

отмечена погрешность определения этой величины. При возрастании  $\bar{dp}/dx$  наблюдается увеличение протяженности области взаимодействия, причем положительный градиент давления оказывает более существенное влияние. Это можно объяснить более интенсивным развитием вторичных течений. Значения  $h/\delta_2$ , полученные в присутствии фальшстенки и путем изменения угла атаки модели (темные и светлые кружки соответственно), аппроксимируются единой зависимостью  $h/\delta_2 = f(\bar{dp}/dx)$ .

Авторы выражают благодарность В. М. Шулемовичу, В. Н. Долгову за проведенный ими численный расчет по специальной программе и Н. Ф. Полякову за полезные обсуждения в процессе подготовки к экспериментам.

Поступила 7 VII 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Багаев Г. И., Курдин А. А., Поляков Н. Ф., Черных В. В. Исследование некоторых характеристик потока в малотурбулентной аэродинамической трубе дозвуковых скоростей.— В кн.: Аэрогазодинамика. Новосибирск, изд. ИТПМ СО АН СССР, 1973.
2. Долгов В. Н., Шулемович В. М. Конечно-разностный расчет несжимаемого турбулентного пограничного слоя со сложными граничными условиями.— В кн.: Физическая газодинамика. Новосибирск, изд. ИТПМ СО АН СССР, 1977.
3. Mojola O. O., Young A. D. An experimental investigation of the turbulent boundary layer along a streamwise corner. AGARD — CP — 93, 1971.
4. Paradis M. A. Couche limite turbulente à l'intérieur d'un diedre. Labor. d'Aerodyn., Laval. Quebec, Canada, 1963.
5. Gessner F. B. The origin of secondary flow in turbulent flow along a corner.— «J. Fluid Mech.», 1973, vol. 58, p. 1.
6. Perkins H. J. The formation of streamwise vorticity in turbulent flow.— «J. Fluid Mech.», 1970, vol. 44, p. 4.
7. Bragg G. M. The turbulent boundary layer in a corner.— «J. Fluid Mech.», 1969, vol. 36, p. 3.
8. Ludwig H., Tillman W. Investigation of the wall-shearing stress in turbulent boundary-layers. NASA Tech. Mem. N 1285, 1950.

УДК 532.516

### О ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ ВОКРУГ САМОХОДНОГО ТЕЛА

В. Л. Сенницкий

(Новосибирск)

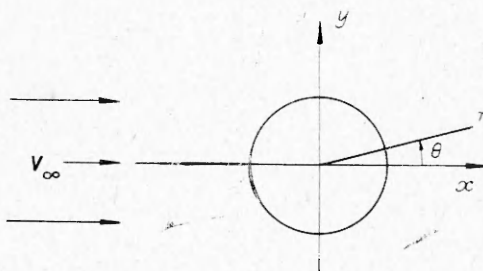
Задача о течениях вокруг самоходных тел является сравнительно мало изученной. В какой-то степени она обсуждалась в работе [1], где была получена асимптотическая формула, согласно которой скорость плоского течения в следе за самоходным телом, движущимся с постоянной скоростью в покоящейся на бесконечности жидкости, убывает с расстоянием по закону  $s^{-3/2}$ , т. е. значительно быстрее, чем в следе за обычным телом, испытывающим сопротивление со стороны жидкости (в последнем случае скорость убывает по закону  $s^{-1/2}$  [2, 3]).

В работе [1] предполагалось, что течение симметрично относительно оси, вдоль которой происходит движение тела. В этом случае полная сила и полный момент сил, действующие на тело со стороны жидкости, равны нулю, и неясно, с какой величиной, имеющей физический смысл, можно было бы связать неопределенный коэффициент  $A$  в асимптотической формуле, полученной в работе [1]. По этой причине из общих соображений нельзя, например, ответить на вопрос, когда этот коэффициент должен быть не равен нулю (и, следовательно, когда не

обращается тождественно в нуль найденное в [1] асимптотическое выражение для скорости течения). Неясно даже, может ли  $A$  вообще в каком-либо конкретном случае движения жидкости вокруг самоходного тела быть отличным от нуля.

