УДК 532.516

ОБ УСТАНОВИВШЕМСЯ ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ВРАЩАЮЩИЙСЯ РАДИАЛЬНЫЙ КАНАЛ ПРИ МАЛЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ЧИСЛА РОССБИ

О. Н. Овчинников

(*Ленинград*)

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу об установившемся стабилизированном течении несжимаемой вязкой жидкости через призматический канал с прямоугольным поперечным сечением, вращающийся с постоянной угловой скоростью ω относительно оси, которая проходит через центр поперечного сечения канала перпендикулярно одной из его сторон.

Введем декартову систему координат $Ox'y'z'$, жестко связанную с каналом и ориентированную так, чтобы ось Oy' была направлена вдоль оси вращения, а ось Oz' — вдоль оси канала в сторону течения. Линейный размер поперечного сечения канала в направлении оси y' обозначим $2h$, в направлении оси x' — $2l$. Будем предполагать, что течение жидкости в канале происходит под действием постоянного продольного градиента модифицированного давления $\partial\Pi/\partial z' = \alpha$ и число Россби Ro мало ($\mathrm{Ro} = U/\omega L \ll 1$).

При принятых допущениях движение жидкости в канале будет описываться следующей системой дифференциальных уравнений [1]:

$$\Delta\Delta\psi = \mathrm{R}\,\partial w/\partial y,\quad \Delta w = -\mathrm{R}\,\partial\psi/\partial y - 2, \tag{1.1}$$

где

$$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2;\ x = x'/L;\ y = y'/L;$$
$$\psi = \psi'/UL;\ w = w'/U;\ \mathrm{R} = 2\omega L^2/\nu;$$
$$\Pi = \frac{p}{\rho} - \frac{\omega^2}{2}\left(x'^2 + z'^2\right);\quad L = \begin{cases} l & \text{при } h \geqslant l, \\ h & \text{при } h \leqslant l; \end{cases}$$

$U = -\alpha L^2/2\nu$ — характерная скорость; w' — составляющая вектора относительной скорости в направлении оси z'; ψ' — функция тока поперечного течения; p — давление; ρ — плотность; ν — кинематическая вязкость жидкости.

Граничные условия к системе (1.1) имеют вид

$$w = \psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} = \partial\psi/\partial y = 0 \text{ при } x = \pm\, l/L;\ y = \pm h/L. \tag{1.2}$$

2. Канал, удлиненный в направлении оси вращения ($h \geqslant l$). Решение системы (1.1), удовлетворяющее краевым условиям

$$w(\pm 1,\ y) = 0,\ w(x, \pm\ 1/\varepsilon) = 0,\ \psi(\pm 1,\ y) = 0,$$

$\psi'_y(x,\ \pm\ 1/\varepsilon) = 0$, может быть записано в виде

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} A_k\left[\frac{\mathrm{ch}\,(b_1 x)}{\mathrm{ch}\, b_1} - r_1\,\mathrm{ch}\,(b_2 x)\cos(b_3 x) + r_2\,\mathrm{sh}\,(b_2 x)\cdot\sin(b_3 x)\right]\times \tag{2.1}$$
$$\times\sin(\beta_k y) + \sum_{k=0}^{\infty} B_k\left[\frac{\alpha_k^2 - b_k^2}{b_4}\frac{\mathrm{sh}\,(b_4 y)}{\mathrm{ch}\, c_4} + r_3\,\mathrm{sh}\,(b_5 y)\cdot\cos(b_6 y) -\right.$$

$$-r_4\operatorname{ch}(b_5y)\cdot\sin(b_6y)\Big]\cdot\cos(\alpha_kx)+4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\alpha_k^3\mathrm{R}}[r_5\operatorname{sh}(b_5y)\cdot\cos(b_6y)-$$

$$-r_6\operatorname{ch}(b_5y)\cdot\sin(b_6y)]\cos(\alpha_kx);$$

(2.2) $$w=1-x^2+4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\alpha_k^3}[r_7\operatorname{ch}(b_5y)\cdot\cos(b_6y)-r_8\operatorname{sh}(b_5y)\cdot\sin(b_6y)]\times$$

$$\times\cos(\alpha_kx)-\sum_{k=0}^{\infty}A_k\sqrt[3]{\mathrm{R}\beta_k}\left[\frac{\operatorname{ch}(b_1x)}{\operatorname{ch}b_1}-r_9\operatorname{ch}(b_2x)\cdot\cos(b_3x)-\right.$$

$$\left.-r_{10}\operatorname{sh}(b_2x)\cdot\sin(b_3x)\right]\cos(\beta_ky)+\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{R}B_k\left[\frac{\operatorname{ch}(b_4y)}{\operatorname{ch}c_4}-\right.$$

$$\left.-r_{11}\operatorname{ch}(b_5y)\cdot\cos(b_6y)-r_{12}\operatorname{sh}(b_5y)\cdot\sin(b_6y)\right]\cos(\alpha_kx),$$

