

О ВЛИЯНИИ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ
НА ВОЗНИКНОВЕНИЕ КОНВЕКЦИИ В СЛОЕ ЖИДКОСТИ
СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В. Х. Изаксон

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается задача об устойчивости подогреваемого снизу плоского горизонтального слоя жидкости с учетом поверхностного натяжения на свободной верхней границе. Дана постановка задачи (п.1), доказано существование порога устойчивости (п.2), численными методами построены нейтральные кривые и описан характер стабилизирующего действия поверхностного натяжения на состояние покоя (п.3).

В предположении, что форма свободной поверхности не возмущается, задача о возникновении конвекции в слое жидкости со свободной границей рассматривалась в [1,2].

Полученное в этих работах критическое число Рэлея $R_* = 1100$ справедливо для слоев жидкости большой толщины и сильных гравитационных полей и сама постановка исключает влияние поверхностного натяжения.

1. Уравнения и краевые условия. Горизонтальный слой жидкости, верхняя граница которого свободна, а нижняя — твердая стенка, находится в поле тяжести. Рассмотрим вопрос об устойчивости состояния покоя, если на поверхностях, ограничивающих слой, поддерживается постоянная разность температур. Уравнения свободной конвекции имеют вид [3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla p + \Delta \mathbf{v} - GT\boldsymbol{\gamma} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T &= \frac{1}{P} \Delta T, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\ G &= \frac{\beta g h^3 \delta}{\nu^2}, \quad P = \frac{\nu}{\chi}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \{0, 0, 1\} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь \mathbf{v} — вектор скорости, T — температура, p — давление, ось x_3 в выбранной системе координат направлена вертикально вниз, G — число Гросгофа, P — число Прандтля, β — коэффициент объемного расширения жидкости, g — ускорение свободного падения, δ — разность температур на верхней и нижней поверхностях, h — средняя толщина слоя, предполагаемая заданной и не зависящей от времени, ν — коэффициент кинематической вязкости, χ — коэффициент температуропроводности.

На свободной границе $x_3 = \Phi(x_1, x_2, t)$ будем учитывать силы поверхностного натяжения и согласно [3] примем следующие условия:

$$\begin{aligned} \tau_{ik} n_k - p n_i &= \pi_0 \delta_{3k} - S \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \right) n_i + \frac{1}{F} \varphi n_i \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} &= \left(1 + \frac{\partial \Phi^2}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi^2}{\partial x_2} \right)^{-1/2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad T = \delta_2 = \text{const} \\ F &= \frac{\nu^2}{g h^3}, \quad S = \frac{a}{\rho g h^2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь π_0 — внешнее давление, τ_{ik} — тензор напряжений, \mathbf{n} — вектор нормали к свободной границе, F и S — безразмерные параметры, a — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность.

На твердой стенке $x_3 = 1$ примем условия постоянства температуры и прилипания

$$T = \delta_1 = \text{const}, \quad \mathbf{v} = 0 \quad (1.3)$$

Будем считать, что функции $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, $p(x)$, $T(\mathbf{x})$ и $\varphi(x_1, x_2, t)$ периодичны по направлениям x_1 и x_2 с периодами соответственно $L_1 = 2\pi/\alpha_1$ и $L_2 = 2\pi/\alpha_2$, средняя толщина слоя постоянная, т. е.

$$\int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \varphi(x_1, x_2, t) dx_1 dx_2 = 0 \quad (1.4)$$

и отсутствует снос жидкости в любом горизонтальном направлении

$$\int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \int_0^1 v_i(x_1, x_2, x_3, t) dx_1 dx_2 dx_3 = 0 \quad (i=1, 2) \quad (1.5)$$

2. Линеаризованная задача. Состоянию покоя подогреваемой снизу жидкости соответствует следующее решение задачи (1.1) — (1.3):

$$\mathbf{v}_0 = 0, \quad T_0 = x_3, \quad p_0 = -\frac{1}{2}Gx_3^2, \quad \varphi_0 = 0 \quad (2.1)$$

Применим метод малых колебаний. Линеаризуем систему (1.1) — (1.3) в окрестности решения (2.1) и, полагая

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) e^{\sigma t}, \quad T(\mathbf{x}, t) = T(\mathbf{x}) e^{\sigma t}, \quad p(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x}) e^{\sigma t}, \\ \varphi(x_1, x_2, t) = \varphi(x_1, x_2) e^{\sigma t}$$

отделим время. В результате получим спектральную задачу

$$\sigma \mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} - GT\boldsymbol{\gamma}, \quad \sigma T + v_3 - \frac{1}{P} \Delta T = 0, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (2.2)$$

$$x_3 = 0, \quad T = -\varphi, \quad v_3 = \sigma \varphi, \quad \tau_{13} = \tau_{23} = 0, \quad F\tau_{33} = \varphi - SF \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \right) \\ x_3 = 1, \quad T = 0, \quad \mathbf{v} = 0 \quad (2.3)$$

Порогом устойчивости будем считать те значения параметров, при которых $\sigma = 0$ является точкой спектра задачи (2.2), (2.3). Относительно колебательной неустойчивости известно только, что при $F = 0$ она невозможна.