Наряду с [1] следует также отметить работу [2], в которой с целью разрешения так называемого парадокса Файлона были найдены несколько первых членов асимптотического разложения функции тока плоского течения вдали от произвольного цилиндрического препятствия. Хотя вопрос о движении жидкости на больших расстояниях от самоходного тела в работе [2] не ставился, можно, рассматривая случай симметричного течения и положив силу сопротивления равной нулю, получить из соотношений, найденных в [2], асимптотическую формулу для скорости течения, имеющую тот же вид, что и формула, предложенная в [1]. Однако отмеченный выше вопрос о коэффициенте  $A$  и в этом случае остается нерешенным.

В данной работе рассматривается плоская задача о стационарном обтекании кругового цилиндра с подвижной границей (см. фигуру) потоком вязкой несжимаемой жидкости, имеющим на бесконечности скорость  $V_\infty = (V_\infty, 0)$ . Течение симметрично относительно оси  $x$ . Подвижная граница тела выполняет роль движителя. В приближении малых чисел Рейнольдса решена задача о движении жидкости во всей области течения. Получена, в частности, асимптотическая формула для скорости течения на больших расстояниях вниз по потоку от тела, имеющая тот же вид, что и формула, предложенная в [1] \*. Определена связь между коэффициентом  $A$  и условиями на поверхности тела.



1. Пусть  $a$  — радиус цилиндра;  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости;  $Re = aV_\infty/\nu$  — число Рейнольдса;  $x = X/a$ ,  $y = Y/a$  — безразмерные прямоугольные координаты;  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  — безразмерный полярный радиус;  $\theta$  — полярный угол;  $f(\theta)$  — некоторая нечетная функция, определенная на промежутке  $[-\pi, \pi]$ ;  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  — оператор Лапласа;  $\Psi = \psi a V_\infty$  — функция тока;  $V = V_\infty u$  — скорость течения жидкости;  $\Omega = \omega V_\infty/a$  — завихренность;  $F$  — полная сила, действующая на единицу длины цилиндра со стороны жидкости.

Безразмерная функция тока рассматриваемого течения является решением уравнения

$$(1.1) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \Psi - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \Delta \Psi = \frac{1}{Re} \Delta^2 \Psi$$

и удовлетворяет условиям

$$(1.2) \quad \Psi = 0, \quad \partial \Psi / \partial r = -\varepsilon f \quad \text{при } r = 1;$$

$$(1.3) \quad \Psi = 0, \quad \partial^2 \Psi / \partial y^2 = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad |x| \geq 1;$$

$$(1.4) \quad \partial \Psi / \partial x \rightarrow 0, \quad \partial \Psi / \partial y \rightarrow 1 \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Вследствие симметрии течения относительно оси  $x$  равна нулю проекция вектора  $F$  на ось  $y$ . Таким образом,  $F = (F, 0)$ .

\* В работе [1] в этой формуле допущена опечатка.

Функция  $f(\theta)$  может быть задана так, чтобы для каждого  $\text{Re}$  нашлось такое  $\varepsilon$ , что  $F = 0$ . Это подтверждается следующим примером. Если

$$f(\theta) = -2 \sin \theta, \quad \varepsilon(\text{Re}) = 1,$$

то решение задачи (1.1) — (1.4) имеет вид

$$\psi = (r - r^{-1}) \sin \theta,$$

и найденная по нему сила, действующая на единицу длины цилиндра, равна нулю. Очевидно, что существуют и другие функции  $f(\theta)$  такие, что при соответствующем выборе  $\varepsilon(\text{Re})$   $F = 0$ . Ниже всюду будет предполагаться, что точки границы движутся таким образом, что выполнено условие  $F = 0$ . В рассматриваемом случае равен нулю также полный момент сил, действующий на единицу длины цилиндра со стороны жидкости.