где

(2.3) $$\alpha_k=\frac{\pi}{2}(2k+1)\,\varepsilon_1;\quad \beta_k=\frac{\pi}{2}(2k+1)\,\varepsilon;$$

$$\varepsilon_1=\begin{cases}1 & \text{при } h\geqslant l\\ h/l & \text{при } h\leqslant l'\end{cases}\quad \varepsilon=\begin{cases}l/h & \text{при } h\geqslant l,\\ 1 & \text{при } h\leqslant l;\end{cases}$$

$$b_1=\sqrt[3]{\mathrm{R}\beta_k}\sqrt{1+t_k};\quad t_k=\sqrt[3]{\beta_k^4/\mathrm{R}^2};$$

$$b_{2,3}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\mathrm{R}\beta_k}\sqrt{2\sqrt{1-t_k+t_k^2}\pm(2t_k-1)};\quad b_4=\sqrt{\alpha_k^2+v_2-v_1};$$

$$b_{5,6}=\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{(2\alpha_k^2+v_1-v_2)^2+3(v_1+v_2)^2}\pm(2\alpha_k+v_1-v_2)};$$

$$v_{1,2}=\sqrt[3]{\sqrt{\frac{(\mathrm{R}\alpha_k)^4}{4}+\frac{\mathrm{R}^6}{27}}\pm\frac{(\mathrm{R}\alpha_k)^2}{2}};$$

$$r_1=F\left(\sqrt{3}\operatorname{sh}b_2\cdot\sin b_3+\operatorname{ch}b_2\cdot\cos b_3\right);$$

$$r_2=F\left(\sqrt{3}\operatorname{ch}b_2\cdot\cos b_3-\operatorname{sh}b_2\cdot\sin b_3\right);$$

$$r_3=pF_1(b_6\operatorname{ch}c_5\cdot\cos c_6+b_5\operatorname{sh}c_5\cdot\sin c_6)+gF_1\left[b_5\left(b_5^2+b_6^2-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\alpha_k^2\right)\operatorname{sh}c_5\cdot\sin c_6-b_6\left(b_5^2+b_6^2+\alpha_k^2\right)\operatorname{ch}c_5\cdot\cos c_6\right];$$

$$r_4=pF_1(b_5\operatorname{ch}c_5\cdot\cos c_6-b_6\operatorname{sh}c_5\cdot\sin c_6)+gF_1\left[b_5\left(b_5^2+b_6^2-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\alpha_k^2\right)\operatorname{ch}c_5\cdot\cos c_6+b_6\left(b_5^2+b_6^2+\alpha_k^2\right)\operatorname{sh}c_5\cdot\sin c_6\right];$$

$$r_5=pF_1(b_6\operatorname{ch}c_5\cdot\cos c_6+b_5\operatorname{sh}c_5\cdot\sin c_6);$$

$$r_6=pF_1(b_5\operatorname{ch}c_5\cos c_6-b_6\operatorname{sh}c_5\cdot\sin c_6);$$

$$r_7=F_1(\theta\operatorname{ch}c_5\cdot\cos c_6+\operatorname{sh}c_5\cdot\sin c_6);$$

$$r_8=F_1(\theta\operatorname{ch}c_5\cdot\cos c_6-\operatorname{sh}c_5\cdot\sin c_6);$$

$$r_9=F(\operatorname{ch}b_2\cdot\cos b_3-\sqrt{3}\operatorname{sh}b_2\cdot\sin b_3);$$

$$r_{10}=F(\sqrt{3}\operatorname{ch}b_2\cdot\cos b_3+\operatorname{sh}b_2\cdot\sin b_3);$$

$$r_{11}=F_1(\operatorname{ch}c_5\cdot\cos c_6+\theta_1\operatorname{sh}c_5\cdot\sin c_6);$$

