

НЕКОТОРЫЕ ПЛОСКИЕ АДИАБАТИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ  
ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА, СОДЕРЖАЩИЕ СКАЧКИ УПЛОТНЕНИЯ

М. Д. Устинов

(Калинин)

Получено решение, описывающее адиабатические течения идеального газа, характеризуемые двумя параметрами  $a$  и  $b$ , такими что

$$[a] = L^{m+1}T^{-1}, \quad [b] = ML^{-2-2m}$$

где  $m$  — произвольно ( $m > 0$ ). Это решение позволяет строить течения, содержащие скачки уплотнения.

1. Пусть в области  $y > 0$  идеальный (т. е. лишенный вязкости и теплопроводности) совершенный газ движется параллельно оси  $Ox$  и имеет следующие параметры:

$$p \equiv 0, \quad v \equiv 0, \quad u = u_0(y) = ay^{-m}, \quad \rho = \rho_0(y) = by^{2m-1} \quad (1.1)$$

и переходит через прямой скачок уплотнения. Условия на таком скачке имеют вид [1]

$$u = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}u_0, \quad v = 0, \quad \rho = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_0, \quad p = \frac{2}{\gamma+1}\rho_0u_0^2 \quad (1.2)$$

Течение за прямым скачком ввиду наличия градиента давления в направлении оси  $Oy$  описывается системой уравнений [2]

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{v}{u} + v \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{v}{u} + p \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{\rho u} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{p} + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{v}{p} = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = i_0(\eta), \quad p = \rho^\gamma f_0^\gamma(\eta)$$

Здесь  $u, v$  — компоненты скорости вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$  соответственно;  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $\gamma > 1$  — показатель адиабаты,  $f_0$  и  $i_0$  — произвольные функции. Независимые переменные  $\xi$  (функция, введенная Мартином [3]) и  $\eta$  (функция тока) определяются из равенств

$$d\xi = \rho v dy - (p + \rho v^2) dx, \quad d\eta = \rho u dy - \rho v dx \quad (1.4)$$

Постоянные  $a$  и  $b$  в (1.1) и переменные  $\xi$  и  $\eta$  имеют следующие размерности:

$$[a] = L^{m+1}T^{-1}, \quad [b] = ML^{-2-2m}, \quad [\xi] = MT^{-2}, \quad [\eta] = ML^{-1}T^{-1} \quad (1.5)$$

Поэтому единственным безразмерным параметром является величина  $s = \xi a^{-2} b^{-1}$ , и функции, входящие в (1.3), можно представить в виде

$$u = a^2 b \eta^{-1} U(s), \quad v = a^2 b \eta^{-1} V(s), \quad s = \xi a^{-2} b^{-1} \quad (1.6)$$

$$p = \eta^{-1/m} a^{(2m+1)/m} b^{(m+1)/m} P(s), \quad \rho = \eta^{(2m-1)/m} a^{(1-2m)/m} b^{(1-m)/m} R(s)$$

Безразмерные функции  $U, V, P, R$  удовлетворяют системе уравнений, получаемой из (1.3)

$$\begin{aligned} \frac{1}{P} + m \left( \frac{V}{P} \right)'_s = 0, \quad V \left( \frac{V}{U} \right)'_s + P \left( \frac{1}{RU} \right)'_s = 0 \\ \frac{U^2 + V^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{R} = H^2, \quad P = (RC_1)^\gamma \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь  $H$  и  $C_1$  — произвольные постоянные (функции  $f_0$  и  $i_0$  оказываются определенными с точностью до постоянного множителя).

Функция тока  $\eta$  не терпит разрыва при переходе через скачок. Поэтому

$$d\eta = \rho_0 u_0 dy = aby^{m-1} dy$$

Отсюда

$$y^m = m\eta(ab)^{-1}$$

Так как образом скачка в плоскости  $\xi\eta$  является линия  $s = 0$  [2], запишем условия (1.2) для функций  $U, V, P, R$  в форме

$$\begin{aligned} U|_{s=0} = \frac{\gamma - 1}{(\gamma + 1)m}, \quad V|_{s=0} = 0 \\ R|_{s=0} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} m^{(2m-1)/m}, \quad P|_{s=0} = \frac{2}{\gamma + 1} m^{-1/m} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Решая систему (1.7) и используя (1.8), находим

$$\begin{aligned} U = \frac{1}{m} - \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} m\tau, \quad V = \left( \frac{2}{\gamma - 1} \tau - \left( \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right)^2 m^2 \tau^2 \right)^{1/2} \\ P = \tau R, \quad R = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} m^{(2m-1)/m} \left( \frac{\tau}{\tau_1} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad \tau_1 = \frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2 m^2} \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$s = m \frac{\gamma + 1}{(\gamma - 1)^2} \int_{\tau_1}^{\tau} \frac{1}{V(\tau)} \left( 1 - \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} m^2 \tau \right) d\tau$$