В данной работе задача (1.1) — (1.4) будет решаться в приближении малых чисел Рейнольдса  $\text{Re}$  методом асимптотического согласования внутренних и внешних разложений [4].

2. Предположим, что  $\psi$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\omega$ ,  $\varepsilon$  могут быть разложены в следующие асимптотические ряды при  $\text{Re} \rightarrow 0$ :

$$(2.1a) \quad \psi(r, \theta, \text{Re}) \sim \psi_0(r, \theta) + g_1(\text{Re})\psi_1(r, \theta) + \dots;$$

$$(2.1b) \quad \mathbf{u}(r, \theta, \text{Re}) \sim \mathbf{u}_0(r, \theta) + g_1(\text{Re})\mathbf{u}_1(r, \theta) + \dots;$$

$$(2.1в) \quad \omega(r, \theta, \text{Re}) \sim \omega_0(r, \theta) + g_1(\text{Re})\omega_1(r, \theta) + \dots;$$

$$(2.2) \quad \varepsilon(\text{Re}) \sim \varepsilon_0 + g_1(\text{Re})\varepsilon_1 + \dots,$$

где  $g_1(\text{Re}), g_2(\text{Re}), \dots$  — некоторая последовательность функций таких, что  $\lim_{\text{Re} \rightarrow 0} g_1 = 0$ ,  $\lim_{\text{Re} \rightarrow 0} \frac{g_{m+1}}{g_m} = 0$ ,  $m = 1, 2, \dots$ . Асимптотические разложения, полученные при  $\text{Re} \rightarrow 0$  и фиксированных  $r, \theta$ , будем называть внутренними. Подставляя (2.1a) и (2.2) в (1.1) — (1.4) и ограничиваясь главными членами, определим задачу нулевого приближения:

$$(2.3) \quad \Delta^2 \psi_0 = 0;$$

$$(2.4) \quad \psi_0 = 0, \quad \partial \psi_0 / \partial r = -\varepsilon_0 f \quad \text{при } r = 1;$$

$$(2.5) \quad \psi_0 = 0, \quad \partial^2 \psi_0 / \partial y^2 = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad |x| \geq 1;$$

$$(2.6) \quad \partial \psi_0 / \partial x \rightarrow 0, \quad \partial \psi_0 / \partial y \rightarrow 1 \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Предположим, что функция  $f(\theta)$  может быть разложена в ряд Фурье

$$(2.7) \quad f(\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m \sin m \theta.$$

Решая уравнение (2.3) и используя (2.4), (2.5), найдем

$$(2.8) \quad \psi_0 = \left[ a_0 r + \left( \frac{b_1}{4} - a_0 \right) r^{-1} - \frac{b_1}{4} r^3 + (b_1 - \varepsilon_0 f_1 - 2a_0) r \ln r \right] \sin \theta + \\ + \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ \left( b_m - m c_m - \frac{\varepsilon_0}{2} f_m \right) r^{2-m} + \left[ \frac{\varepsilon_0}{2} f_m + (m-1) c_m - \frac{m b_m}{m+1} \right] r^{-m} - \right. \\ \left. - \frac{b_m}{m+1} r^{2+m} + c_m r^m \right\} \sin m \theta,$$

где  $a_0, b_m, c_m$  — произвольные постоянные.

Проделав несложные вычисления, можно убедиться в том, что полная сила, действующая на единицу длины цилиндра со стороны жидкости, в рассматриваемом приближении равна нулю тогда и только тогда, когда выполняется

$$b_1 - \varepsilon_0 f_1 - 2a_0 = 0.$$

При этом в (2.8) исчезает член, пропорциональный  $r \ln r \sin \theta$ , вследствие чего известный парадокс Стокса [4], характерный для плоской задачи о стационарном обтекании тела вязкой жидкостью при малых числах Рейнольдса, в рассматриваемом случае отсутствует.

