

Изложенный упрощенный способ представления суточного хода температуры, принятый в данной работе, приводит к тому, что ход испарения в стадии понижения температуры описывается в деформированном вдоль оси t виде. Для устранения небольшой погрешности, обусловленной отмеченным упрощением, нужно аппроксимировать ход температуры двумя-тремя первыми гармониками ряда Фурье.

Поступила 4 VI 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Будаговский А. И. Испарение почвенной влаги. М., «Наука», 1964.
2. Струзер Л. Р. Передвижение парообразной влаги в почве в процессе испарения. Тр. Гос. гидрол. ин-та, 1952, вып. 34.
3. Колясов Ф. Е. Результаты исследования по движению воды в почве при различных влажностях. Сб. тр. по агрофизике, вып. 4, М., Сельхозгиз, 1948.
4. Репман Н. L. Gas and vapour movements in the soil J. Agric. Sci., 1940, vol. 30, No. 4.
5. Дандарон Ж-Д. Экранный метод определения влажности воздуха. Метеорология и гидрология, 1969, № 5.
6. Лебедев А. Ф. Почвенные и грунтовые воды. М., Изд-во АН СССР, 1936.
7. Роде А. А. Почвенная влага. М., Изд-во АН СССР, 1952.
8. Сочеванов Н. Н. Количественная закономерность между упругостью водяного пара и количеством воды, сорбированной почвой. Почвоведение, 1955, № 9.
9. Carson I. E. Analysis of soil and air temperatures by Fourier techniques. J. Geophys. Res., 1963, vol. 68, No. 8.
10. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнение математической физики. М., «Наука», 1966.
11. Дандарон Ж-Д. Экспериментальное определение коэффициента диффузии паров воды в почве. Почвоведение, 1969, № 10.
12. Fagrell D. A., Greacen E. L., Gurr C. G. Vapour transfer in soil due to air turbulence. Soil Sci., 1967, vol. 102, No. 5.

О ВЛИЯНИИ ЖЕСТКОСТИ СЛОЕВ, ПЕРЕКРЫВАЮЩИХ ВОДОНОСНЫЙ ГОРИЗОНТ, НА ЗАКОНОМЕРНОСТИ УПРУГОГО РЕЖИМА ФИЛЬТРАЦИИ

И. Г. Котов, В. А. Мироенко, Л. И. Сердюков

(Ленинград)

Рассматривается влияние жесткости слоев, перекрывающих водоносный горизонт, на закономерности упругого режима фильтрации в процессе опытных откачек. Задача сводится к решению уравнения осесимметричного прогиба бесконечной плиты на упругом основании. Показано, что жесткостью перекрывающих слоев можно пренебречь лишь при достаточно большой продолжительности откачки; даются соответствующие приближенные критерии.

Классическая теория упругого режима фильтрации базируется, как известно, на предположении о полной передаче «депрессивной нагрузки» на водоносные породы. Иначе говоря, принимается, что снижение напоров S в какой-то точке кровли водоносного пласта вызывает увеличение эффективного давления в этой точке на величину γS (γ — объемный вес воды). Практическая приемлемость такого предположения при условии, что размеры депрессионной воронки значительно превышают суммарную мощность перекрывающих пород M , не вызывает сомнения. Однако многие фильтрационные задачи решаются для условий, когда диаметр зоны влияния откачки $2R$ соизмерим с величиной M или даже меньше ее; это имеет место, например, при проведении относительно кратковременных откачек из водоносных горизонтов, залегающих на значительных глубинах. В подобных условиях, очевидно, будет иметь существенное значение эффект «зависания» перекрывающей толщи: давление на водовмещающие породы (в пределах зоны влияния откачки) со стороны перекрывающих пород будет передаваться

лишь частично ввиду жесткости слоев и ограниченных размеров депрессионной воронки. На это обстоятельство уже обращалось внимание в ряде ранее опубликованных работ [1,2]. В частности, авторы работы [2], задав некоторый условный закон передачи давления, отметили, что искривление графиков восстановления уровня на их начальных участках может быть объяснено именно неполной передачей давления на первых этапах откачки.

В отличие от ранее выполненных работ в данной статье делается попытка дать реальную оценку влияния фактора зависания на упругий режим фильтрации.