$$r_{12}=F_1(\operatorname{sh}c_5\cdot\sin c_6-\theta_1\operatorname{ch}c_5\cdot\cos c_6);$$

$$F=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 b_2-\sin^2 b_3};\quad F_1=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 b_5-\sin^2 b_6};$$

$$c_i=b_i/\varepsilon\ (i=4,\ 5,\ 6);$$

$$\theta=\frac{b_5^2-b_6^2-\alpha_k^2}{2b_5b_6};\quad \theta_1=\frac{b_5^2-b_6^2-b_4^2}{2b_5b_6};$$

$$p=\frac{\left(b_5^2-b_6^2-\alpha_k^2\right)^2+4b_5^2b_6^2}{2b_5b_6\left(b_5^2+b_6^2\right)};\quad g=\frac{\alpha_k^2-b_4^2}{2b_5b_6\left(b_5^2+b_6^2\right)}.$$

Коэффициенты A_k и B_k в (2.1), (2.2) должны быть определены из оставшихся краевых условий для функции тока ψ. Если A_k и B_k определить из условий

$$\psi\left(x,\pm\frac{1}{\varepsilon}\right)=0,\quad \psi_x'=(\pm 1,y)=0, \tag{2.4}$$

то, как нетрудно проверить, все граничные условия задачи будут удовлетворены. В силу симметрии условий (1.2) и четности функций w и ψ достаточно удовлетворить соотношениям (2.4) соответственно только при $y=\mp 1/\varepsilon$ и $x=1$. Из первого условия (2.4) следует

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}A_kH_k(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(B_kQ_k+\frac{4(-1)^k}{\alpha_k^2\mathrm{R}}T_k\right)\cos(\alpha_kx), \tag{2.5}$$

где

$$Q_k=r_3\operatorname{sh}c_5\cdot\cos c_6-r_4\operatorname{ch}c_5\cdot\sin c_6+\frac{\alpha_k^2-b_k^2}{b_4}\operatorname{th}c_4;$$

$$T_k=r_5\operatorname{sh}c_5\cdot\cos c_6-r_6\operatorname{ch}c_5\cdot\sin c_6;$$

$$H_k=\frac{\operatorname{ch}(b_1x)}{\operatorname{ch}b_1}-r_1\operatorname{ch}(b_2x)\cdot\cos(b_3x)+r_2\operatorname{sh}(b_2x)\sin(b_3x).$$

Функцию $H_k(x)$ разложим в ряд Фурье по косинусам

$$H_k(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\Omega_{ik}\cos(\alpha_ix)\quad (k=0,1,2\ldots),$$

$$\alpha_i=\frac{\pi}{2}(2i+1)\varepsilon_1,\ |x|\leqslant 1,$$

$$\Omega_{ik}=2\alpha_i(-1)^i\left\{\frac{1}{b_1^2+\alpha_i^2}-\frac{b_2^2-b_3^2+\alpha_i^2+2\sqrt{3}\,b_2b_3}{\left(b_2^2+b_3^2+\alpha_i^2\right)^2-4b_3^2\alpha_i^2}\right\}.$$

Найденное разложение для $H_k(x)$ подставим в левую часть (2.5) и в полученном двойном ряде поменяем порядок суммирования (заменив при этом индексы k на j и i на k). Далее, приравняв коэффициенты при одинаковых $\cos(\alpha_ix)$, приходим к следующей бесконечной системе линейных уравнений:

$$B_k=\frac{4(-1)^{k+1}}{\alpha_k^3\mathrm{R}}\frac{T_k}{Q_k}-\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\Omega_{kj}\frac{A_j}{Q_k}\quad (k=0,1,2\ldots). \tag{2.6}$$

Используя второе из условий (2.4), будем иметь

$$\sum_{k=0}^{\infty}A_k\Gamma_k\sin(\beta_ky)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\alpha_kB_k\Phi_k(y)+\frac{4}{\mathrm{R}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{Z_k(y)}{\alpha_k^2}, \tag{2.7}$$