Используя (2.6), находим окончательно

$$(2.9) \quad \psi_0 = \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_{m=1}^{\infty} f_m (r^{-m} - r^{2-m}) \sin m \theta,$$

причем  $\varepsilon_0 f_1/2 = -1$ .

Область применимости полученного решения определяется условием малости инерционных членов по сравнению с вязкими членами в уравнениях движения жидкости. Оценив их величины с помощью (2.9), можно показать, что это условие нарушается при  $r \text{Re} \sim 1$ . Поэтому наряду с разложениями (2.4) следует рассматривать такие разложения, которыми описывается течение в некоторой внешней области и которые определенным образом [4] согласуются с внутренними разложениями. Отметим, что условие (2.6) на бесконечности, использованное выше, совпадает с условием согласования главного члена внутреннего разложения  $u$  с главным членом определенного ниже внешнего разложения  $u$ .

3. Предположим, что  $\psi$ ,  $u$ ,  $\omega$  могут быть разложены в следующие асимптотические ряды при  $\text{Re} \rightarrow 0$ :

$$(3.1a) \quad \psi\left(\frac{\rho}{\text{Re}}, \theta, \text{Re}\right) \sim \frac{\rho}{\text{Re}} \sin \theta + h_1(\text{Re}) \psi^{(1)}(\rho, \theta) + \dots;$$

$$(3.1б) \quad u\left(\frac{\rho}{\text{Re}}, \theta, \text{Re}\right) \sim i + \text{Re} h_1(\text{Re}) u^{(1)}(\rho, \theta) + \dots;$$

$$(3.1в) \quad \omega\left(\frac{\rho}{\text{Re}}, \theta, \text{Re}\right) \sim \text{Re}^2 h_1(\text{Re}) \omega^{(1)}(\rho, \theta) + \dots,$$

где  $\rho = \sqrt{\hat{x}^2 + \hat{y}^2}$ ,  $\hat{x} = \text{Re}x$ ,  $\hat{y} = \text{Re}y$ ;  $i = V_\infty/V_\infty$ ;  $h_1(\text{Re}), h_2(\text{Re}), \dots$  — некоторая последовательность функций таких, что

$$\lim_{\text{Re} \rightarrow 0} \text{Re} h_1 = 0, \quad \lim_{\text{Re} \rightarrow 0} \frac{h_{m+1}}{h_m} = 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

Асимптотические разложения, полученные при  $\text{Re} \rightarrow 0$  и фиксированных  $\rho$ ,  $\theta$ , будем называть внешними.

Вследствие симметрии течения относительно оси  $\hat{x}$  имеем

$$(3.2) \quad \omega^{(m)} = 0 \text{ при } \hat{y} = 0, \hat{x} \neq 0, m = 1, 2, \dots;$$

$$(3.3) \quad \psi^{(m)} = 0 \text{ при } \hat{y} = 0, \hat{x} \neq 0, m = 1, 2, \dots$$

При  $\rho \rightarrow \infty$   $u \rightarrow i$ , поэтому должно выполняться

$$(3.4) \quad \omega^{(m)} \rightarrow 0 \text{ при } \rho \rightarrow \infty, m = 1, 2, \dots;$$

$$(3.5) \quad u_x^{(m)} \rightarrow 0, u_y^{(m)} \rightarrow 0 \text{ при } \rho \rightarrow \infty, m = 1, 2, \dots,$$

где  $u_x^{(m)}, u_y^{(m)}$  — соответственно  $x$ - и  $y$ -компоненты вектора  $u^{(m)}$ .

Перепишем уравнение (1.1) в переменных  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ , подставим в него (3.1а) и, ограничиваясь главными членами, получим

$$\partial \omega^{(1)} / \partial \hat{x} = \hat{\Delta} \omega^{(1)},$$

где  $\hat{\Delta} = \partial^2 / \partial \hat{x}^2 + \partial^2 / \partial \hat{y}^2$ .