Задача решается в упрощенной постановке. Вокруг скважины радиуса r_c создана воронка депрессии радиуса R , причем понижения в пределах воронки подчиняются логарифмической зависимости

$$S(r) = S_0 \frac{\ln(R/r)}{\ln(R/r_0)} \quad (1)$$

Здесь S_0 — понижение в скважине, r — текущая координата.

В результате снижения гидростатического давления толща перекрывающих пород стремится прогнуться, так чтобы избыточное эффективное давление $p_0 = \gamma S(r)$ передалось на водоносные породы, из которых ведется откачка.

Прогибу препятствуют силы упругого сопротивления изгибу пород перекрывающей толщи и силы упругого отпора со стороны сжимающегося водоносного пласта. Ввиду ограниченных масштабов деформаций перекрывающей толщи вполне допустимо считать их подчиняющимися законам теории упругости.

В такой постановке задача сводится к решению уравнения осесимметричного прогиба бесконечной плиты на упругом основании [3], которое может быть записано применительно к рассматриваемым условиям следующим образом:

$$D \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(l'' + \frac{1}{r} l' \right) = p_0(r) - Al(r) \quad (2)$$

$$A = \frac{1 + \varepsilon}{am}, \quad D = \frac{EM^3}{12(1 - \nu^2)}$$

Здесь l — деформация прогиба перекрывающих пород, или деформация сжатия водоносных пород; A — коэффициент пропорциональности между деформацией сжатия водоносных пород и нагрузкой на них; ε , a , m — коэффициент пористости, коэффициент сжимаемости и мощность водоносных пород; E , ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона (в среднем) для пород перекрывающей толщи.

Общее решение этого уравнения имеет вид [3]

$$l = c_1 U_0(\rho) + c_2 v_0(\rho) + c_3 f_0(\rho) + c_4 g_0(\rho) + l_0(\rho) \quad (3)$$

$$\rho' = b\rho, \quad b = (A/D)^{1/4}, \quad U_0(\rho) = \text{ber}(\rho)$$

$$v_0(\rho) = -\text{bei}(\rho), \quad f_0(\rho) = -2\pi^{-1} \text{kei}(\rho), \quad g_0(\rho) = -2\pi^{-1} \text{ker}(\rho)$$

Здесь c_i — постоянные интегрирования; b — коэффициент приведения; $l_0(\rho)$ — некоторое частное решение уравнения (2); $\text{ker}(\rho)$, $\text{kei}(\rho)$, $\text{ber}(\rho)$, $\text{bei}(\rho)$ — функции Томсона [4].

Для частного случая силы, равномерно распределенной по окружности с приведенным радиусом $\rho = \alpha$, решение принимает вид [3]

$$l(\rho, \alpha) = \frac{\pi \alpha q}{2Db^3} [f_0(\alpha) U_0(\rho) - g_0(\alpha) v_0(\rho)] \quad \text{при } \rho \leq \alpha \quad (4)$$

$$l(\rho, \alpha) = \frac{\pi \alpha q}{2Db^3} [U_0(\alpha) f_0(\rho) - v_0(\alpha) g_0(\rho)] \quad \text{при } \rho \geq \alpha$$

где q — интенсивность нагрузки.

В соответствии с принятым в (1) законом распределения понижения S депрессионная нагрузка (на окружности с приведенным радиусом $\rho = \alpha$) характеризуется интенсивностью

$$q(\alpha) = p_0 \frac{2\pi r}{2\pi \rho} = \frac{p_0}{b} = \gamma S_0 \frac{\ln(\rho_1/\alpha)}{b \ln(\rho_1/\rho_0)}, \quad \begin{matrix} \rho_0 = br_0 \\ \rho_1 = bR \end{matrix} \quad (5)$$

Общую деформацию от всей депрессионной нагрузки можно получить, интегрируя выражение (4) по α в пределах от ρ_0 до ρ_1 при интенсивности q , отвечающей формуле (5)

$$l(\rho) = \frac{\pi \gamma S_0}{2A \ln(R/r_0)} \left[f_0(\rho) \int_{\rho_0}^{\rho_1} \alpha U_0(\alpha) \ln(\rho_1/\alpha) d\alpha - g_0(\rho) \int_{\rho_0}^{\rho_1} \alpha v_0(\alpha) \ln(\rho_1/\alpha) d\alpha + \right. \\ \left. + U_0(\rho) \int_{\rho_0}^{\rho_1} \alpha f_0(\alpha) \ln(\rho_1/\alpha) d\alpha - v_0(\rho) \int_{\rho_0}^{\rho_1} \alpha g_0(\alpha) \ln(\rho_1/\alpha) d\alpha \right] \quad (6)$$