Положив в (2.2), (2.3) $\sigma = 0$, исключив v_1 , v_2 , p и φ и разделив переменные, полагая

$$T(\mathbf{x}) = T(x_3) e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)}, \quad v_3(\mathbf{x}) = v_3(x_3) e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)}$$

получим следующую задачу на собственные значения:

$$L^2 v_3 = -\lambda \alpha^2 T, \quad LT = v_3 \quad (2.4)$$

$$x_3 = 0, \quad v_3 = 0, \quad Lv_3 = 0, \quad \alpha^2(1 + \alpha^2 \eta) T = \mu(DLv_3 - 2\alpha^2 Dv_3) \\ x_3 = 1, \quad v_3 = 0, \quad Dv_3 = 0, \quad T = 0 \quad (2.5)$$

$$D = \frac{d}{dx_3}, \quad \alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2, \quad L = D^2 - \alpha^2, \quad \lambda = \bar{P}\bar{G}, \quad \mu = \frac{F}{P}, \quad \eta = SF$$

От аналогичной задачи, приведенной в [4], задача (2.4), (2.5) отличается положительным множителем

$$1 + \alpha^2 \eta$$

в условии (2.5) для температуры.

Так же, как это сделано в [4], можно доказать следующую теорему.

Теорема 2.1. При любых $\mu > 0$, $\eta > 0$ существует положительное простое собственное число λ_1 задачи (2.4), (2.5). Этому собственному числу соответствует положительная собственная функция и в круге радиуса λ_1 нет других собственных чисел задачи (2.4), (2.5).

При фиксированных α и μ λ_1 — монотонно возрастающая функция η и справедливы оценки

$$\lambda_1(\alpha, \mu, \eta) \leq \frac{2\alpha \operatorname{sh} \alpha (\operatorname{sh} 2\alpha - 2\alpha)(1 + \alpha^2 \eta)}{\mu [^{3/2} \operatorname{ch} \alpha (\operatorname{sh} 2\alpha - 2\alpha) - \alpha^2 (\alpha \operatorname{ch} \alpha + \operatorname{sh} \alpha)]}$$

$$\lambda_1(\alpha, \mu, \eta) \leq \lambda_1(\alpha, 0, 0)$$

3. Численный расчет. Собственные числа λ_1 задачи (2.4), (2.5) определялись численно из трансцендентного уравнения

$$\det A = 0$$

где $A = (a_{ik})$ — матрица четвертого порядка, элементы которой определяются следующими выражениями:

$$a_{11} = -3(1 + \alpha^2 \eta) + a_{13}, \quad a_{12} = 6l(\lambda' + 2)$$

$$a_{13} = l[a(\lambda' + 2) + \sqrt{3} b (\lambda' - 2)]$$

$$a_{14} = l[(\lambda' + 2)b - \sqrt{3} a (\lambda' - 2)], \quad a_{21} = \operatorname{Re} c \alpha c + 2e^a \cos \varphi_0$$

$$a_{22} = -\operatorname{Im} \operatorname{sh} \alpha c, \quad a_{23} = 2 \operatorname{sh} a \cos \varphi_0, \quad a_{24} = 2 \operatorname{ch} a \sin \varphi_0$$

$$a_{31} = -\operatorname{Re} c \alpha c, \quad -2e^{-a} \cos \varphi_1, \quad a_{32} = \operatorname{Im} \operatorname{sh} \alpha c$$

$$a_{33} = -e^a \cos \varphi_2 + e^{-a} \cos \varphi_1, \quad a_{34} = e^a \sin \varphi_2 + e^{-a} \sin \varphi_1$$

$$a_{41} = \operatorname{Re}(c \operatorname{ch} \alpha c) - 2e^a (a \cos \varphi_2 - b \sin \varphi_1), \quad a_{42} = \operatorname{Im}(c \operatorname{ch} \alpha c)$$

$$a_{43} = -e^a (a \cos \varphi_2 - b \sin \varphi_2) - e^{-a} (a \cos \varphi_1 + b \sin \varphi_1)$$

$$a_{44} = e^a (a \sin \varphi_2 + b \sin \varphi_1) - e^{-a} (a \sin \varphi_2 - b \cos \varphi_2)$$

$$\lambda' = (\lambda / \alpha^4)^{1/3}, \quad c = (1 - \lambda)^{1/2}$$

$$a = [^{1/8} (\sqrt{(\lambda' + 2)^2 + 3\lambda'^2} + \lambda' + 2)]^{1/2}$$

$$b = [^{1/8} (\sqrt{(\lambda' + 2)^2 + 3\lambda'^2} - \lambda' - 2)]^{1/2}$$

$$\varphi_0 = \alpha b, \quad \varphi_1 = \alpha b + ^{2/3}\pi, \quad \varphi_2 = \alpha b - ^{2/3}\pi, \quad l = \lambda' \alpha^3 \mu$$