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям (3.2), (3.4), имеет следующий вид:

$$(3.6) \quad \omega^{(1)} = e^{\hat{x}/2} \sum_{m=1}^{\infty} A_m K_m(\rho/2) \sin m \theta,$$

где  $K_m$  — функции Макдопальда;  $A_m$  — произвольные постоянные.

4. Перейдем теперь к вопросу о согласовании внутренних и внешних разложений. Пусть  $Q$  — множество функций  $q(r, \theta, \text{Re})$ , которые при  $\text{Re} \rightarrow 0$  могут быть разложены в следующие асимптотические ряды:

$$q \sim \alpha_0(\text{Re})q_0(r, \theta) + \alpha_1(\text{Re})q_1(r, \theta) + \dots,$$

$$q \sim \beta_0(\text{Re})q^{(0)}(\rho, \theta) + \beta_1(\text{Re})q^{(1)}(\rho, \theta) + \dots,$$

где  $\alpha_0(\text{Re}), \alpha_1(\text{Re}), \dots, \beta_0(\text{Re}), \beta_1(\text{Re}), \dots$  — некоторые последовательности функций таких, что  $\lim_{\text{Re} \rightarrow 0} \frac{\alpha_{m+1}}{\alpha_m} = 0, \lim_{\text{Re} \rightarrow 0} \frac{\beta_{m+1}}{\beta_m} = 0, m = 0, 1, 2, \dots$

Определим на множестве  $Q$  операторы  $I_{\alpha_m}, E_{\beta_n}$ :

$$I_{\alpha_0} q = \alpha_0 \lim_{\text{Re} \rightarrow 0} \frac{q}{\alpha_0} \text{ при фиксированных } r, \theta;$$

$$I_{\alpha_m} q = I_{\alpha_{m-1}} q + \alpha_m \lim_{\text{Re} \rightarrow 0} \frac{q - I_{\alpha_{m-1}} q}{\alpha_m} \text{ при фиксированных } r, \theta, \\ m = 1, 2, \dots;$$

$$E_{\beta_0} q = \beta_0 \lim_{\text{Re} \rightarrow 0} \frac{q}{\beta_0} \text{ при фиксированных } \rho, \theta;$$

$$E_{\beta_n} q = E_{\beta_{n-1}} q + \beta_n \lim_{\text{Re} \rightarrow 0} \frac{q - E_{\beta_{n-1}} q}{\beta_n} \text{ при фиксированных } \rho, \theta, \\ n = 1, 2, \dots$$

Для согласования внутренних и внешних разложений ниже будет использован принцип асимптотического сращивания [4], согласно которому для операторов  $I_{\alpha_m}, E_{\beta_n}$  справедливо следующее соотношение:

$$(4.1) \quad I_{\alpha_m} E_{\beta_n} q = E_{\beta_n} I_{\alpha_m} q.$$

Практическое осуществление согласования связано с выбором внутренних и внешних переменных, с определением функций сравнения и т. д. [4]. То или иное конкретное решение этих вопросов, как правило, имеет характер предположения, которое оправдывается при успешном согласовании.

В рассматриваемом случае главные члены внутреннего и внешнего разложений  $\omega$  согласуются при  $h_1(\text{Re}) = \text{Re}^{n-2}$ , где  $n = 2, 3, 4, \dots$  — номер первого отличного от нуля коэффициента  $f_n$  в (2.7) (не считая  $f_1$ ).