Для решения интегралов в выражении (6) используются соотношения

$$\int U_0(x) x dx = -xv_0'(x), \quad \int v_0(x) x dx = xU_0'(x) \\ \int f_0(x) x dx = -xg_0'(x), \quad \int g_0(x) x dx = xf_0'(x) \\ v_0 f_0' + U_0 g_0' = U_0' g_0 + v_0' f_0 + 2/\pi x$$

При $R \gg r_0$ и $r_0 \rightarrow 0$ решение (6) приводится к виду

$$l(\rho) = \frac{\pi \gamma S_0}{2A \ln(R/r_0)} \left\{ 2\pi^{-1} \ln\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right) + g_0(\rho) - [f_0(\rho_1) v_0(\rho) + g_0(\rho_1) U_0(\rho)] \right\} \quad (7)$$

В частности, деформация прогиба в центре (при $\rho = 0$)

$$l(0) = \frac{\gamma S_0}{A \ln(R/r_0)} \left[\ln \rho_1 - \frac{\pi}{2} g_0(\rho_1) \right] \quad (8)$$

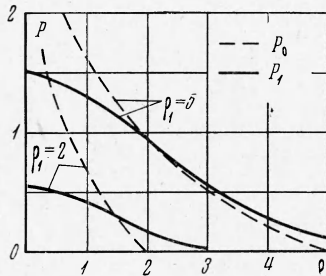
Ввиду того что давление, передаваемое на водоносную толщу, равно $p_1 = Al$, из формулы (8) следует:

$$p_1(0) = \frac{\gamma S_0}{\ln(R/r_0)} \left[\ln \rho_1 - \frac{\pi}{2} g_0(\rho_1) \right]$$

С ростом ρ_1 функция $g_0(\rho_1) \rightarrow 0$, поэтому полная передача давления в точке $r = 0$ может иметь место лишь при очень больших ρ_1 (когда $\ln \rho_1 \ll \ln \rho_0$).

На фиг. 1 даны кривые приведенных давлений для $\rho_1 = 2$ и $\rho_1 = 5$

$$P_1(\rho) = p_1(\rho) \frac{\ln(R/r_0)}{\gamma S_0}, \quad P_0(\rho) = p_0(\rho) \frac{\ln(R/r_0)}{\gamma S_0}$$



Фиг. 1

Из фигуры видно, что при $\rho_1 = 2$ фактические давления, передаваемые на водоносный пласт, резко отличаются от величин давления, рассчитанных из предположения о полной передаче депрессионной нагрузки. Наоборот, при $\rho_1 = 5$ фактические и расчетные давления достаточно близки друг к другу в пределах значительной части (примерно 85%) площади депрессионной воронки.

Для оценки значений ρ_1 , при которых влияние неполной передачи давления на процесс фильтрации будет ощутимым, определим величину

$$\Phi(\rho_1) = \frac{2\pi}{J} \int_{r_0}^R p_1(r) r dr = \frac{2\pi A}{b^2 J} \int_{\rho_0}^{\rho_1} l(\rho) \rho d\rho \\ J = 2\pi \int_{r_0}^R p_0(r) r dr = \frac{2\pi}{b^2} \int_{\rho_0}^{\rho_1} p_0(\rho) \rho d\rho$$

Эту величину с учетом (7) можно представить в виде

$$\Phi(\rho_1) = 1 - (2\pi/\rho_1) [f_0(\rho_1) U_0'(\rho_1) - g_0(\rho_1) v_0'(\rho_1) - f_0'(\rho_1)]$$

Величина $\varphi(\rho_1)$, очевидно, соответствует отношению объемов откачанных упругих запасов — фактических и подсчитанных при обычном предположении о полной передаче депрессионной нагрузки. Если принять проводимость пласта неизменной, то

$$\varphi(\rho_1) = a_0^* / a^* = \mu^* / \mu_0^*$$

где a_0^* и μ_0^* — коэффициент пьезопроводности и упругая водоотдача, определенные без учета фактора зависания; a^* и μ^* — то же, но с учетом фактора зависания. Зависимость $\varphi(\rho_1)$ приведена на фиг. 2 (кривая 1).

