda v_1 = O(x^2).
\end{aligned}$$

Здесь $f(x, y) \in C^{2+\alpha}(\partial D)$, если f и вторые производные ограничены и непрерывны по Гельдеру.

Теорема 5.1. *Пусть выполнены предположения* (5.1). *Тогда в области* $D = D_1 \cup D_2$ $\forall$ $(X, H) > 0$ *при некотором* $h > 0$ *существует решение* $u(x, y)$, $v(x, y)$ *задачи* (1.1), (1.2), (3.3) — (3.6), *обладающее свойствами:*

$$(u, u_y, u_{yy}) \in C(D_1),\ (v, u_x, v_y) \in C(\Omega_1) \qquad \forall\, \overline{\Omega}_1 \subset D_1;$$
$$(v, v_x, v_{xx}) \in C(D_2),\ (u, u_x, v_y) \in C(\Omega_2) \qquad \forall\, \overline{\Omega}_2 \subset D_2;$$

$$u(x, y) > 0,\ \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} \geqslant m_1 > 0,\ (x, y) \in D_1;$$

$$v(x, y) > 0,\ \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=0} \geqslant m_2 > 0,\ (x, y) \in D_2.$$

Задача (1.1), (1.2), (3.3) — (3.6) распадается на три задачи, последовательно решаемые в областях D_1, $D_3 = \{-\infty < x < 0,\ -H < y \leqslant 0\}$ и $(D_2 \setminus D_3)$.

В области D_1 функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ удовлетворяют задаче (1.1), (3.3), для которой сформулированная теорема существования доказывается аналогично теореме 1 в [7].

В области D_3 возникает задача о продолжении пограничного слоя (1.2), разрешимая $\forall$ $H > 0$ [7, 8] в силу предположения $p_2'(y) < 0$, $y < 0$.

Отметим, что сформированный в результате решения задачи в D_3 профиль скорости $v_2 = v(x, y)|_{y=0}$, $x < 0$ обладает всеми свойствами $v_1(x)$ в (5.1).

Для отыскания решения $u(x, y)$, $v(x, y)$, $(x, y) \in (D_2 \setminus D_3)$ задачи (1.2), (3.4)—(3.6) перейдем к переменным Мизеса:

$$y = y,\ \psi = \psi(x, y),\ v = -\psi_x,\ u - u_0(y) = \psi_y,$$

при этом условие $v|_{y=-H} = v_1(x)$ в (3.4) заменяется на $v|_{y=0} = v_2(x)$. В результате для $\omega = v^2$ получим

(5.2)
$$\omega_y - u_0(y)\omega_\psi = \mu\sqrt{\omega}\,\omega_{\psi\psi} - 2\lambda\sqrt{\omega},\ (\psi, y) \in \Omega,$$

где $\Omega = \{-\infty < \psi < 0,\ 0 < y < h\}$ — образ $(D_2 \setminus D_3)$. Условия (3.4) — (3.6) переходят в следующие:

$$\omega\big|_{\psi=0} = 0,\ \omega\big|_{y=0} = \omega_0(\psi),\ \lim_{\psi\to-\infty} \omega = v_\infty^2,$$

$$v'_\infty = -\lambda,\ v_\infty(0) = v_2(-\infty),\ \omega_0\Big(\int\limits_x^0 v_2(\tau)d\tau\Big) = v_2^2(x).$$

Член $2\lambda\sqrt{\omega}$ уравнения (5.2) при дифференцировании дает неограниченную в Ω функцию, но, поскольку $\lambda > 0$, доказательство существования решения задачи (1.2), (3.4) — (3.6) не требует существенных изменений по сравнению со случаем $\lambda = 0$ [7, 8].

Замечание 5.1. Течение в скважине можно также моделировать течением Пуазейля.

Замечание 5.2. Задачи, аналогичные задачам пп. 2, 3, нетрудно сформулировать также для различных моделей неоднородной жидкости [10, 11].

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. — М.: Наука, 1977.
2. Ширко И.В. Численное исследование течений в гранулированных средах // Численное моделирование в аэрогидродинамике. — М.: Наука, 1986.
3. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917 — 1967). — М.: Наука, 1969.
4. Воеводин А.Ф., Шугрин С.М. Численные методы расчета одномерных систем. — Новосибирск: Наука, 1981.
5. Бэр Я., Заславскн Д., Ирмей С. Основы фильтрации воды. — М.: Мир, 1971.
6. Beavers C.S., Joseph D.D. Boundary conditions at a naturally permeable wall // J. Fluid Mech. — 1967. — V. 30, pt 1.
7. Олейник О.А. О системе уравнений теории пограничного слоя // ВММФ. — 1963. — Т. 3, № 3.
8. Суслов А.Н. О системе уравнений магнитогидродинамического пограничного слоя // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. — 1974. — № 2.
9. Хуснутдинова Н.В. Тепловой пограничный слой на пластине // ДАН СССР. — 1985. — Т. 285, № 3.
10. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. — Новосибирск: Наука, 1983.
11. Монахов В.Н. Математическая модель фильтрации неоднородной жидкости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. — 1989. — Вып. 90.

г. Новосибирск *Поступила 18 /VIII 1993 г., в окончательном варианте — 18/II 1994 г.*

УДК 532.5.522

О.И. Мелихов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ И ДЛИНЫ РАСПАДА СТРУИ РАСПЛАВА В ВОДЕ

Распад струи высокотемпературного расплава в воде — один из основных механизмов образования грубодисперсной смеси вода—пар—расплав в ходе развития гипотетической тяжелой аварии на АЭС с плавлением активной зоны. При определенных условиях в такой смеси может реализоваться взрывное взаимодействие расплава с водой с потенциально негативными