Положим  $f_2 \neq 0$ , и в соответствии с этим  $h_1(\text{Re}) = 1$ . Используя (2.9), найдем

$$E_{\text{Re}^2} I_1 \omega = -E_{\text{Re}^2} \Delta \psi_0 = -2\varepsilon_0 f_2 \text{Re}^2 \rho^{-2} \sin 2\theta.$$

Учитывая, что  $E_{\text{Re}^2} I_1 \omega = I_1 E_{\text{Re}^2} \omega$ , и используя (3.6), получим

$$A_2 = -\varepsilon_0 f_2 / 4, A_k = 0, k = 3, 4, \dots$$

Таким образом,

$$(4.2) \quad \omega^{(1)} = e^{\frac{1}{2} \rho \cos \theta} \left\{ A_1 K_1(\rho/2) - \frac{1}{2} \varepsilon_0 f_2 K_2(\rho/2) \cos \theta \right\} \sin \theta.$$

Рассмотрим теперь уравнение Навье — Стокса и уравнение непрерывности

$$(4.3) \quad (\mathbf{u} \cdot \hat{\nabla}) \mathbf{u} = -\hat{\nabla} p + \hat{\Delta} \mathbf{u};$$

$$(4.4) \quad \hat{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0,$$

где  $\hat{\nabla} = (\partial/\partial \hat{x}, \partial/\partial \hat{y})$ ;  $p \sigma V_\infty^2$  — давление,  $\sigma$  — плотность жидкости. Разложим  $p$  в следующий асимптотический ряд при  $\text{Re} \rightarrow 0$ :

$$(4.5) \quad p \sim p_\infty + \text{Re} p^{(1)}(\rho, \theta) + \text{Re}^2 h_2(\text{Re}) p^{(2)}(\rho, \theta) + \dots,$$

где  $p_\infty$  — значение  $p$  на бесконечности.

Подставляя (3.15), (4.5) в (4.3), (4.4) и ограничиваясь главными членами, получим

$$(4.6) \quad \partial \mathbf{u}^{(1)} / \partial \hat{x} = -\hat{\nabla} p^{(1)} + \hat{\Delta} \mathbf{u}^{(1)};$$

$$(4.7) \quad \hat{\nabla} \cdot \mathbf{u}^{(1)} = 0.$$

Уравнения (4.6), (4.7), как известно [5], имеют решения следующего вида:

$$(4.8) \quad u_x^{(1)} = \partial \Phi / \partial \hat{x} + \partial \chi / \partial \hat{x} - \chi;$$

$$(4.9) \quad u_y^{(1)} = \partial \Phi / \partial \hat{y} + \partial \chi / \partial \hat{y};$$

$$(4.10) \quad p^{(1)} = -\partial \Phi / \partial \hat{x},$$

если

$$(4.11) \quad \hat{\Delta} \Phi = 0;$$

$$(4.12) \quad \partial \chi / \partial \hat{x} = \hat{\Delta} \chi.$$

Решая уравнения (4.11), (4.12), учитывая, что  $\partial \chi / \partial \hat{y} = \omega^{(1)}$ , и используя (3.5), (4.2), (4.8) — (4.10), получим

$$(4.13) \quad u_x^{(1)} = a' \rho^{-1} \cos \theta - \sum_{n=2}^{\infty} (b'_n \cos n\theta + c'_n \sin n\theta) \rho^{-n} + \\ + e^{\frac{1}{2} \rho \cos \theta} \left\{ \left( A_1 - \frac{1}{4} \varepsilon_0 f_2 \right) K_0(\rho/2) + \left( A_1 - \frac{1}{2} \varepsilon_0 f_2 \right) K_1(\rho/2) \cos \theta - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \varepsilon_0 f_2 K_2(\rho/2) \cos 2\theta \right\}, \\ u_y^{(1)} = a' \rho^{-1} \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} (c'_n \cos n\theta - b'_n \sin n\theta) \rho^{-n} +$$

$$\begin{aligned}
 & + e^{\frac{1}{2}\rho \cos \theta} \left\{ A_1 K_1(\rho/2) - \frac{1}{2} \varepsilon_0 f_2 K_2(\rho/2) \cos \theta \right\} \sin \theta; \\
 (4.14) \quad p^{(1)} & = -a' \rho^{-1} \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} (b'_n \cos n\theta + c'_n \sin n\theta) \rho^{-n},
 \end{aligned}$$