Таким образом, влияние фактора зависания сводится в конечном счете к тому, что расчетный коэффициент пьезопроводности оказывается величиной, зависящей от размеров зоны влияния откачки, и изменяется от $k(1 + \varepsilon) / \gamma E_1 \varepsilon$ (E_1 — модуль упругости воды) при $t = 0$ до своего предельного значения a_0^* при достаточно большой продолжительности откачки.

С другой стороны, можно показать, что при одиночных откачках зона, из которой поступает более 85% всех упругих запасов воды, откачиваемых скважиной, ограничивается расчетным радиусом

$$R(t) = 2 \sqrt{a_0^* t} \quad (9)$$

и, если при этом аппроксимировать депрессионную кривую логарифмическим законом (1), то фактически откачанные за время t объемы упругих запасов оказываются равными объему депрессионной воронки указанного расчетного радиуса.

Следовательно, можно полагать, что для данной задачи под величиной R во всех приведенных выше зависимостях понимается расчетный параметр, определяемый формулой (9); поэтому величина $\rho_1^2 = b^2 R^2$ оказывается прямо пропорциональной времени t , так что функция $\varphi(\rho_1)$ (фиг. 2) может быть приравнена некоторой функции времени $f(t)$, причем $f(t) \equiv \varphi(2b \sqrt{a_0^* t})$.

Таким образом, для условий рассмотренной задачи можно говорить об изменении расчетной величины упругой водоотдачи во времени.

Уместно в связи с этим провести аналогию между рассматриваемой задачей и задачей о фильтрации в безнапорных водоносных горизонтах. Как известно, при относительно кратковременных откачках расчетная водоотдача μ безнапорного водоносного горизонта оказывается величиной, существенно зависящей от времени; эту зависимость можно записать в виде [6]

$$\varphi_1 = \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{A_1 B_1 t - (1 - e^{-A_1 B_1 t})}{A_1 B_1 t + A_1^{-1} (1 - e^{-A_1 B_1 t})} \quad (A_1, B_1 = \text{const}) \quad (10)$$

Здесь t — время, μ_0 — значение водоотдачи при $t \rightarrow \infty$. Учитывая это обстоятельство, попытаемся аппроксимировать кривую на фиг. 2 формулой вида

$$\varphi = \frac{A_2 \rho_1^2 - (1 - e^{-A_2 \rho_1^2})}{A_2 \rho_1^2 + B_2 (1 - e^{-A_2 \rho_1^2})} \quad (11)$$

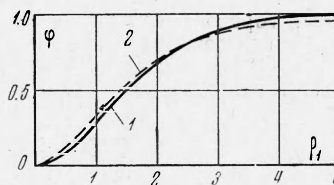
При $A_2 = 0.4$ и $B_2 = 0.6$ аппроксимация оказывается достаточно удовлетворительной (фиг. 2, кривая 2). Из сравнения (11) и (10) следует, что рассматриваемый случай фильтрации должен с некоторой долей приближения аппроксимироваться зависимостями, выведенными для безнапорной фильтрации с переменной водоотдачей [6]; при этом величине $B_1 t$ в (10) соответствует величина ρ_1^2 в (11). А так как в случае безнапорной фильтрации изменением водоотдачи во времени можно пренебречь [6] лишь при $B_1 t > 5 \div 10$, то в рассматриваемой задаче соответствующий критерий имеет вид $\rho_1^2 > 5 \div 10$ * или

$$\frac{R}{M} > (1.2 \div 1.7) \left[\frac{m}{M} \frac{aE}{(1 + \varepsilon)(1 - \nu^2)} \right]^{1/4} \quad (12)$$

Исходя из выражения (9), можно получить соответствующий критерий времени для одиночной откачки с постоянным дебитом

$$\frac{a_0^* t}{M^2} > (0.4 \div 0.7) \left[\frac{m}{M} \frac{aE}{(1 + \varepsilon)(1 - \nu^2)} \right]^{1/2} \quad (13)$$

* Так как разность величин P_1 и P_0 с увеличением ρ меняет знак, то уже при $\rho_1^2 = 5$ расчетная водоотдача отличается от фактической менее чем на 25% (фиг. 2).