где

$$\Gamma_k = b_1 \operatorname{th} b_1 + (r_2 b_3 - r_1 b_2) \operatorname{sh} b_2 \cdot \cos b_3 + (r_2 b_2 + r_3 b_3) \operatorname{ch} b_2 \cdot \sin b_3;$$

$$Z_k(y) = r_5 \operatorname{sh}(b_5 y) \cdot \cos(b_6 y) - r_6 \operatorname{ch}(b_5 y) \cdot \sin(b_6 y);$$

$$\Phi_k(y) = \frac{\alpha_k^2 - b_k^2}{b_4} \frac{\operatorname{sh}(b_4 y)}{\operatorname{ch} b_4} + r_3 \operatorname{sh}(b_5 y) \cdot \cos(b_6 y) - r_4 \operatorname{ch}(b_5 y) \cdot \sin(b_6 y).$$

Функции $Z_k(y)$ и $\Phi_k(y)$ разложим в ряды Фурье по синусам

$$Z_k(y) = \sum_{i=0}^{\infty} \tau_{ik} \sin(\beta_i y), \quad \Phi_k(y) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_{ik} \sin(\beta_i y),$$

$$\beta_i = \frac{\pi}{2}(2i+1)\varepsilon, \quad |y| \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \quad (k = 0, 1, 2 \ldots),$$

$$\tau_{ik} = \frac{2\varepsilon(-1)^i \left[(b_5^2 - b_6^2 - \alpha_k^2)^2 + 4b_5^2 b_6^2 \right]}{(b_5^2 + b_6^2 + \beta_i^2)^2 + 4b_5^2 b_6^2},$$

$$\varphi_{ik} = 2\varepsilon(-1)^i \left[\frac{\alpha_k^2 - b_4^2}{b_4^2 + \beta_i^2} + \frac{(b_5^2 - b_6^2 - \alpha_k^2)^2 + 4b_5^2 b_6^2 - (\alpha_k^2 + \beta_i^2)(\alpha_k^2 - b_4^2)}{(b_5^2 + b_6^2 + \beta_i^2)^2 - 4b_5^2 b_6^2} \right].$$

Разложения для $Z_k(y)$ и $\Phi_k(y)$ подставим в правую часть (2.7) и в полученных двойных рядах поменяем порядок суммирования (заменив при этом индексы k на j и i на k).

Далее, приравняв коэффициенты при одинаковых $\sin(\beta_k y)$, получим бесконечную систему линейных уравнений

$$A_k = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \alpha_j \varphi_{kj} \frac{B_j}{T_k} + \frac{4}{\mathrm{R} T_k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tau_{kj}}{\alpha_j^2} \quad (k = 0, 1, 2 \ldots). \tag{2.8}$$

Из системы (2.6), (2.8) должны быть определены коэффициенты A_k и B_k. Можно показать, что при конкретных значениях параметров R и ε эта система имеет единственное ограниченное решение, которое может быть найдено, например, методом последовательных приближений. Если это сделано, поставленная задача решена до конца.

Среднюю скорость движения жидкости вдоль канала определим соотношением

$$w_0 = \frac{w_0'}{U} = \frac{1}{hl} \int_0^h \int_0^l w(x', y')\, dx' dy'. \tag{2.9}$$

Подставляя сюда вместо w его значение, согласно (2.1), получим

$$w_0 = \frac{2}{3} - f(\varepsilon, \mathrm{R}); \tag{2.10}$$

$$f(\varepsilon, \mathrm{R}) = 2\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} F_1 \frac{(b_5 + \theta b_6)\operatorname{sh}(2c_5) + (b_6 - \theta b_5)\sin(2c_6)}{\alpha_k^4 (b_5^2 + b_6^2)} - \varepsilon \sqrt[3]{\mathrm{R}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k A_k}{\beta_k^{2/3}} \left[\frac{\operatorname{th} b_1}{b_1} - F \frac{(b_2 - \sqrt{3} b_3)\operatorname{sh}(2b_2) + (b_3 + \sqrt{3} b_2)\sin(2b_3)}{2(b_2^2 + b_3^2)} \right] - 2\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k B_k}{\alpha_k} \left[\frac{\operatorname{th} b_4}{b_4} - F_1 \frac{(b_5 + \theta_1 b_6)\operatorname{sh}(2c_5) + (b_6 - \theta_1 b_5)\sin(2c_6)}{2(b_5^2 + b_6^2)} \right]. \tag{2.11}$$

Коэффициент сопротивления движению жидкости через вращающийся канал определим в виде

$$\lambda_\omega = -\frac{4\alpha L}{(w_0')^2}. \tag{2.12}$$

Подставляя сюда вместо α и w_0' соответствующие значения, имеем

$$\lambda_\omega = \frac{16}{\mathrm{Re}\left[\frac{2}{3} - f(\varepsilon, \mathrm{R})\right]}, \quad \mathrm{Re} = \frac{2w_0' l}{\nu}. \tag{2.13}$$