где  $a'$ ,  $b'_n$ ,  $c'_n$  — произвольные постоянные.  
Используя (2.9), находим

$$E_{\text{Re}} I_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 f_2 \text{Re} \rho^{-1} (\sin 3\theta - \sin \theta).$$

В соответствии с (4.1)  $E_{\text{Re}} I_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} = \bar{I}_1 \bar{E}_{\text{Re}} \frac{\partial \psi}{\partial x}$ , откуда

$$\begin{aligned}
 a' & = \varepsilon_0 f_2 - 2A_1, \quad b'_2 = -2\varepsilon_0 f_2, \\
 b'_m & = 0, \quad m = 3, 4, \dots, \quad c'_n = 0, \quad n = 2, 3, \dots
 \end{aligned}$$

5. Можно показать [1], что

$$\begin{aligned}
 F & = \mu V_{\infty} \left\{ \oint_{\text{Re}} \omega d\hat{x} - \oint (p - p_{\infty} + u_x - 1) d\hat{y} + \oint u_y (u_x - 1) d\hat{x} - \right. \\
 & \quad \left. - \oint (u_x - 1)^2 d\hat{y} \right\},
 \end{aligned}$$

где  $\mu = \sigma \nu$  — коэффициент вязкости жидкости;  $u_x$ ,  $u_y$  — соответственно  $x$ - и  $y$ -компоненты вектора  $u$ .

Интегрирование ведется в плоскости течения по некоторому контуру  $S$ , содержащему внутри себя сечение цилиндра. Выберем в качестве  $S$  окружность радиуса  $L$  с центром в начале координат. Заменяя при  $\text{Re} \rightarrow 0$   $u_x$ ,  $u_y$ ,  $\omega$ ,  $p$  их внешними разложениями, находим

$$(5.1) \quad F \sim \mu V_{\infty} \text{Re} \left[ \oint \omega^{(1)} d\hat{x} - \oint (p^{(1)} + u_x^{(1)}) d\hat{y} \right] + \dots \text{ при } \text{Re} \rightarrow 0.$$

Поскольку  $F = 0$ , то должны быть равны нулю и все члены разложения (5.1). Используя (4.2), (4.13), (4.14), получаем

$$\oint \omega^{(1)} d\hat{x} \rightarrow 0, \quad \oint (p^{(1)} + u_x^{(1)}) d\hat{y} \rightarrow 2\pi (2A_1 - \varepsilon_0 f_2) \text{ при } L \rightarrow \infty.$$

Таким образом, из равенства нулю главного члена разложения (5.1) следует, что

$$A_1 = \varepsilon_0 f_2 / 2.$$

6. Теперь можно выписать окончательные выражения для  $u_x^{(1)}$ ,  $u_y^{(1)}$ ,  $\omega^{(1)}$

$$(6.1) \quad u_x^{(1)} = 2\varepsilon_0 f_2 \rho^{-2} \cos 2\theta + \frac{1}{4} \varepsilon_0 f_2 e^{\frac{1}{2}\rho \cos \theta} [K_0(\rho/2) - K_2(\rho/2) \cos 2\theta];$$

$$(6.2) \quad u_y^{(1)} = 2\varepsilon_0 f_2 \rho^{-2} \sin 2\theta + \frac{1}{2} \varepsilon_0 f_2 e^{\frac{1}{2}\rho \cos \theta} [K_1(\rho/2) - K_2(\rho/2) \cos \theta] \sin \theta;$$

$$(6.3) \quad \omega^{(1)} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 f_2 e^{\frac{1}{2}\rho \cos \theta} [K_1(\rho/2) - K_2(\rho/2) \cos \theta] \sin \theta.$$