Фиг. 2

Следовательно, все расчетные формулы упругого режима фильтрации могут быть использованы для анализа опытных откачек лишь при достаточно большой их продолжительности. Это обстоятельство, в частности, существенно сужает применимость ряда экспресс-методов для изучения фильтрационных параметров достаточно глубоко залегающих водоносных горизонтов.

Конечно, приведенное здесь решение описывает процесс передачи давления с определенной долей приближения. В частности, принималось, что толща перекрывающих пород прогибается согласно теории тонких плит, что, вообще говоря, допустимо [6] лишь при достаточно больших ρ_1 . Далее, определенные погрешности в критерий (13) вносит предположение о том, что величина R изменяется по закону (9). Наконец, важно иметь в виду, что на самом деле толща перекрывающих пород будет прогибаться не подобно сплошной плите, а как слоистая система; при этом вследствие наличия в этой толще недренируемых напорных горизонтов, будет иметь место прогиб водоупорного слоя, перекрывающего опробуемый водоносный горизонт, под влиянием возникающей при откачке разности напоров.

Все эти факторы свидетельствуют о том, что полученные выше формулы построены для существенно упрощенных условий. Нужно, однако, сказать, что при современном уровне исследований более точная постановка рассматриваемых вопросов лишена практического смысла, так как для этого потребовалось бы в каждом конкретном слое перед проведением откачки иметь надежные данные по структуре перекрывающих толщ и параметрам прочности слагающих их пород. Поэтому здесь ставилась более скромная задача: найти хотя бы ориентировочную оценку нижнего предела применимости общепринятых уравнений упругого режима фильтрации.

Чтобы оценить, какими реальными значениями характеризуются на практике критерии (12) и (13), рассмотрим в качестве примера основной — бучакский — водоносный горизонт на Южно-Белозерском железорудном месторождении. По результатам исследований ВНИМИ он характеризуется следующими параметрами: $E \approx 0.5 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2$; $a = 7 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2/\text{кг}$, $\varepsilon = 0.7$, $\nu = 0.4$, $m = 15 \text{ м}$. Так как $M = 250 \text{ м}$, то из (12) получается

$$\frac{R}{M} > (1.2 \div 1.7) \left[\frac{15 \cdot 0.5 \cdot 10^4 \cdot 7 \cdot 10^{-4}}{250 \cdot 1.7 \cdot (1 - 0.16)} \right]^{1/4} \approx 0.75 \div 1.1$$

Следовательно, для того чтобы результаты одиночной откачки, проведенной из бучакского горизонта, могли обрабатываться без учета фактора зависания, необходимо, как минимум, чтобы радиус депрессионной воронки превысил мощность перекрывающей толщи.

Если принять, что отношение $a / (1 + \varepsilon)$ имеет один порядок с величиной E^{-1} (такое предположение, как правило, будет занижать роль фактора зависания при откачке из песчаных водоносных пластов), а $\nu = 0.3 \div 0.4$, то получим приближенные оценки

$$\frac{R}{M} > (1.2 \div 1.7) (m / M)^{1/4}, \quad \frac{\alpha_0^{*t}}{M^2} > (0.40 \div 0.70) (m / M)^{1/2} \quad (14)$$

Авторы благодарят С. Г. Лехниченко и В. М. Шестакова за полезное обсуждение.

Поступила 19 VI 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Шестаков В. М. Некоторые вопросы теории упругого режима фильтрации. ПМТФ, 1962, № 3.
2. Афанасьев Е. Ф., Николаевский В. Н. Нелокально-упругий режим фильтрации и восстановления давления в глубинных пластах. ПМТФ, 1969, № 5.
3. Корнев Б. Г. Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. М., Физматгиз, 1960.
4. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М., Изд-во иностр. лит., 1948.
5. Мироненко В. А., Сердюков Л. И. Применение метода интегральных соотношений при анализе результатов опытных откачек в слоистых толщах. Изв. вузов, Геология и разведка, 1969, № 11.
6. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. М., Гостехиздат, 1946.