Коэффициент сопротивления неподвижного канала λ_0 — частный случай (2.13) при $\mathrm{R} = 0$. Учитывая это, отношение коэффициентов сопротивления вращающегося и неподвижного каналов представим в виде

$$\frac{\lambda_\omega}{\lambda_0} = \frac{\frac{2}{3} - f(\varepsilon, 0)}{\frac{2}{3} - f(\varepsilon, \mathrm{R})}. \tag{2.14}$$

Выражение для $f(\varepsilon, 0)$ получается из (2.11) предельным переходом при $\mathrm{R} \to 0$:

$$f(\varepsilon, 0) = 4\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{th}(\alpha_k/\varepsilon)}{\alpha_k^5}.$$

Если в (2.14) ε устремить к нулю, то $\lambda_\omega/\lambda_0 \to 1$, т. е. сопротивление быстро вращающегося щелеобразного канала, вытянутого вдоль оси вращения, близко к сопротивлению неподвижного канала.

3. Канал, удлиненный в направлении, перпендикулярном оси вращения ($l \geqslant h$). С учетом известного разложения

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos\left(\frac{2k+1}{2}\pi y\right) = \begin{cases} \pi/4 & \text{при } |y| < 1, \\ 0 & \text{при } |y| = 1 \end{cases} \tag{3.1}$$

система (1.1) может быть записана в виде

$$\Delta\Delta\psi = \mathrm{R}\frac{\partial w}{\partial y}, \tag{3.2}$$

$$\Delta w = -\mathrm{R}\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\cos\left(\frac{2k+1}{2}\pi y\right).$$

Если проделать выкладки, аналогичные указанным в п. 2, получим следующее решение системы (3.2), удовлетворяющее граничным условиям (1.2):

$$\psi = 2\mathrm{R}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(\mathrm{R}^2 + \beta_k^4)\beta_k^2}[s_1 \mathrm{ch}(b_2 x)\cdot\cos(b_3 x) + s_2 \mathrm{sh}(b_2 x)\cdot\sin(b_2 x) - 1] \times$$
$$\times \sin(\beta_k y) + \frac{8}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt[3]{\mathrm{R}}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k \beta_k^{2/3}}{\mathrm{R}^2 + \beta_k^4}[s_3 \mathrm{ch}(b_2 x)\cdot\cos(b_3 x) -$$
$$- s_4 \mathrm{sh}(b_2 x)\cdot\sin(b_3 x)]\sin(\beta_k y) + \sum_{k=0}^{\infty} D_k\left[\frac{\mathrm{ch}(b_1 x)}{\mathrm{ch}\, c_1} - s_5 \mathrm{ch}(b_2 x)\cdot\cos(b_3 x) +\right.$$
$$\left. + s_6 \mathrm{sh}(b_2 x)\cdot\sin(b_3 x)\right]\sin(\beta_k y) + \sum_{k=0}^{\infty} E_k\left[\frac{\alpha_k^2 - b_k^2}{b_4}\frac{\mathrm{sh}(b_4 y)}{\mathrm{ch}\, b_4} + \right. \tag{3.3}$$

$$+ s_7 \operatorname{sh}(b_5 y)\cdot\cos(b_6 y) - s_8 \operatorname{ch}(b_5 y)\cdot\sin(b_6 y)\Big]\cos(\alpha_k x);$$

$$(3.4)\qquad w = -\sum_{k=0}^{\infty}\sqrt[3]{R\beta_k}D_k\left[\frac{\operatorname{ch}(b_1 x)}{\operatorname{ch} c_1} - s_9 \operatorname{ch}(b_2 x)\cos(b_3 x) -\right.$$

$$\left. - s_{10}\operatorname{sh}(b_2 x)\cdot\sin(b_3 x)\right]\cos(\beta_k y) + 8\frac{R^{4/3}}{\sqrt{3}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\left(R^2+\beta_k^4\right)\beta_k^{5/3}}\times$$

$$\times\left[s_{11}\operatorname{ch}(b_2 x)\cdot\cos(b_3 x) - s_{12}\operatorname{sh}(b_2 x)\cdot\sin(b_3 x)\right]\cos(\beta_k y) +$$

$$+ 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\beta_k}{R^2+\beta_k^4}\left[1 + s_{13}\operatorname{ch}(b_2 x)\cdot\cos(b_3 x) - s_{14}\operatorname{sh}(b_2 x)\cdot\sin(b_3 x)\right]\cos(\beta_k y) +$$

$$+ R\sum_{k=0}^{\infty}E_k\left[\frac{\operatorname{ch}(b_4 y)}{\operatorname{ch} b_4} - s_{15}\operatorname{ch}(b_5 y)\cdot\cos(b_6 y) - s_{16}\operatorname{sh}(b_5 y)\cdot\sin(b_6 y)\right]\cos(\alpha_k y),$$