Уравнения линий тока за скачком можно представить в параметрическом виде (принимая скачок за ось  $Oy$ )

$$x = - \left( \frac{m}{ab} \right)^{1/m} h \eta^{1/m} \int_{\tau_1}^{\tau} \frac{\gamma - 1 - (\gamma + 1) m^2 z}{V(\gamma - 1) 2z - (\gamma + 1)^2 m^2 z^2} z^{-\gamma/(\gamma-1)} dz, \quad h = \frac{\tau_1^{\gamma/(\gamma-1)}}{(\gamma - 1) m} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} y = - \left( \frac{m}{ab} \right)^{1/m} h m \eta^{1/m} \int_{\tau_1}^{\tau} \frac{\gamma - 1 - (\gamma + 1) m^2 z}{V(\gamma - 1)^2 - 2(\gamma^2 - 1) m^2 z + (\gamma + 1)^2 m^4 z^2} z^{-\gamma/(\gamma-1)} dz + \\ + \left( \frac{m}{ab} \right)^{1/m} \eta^{1/m} \end{aligned}$$

Таким образом, формулы (1.6), (1.9) и (1.10) полностью описывают течение газа за прямым скачком уплотнения.

Непосредственно за скачком  $V(\tau_1) = 0$ . Поэтому при движении вдоль любой линии тока  $\eta = \text{const}$  вниз по течению от скачка  $\tau$  уменьшается от  $\tau_1$  (на скачке) до 0, причем  $V \rightarrow 0$ ,  $x, y \rightarrow \infty$  при  $\tau \rightarrow 0$ . Обозначим через  $\alpha$  угол наклона линий тока к оси  $Ox$ . За скачком  $\alpha = 0$  при движении вниз по течению  $\alpha$  возрастает до некоторого значения  $\alpha_{\text{max}}$  и затем убывает до 0. Нетрудно показать, используя (1.9), что значение  $\alpha_{\text{max}}$ , соответствующее точке перегиба на линии тока, не зависит от  $\eta$  и достигается при  $\tau = \tau_*$ , причем

$$\tau_* = \frac{\gamma - 1}{\gamma(\gamma + 1)m^2}, \quad \text{tg } \alpha_{\text{max}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}$$

Далее из (1.9) находим

$$M^2 = \frac{u^2 + v^2}{\gamma p} \rho = \frac{\gamma - 1 - 2\gamma m^2 \tau}{\gamma(\gamma - 1)m^2 \tau}, \quad M(\tau_*) = 1$$

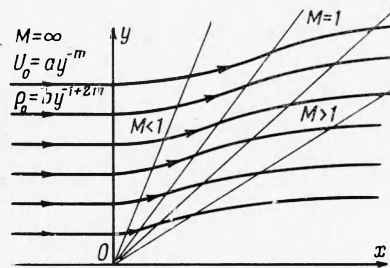
Отсюда, а также из (1.10), видно, что линиями, вдоль которых  $M = \text{const}$ , являются прямые линии, проходящие через начало координат. В частности, звуковая линия течения за скачком ( $M = 1$ ) будет прямой линией и геометрическим местом точек перегиба линий тока за скачком (фигура). Принимая любую линию  $\eta = \text{const}$  за стенку, получим обтекание криволинейного контура.

2. Предположим, что газ, имеющий параметры (1.1), переходит через наклонный прямолинейный скачок уплотнения.

Используя известные соотношения для сильного наклонного скачка [1], можно доказать, что течение за ним будет описываться по-прежнему решением (1.9), в котором  $\tau_1$  следует заменить на  $\tau_1 \sin^2 \beta$ , где  $\beta$

— угол наклона скачка к оси  $Ox$ . Это означает, что в течении, изображенном на фигуре, любая прямая  $y = kx$  может быть принята за наклонный скачок.

Исходя из полученного решения и используя принцип замещения [4], можно строить неавтономные адиабатические течения, содержащие скачки.



Фиг. 1

Поступила 3 III 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. М и з е с Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
2. У с т и н о в М. Д. Преобразование и некоторые решения уравнений движения идеального газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.
3. M a r t i n M. H. Steady rotational plane flow of a gas. Amer. J. Math, 1950, vol. 72.
4. P r i m R. C. 3 rd steady rotational flow of ideal gases. J. Rational Mech. and Analysis, 1952, vol. 1, No. 3.