Учитывая, что  $\partial\psi^{(1)}/\partial\hat{x} = -u_y^{(1)}$ ,  $\partial\psi^{(1)}/\partial\hat{y} = u_x^{(1)}$ , и используя (3.3), (6.1), (6.2), найдем

$$(6.4) \quad \psi^{(1)} = 2\varepsilon_0 f_2 \rho^{-1} \sin \theta - \varepsilon_0 f_2 e^{\frac{1}{2} \rho \cos \theta} K_1(\rho/2) \sin \theta.$$

С помощью (2.9), (6.1) — (6.4) для  $\psi$ ,  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $\omega$  могут быть получены выражения, равномерно пригодные во всей области течения. Применяя метод аддитивного составления [4], находим

$$\psi \approx (I_1 + E_1 - I_1 E_1) \psi = \psi_0 + \psi^{(1)} + \frac{1}{2} \varepsilon_0 f_2 \sin 2\theta;$$

$$(6.5) \quad u_x \approx (I_1 + E_{\text{Re}} - I_1 E_{\text{Re}}) u_x = u_{0x} + \text{Re} u_x^{(1)} + \frac{1}{2} \varepsilon_0 f_2 r^{-1} (\cos \theta + \cos 3\theta);$$

$$(6.6) \quad u_y \approx (I_1 + E_{\text{Re}} - I_1 E_{\text{Re}}) u_y = u_{0y} + \text{Re} u_y^{(1)} - \\ - \frac{1}{2} \varepsilon_0 f_2 r^{-1} (\sin \theta - \sin 3\theta);$$

$$(6.7) \quad \omega \approx (I_1 + E_{\text{Re}^2} - I_1 E_{\text{Re}^2}) \omega = \omega_0 + \text{Re}^2 \omega^{(1)} + 2\varepsilon_0 f_2 r^{-2} \sin 2\theta,$$

где  $u_{0x}$ ,  $u_{0y}$  — соответственно  $x$ - и  $y$ -компоненты вектора  $u_0$ .

Полученные выше соотношения позволяют, в частности, ответить на вопрос об асимптотическом поведении скорости течения и завихренности на больших расстояниях вниз по потоку от рассматриваемого тела (при малых  $\text{Re}$ ). Используя (6.5) — (6.7) и переходя к размерным величинам, находим следующие асимптотические формулы:

$$\mathbf{V} - \mathbf{V}_\infty \sim \mathbf{i} \frac{A}{X^{3/2}} \left( \frac{V_\infty Y^2}{\nu X} - 2 \right) e^{-\frac{V_\infty Y^2}{4\nu X}}, \\ \Omega \sim B \frac{Y}{X^{5/2}} \left( \frac{V_\infty Y^2}{\nu X} - 6 \right) e^{-\frac{V_\infty Y^2}{4\nu X}}$$

при  $X \rightarrow \infty$  и фиксированном  $Y^2/X$ .

Здесь  $A = \frac{1}{2} \pi^{1/2} \varepsilon_0 f_2 a \nu^{1/2} V_\infty^{1/2}$ ;  $B = \frac{1}{4} \pi^{1/2} \varepsilon_0 f_2 a \nu^{-1/2} V_\infty^{3/2}$ .

Автор выражает благодарность Б. А. Луговцову за неоднократные полезные обсуждения вопросов, связанных с рассмотренной задачей.

Поступила 29 IV 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Биркгоф Г., Сарантелло Э. Струи, следы, каверны. М., «Мир», 1964.
2. Imai I. On the asymptotic behaviour of viscous fluid flow at a great distance from a cylindrical body with special reference to Filon's paradox. — «Proc. Roy. Soc.» Ser. A, 1951, vol. 208, p. 487—516.
3. Бабенко К. И. Об асимптотическом поведении вихря вдали от тела при обтекании его плоским потоком вязкой жидкости. — ПММ, 1970, т. 34, № 5, с. 911—925.
4. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
5. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М., Физматгиз, 1963.