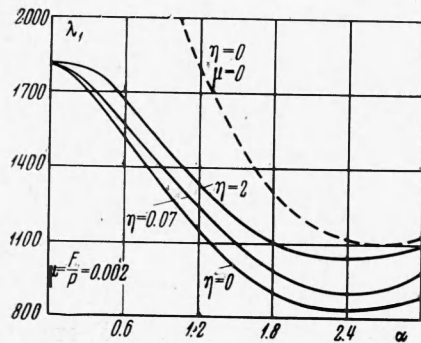
Обозначим величину $\min_{\alpha} \lambda_1(\alpha, \mu, \eta)$ через $\lambda_*(\mu, \eta)$, а то значение α , при котором этот минимум достигается, через $\alpha_*(\mu, \eta)$. Графики функции $\lambda_1(\alpha, \mu, \eta)$ при фиксированных η и μ будем называть нейтральной кривой.

Методами теории возмущений можно показать, что $\lambda_1(0, \mu, \eta)$ не зависит от η , т. е. $\lambda_1(0, \mu, \eta) = \lambda_1(0, \mu, 0)$ и согласно [4]

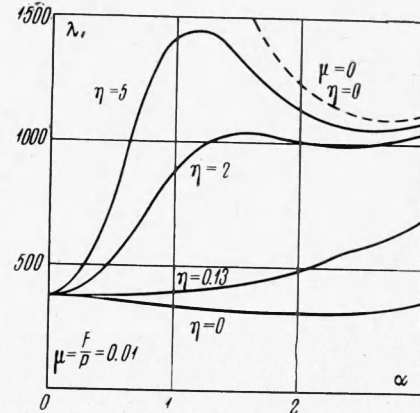
$$\lambda_1(0, \mu, \eta) = ^{40/11} \mu^{-1}$$

Поэтому нейтральные кривые, соответствующие некоторому значению μ , имеют общую точку при $\alpha = 0$.

Если это значение больше $\lambda_*(0,0) = 1100,65$ [1], т. е. $\mu > \mu_* = 40/11 \lambda_*^{-1}(0,0)$, то стабилизирующее влияние поверхностного натяжения, как



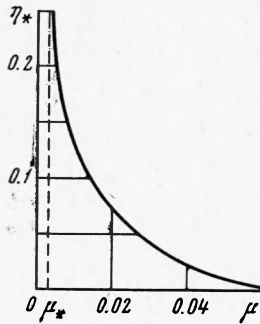
Фиг. 1



Фиг. 2

показано на фиг. 1, заключается в том, что $\lambda_*(\mu, \eta)$ и $\alpha_*(\mu, \eta)$ увеличиваются с увеличением η и приближаются соответственно к $\lambda_*(0,0)$ и $\alpha_*(0,0)$.

При $\mu > \mu_*$ значение $\lambda_1(0, \mu, \eta) < \lambda_*(0,0)$ и существует такое значение $\eta = \eta_*(\mu)$, что $\lambda_*(\mu, \eta) = 40/11 \mu^{-1}$ и $\alpha_*(\mu, \eta_*) = 0$. Такие нейтральные кривые показаны на фиг. 2. На фиг. 3 построен график функции $\eta_*(\mu)$. Отметим, что при достаточно больших η и $\mu > \mu_*$ нейтральные кривые имеют локальный минимум, близкий к минимуму кривой $\lambda_1(\alpha, 0, 0)$.



Фиг. 3

В выражение для параметра η входит число F . Это число пренебрежимо мало для достаточно толстых слоев жидкости в сильном поле тяжести и в таких случаях влияние поверхностного натяжения на устойчивость состояния покоя слоя жидкости можно не учитывать. Приведем пример, когда учет параметров μ и η необходим.

Для слоя глицерина толщиной 1 мм получаем $\mu=0.007$, $\eta=30$. В этом случае конвекция должна возникнуть при значениях числа Рэлея $R_* = 500$ с волновым числом $\alpha = 0$, вместо $R = 400$ и $\alpha = 2.2$ по [4].

Поступила 25 VI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Pellew A., Southwell R. V. On maintained convective motion in a fluid heated from below. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1940, vol. 176, pp. 312—342.
2. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydrodynamic stability. Oxford. Clarendon Press, 1961.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Изд. 2. М., Гостехиздат, 1954.
4. Иксон В. Х., Юдович В. И. О возникновении конвекции в слое жидкости со свободной границей. Изв. АН СССР, МЖТ, 1968, вып. 4.