где

$$s_1 = F_2\left(\operatorname{ch} c_2\cdot\cos c_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sh} c_2\cdot\sin c_3\right);$$

$$s_2 = F_2\left(\operatorname{sh} c_2\cdot\sin c_3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{ch} c_2\cdot\cos c_3\right);$$

$$s_3 = F_3\operatorname{sh} c_2\cdot\sin c_3;\qquad s_4 = F_3\operatorname{ch} c_2\cdot\cos c_3;$$

$$s_5 = F_2\left(\operatorname{ch} c_2\cdot\cos c_3 + \sqrt{3}\operatorname{sh} c_2\cdot\sin c_3\right);$$

$$s_6 = F_2\left(\sqrt{3}\operatorname{ch} c_2\cdot\cos c_3 - \operatorname{sh} c_2\cdot\sin c_3\right);$$

$$s_7 = pF_3\left(b_6\operatorname{ch} b_5\cdot\cos b_6 + b_5\operatorname{sh} b_5\cdot\sin b_6\right) + gF_2\left[b_5\left(b_5^2 + b_6^2 - \alpha_k^2\right)\times\right.$$

$$\left.\times\operatorname{sh} b_5\cdot\sin b_6 - b_6\left(b_5^2 + b_6^2 + \alpha_k^2\right)\operatorname{ch} b_5\cdot\cos b_6\right];$$

$$s_8 = pF_3\left(b_5\operatorname{ch} b_5\cdot\cos b_6 - b_6\operatorname{sh} b_5\cdot\sin b_6\right) + gF_2\left[b_5\left(b_5^2 + b_6^2 - \alpha_k^2\right)\times\right.$$

$$\left.\times\operatorname{ch} b_5\cdot\cos b_6 + b_6\left(b_5^2 + b_6^2 + \alpha_k^2\right)\operatorname{sh} b_5\cdot\sin b_6\right];$$

$$s_9 = F_2(\operatorname{ch} c_2\cdot\cos c_3 - \sqrt{3}\operatorname{sh} c_2\cdot\sin c_3);$$

$$s_{10} = F_2(\sqrt{3}\operatorname{ch} c_2\cdot\cos c_3 + \operatorname{sh} c_2\cdot\sin c_3);$$

$$s_{11} = F_2\operatorname{sh} c_2\cdot\sin c_3;\quad s_{12} = F_2\operatorname{ch} c_2\cdot\cos c_3;$$

$$s_{13} = F_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sh} c_2\cdot\sin c_3 - \operatorname{ch} c_2\cdot\cos c_3\right);$$

$$s_{14} = F_2\left(\operatorname{sh} c_2\cdot\sin c_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{ch} c_2\cdot\cos c_3\right);$$

$$s_{15} = F_3(\operatorname{ch} b_5\cdot\cos b_6 + \theta_1\operatorname{sh} b_5\cdot\sin b_6);$$

$$s_{16} = F_3(\operatorname{sh} b_5\cdot\sin b_6 - \theta_1\operatorname{ch} b_5\cdot\cos b_6);$$

$$F_2 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 c_2 - \sin^2 c_3};\qquad F_3 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 b_5 - \sin^2 b_6};$$

$$c_i = b_i/\varepsilon_1 (i = 1,\ 2,\ 3).$$

В соотношениях (3.3), (3.4) коэффициенты D_k и E_k являются корнями следующей бесконечной системы линейных уравнений:

$$(3.5)\quad E_k = -\frac{4R}{N_k}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{R^2+\beta_k^4}\left[\frac{\sigma_{kj}}{\beta_j^2} + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\beta_j}{R^2}\right)^{2/3}\eta_{kj}\right] + \frac{1}{N_k}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{k+1}h_{kj}D_j,$$

$$D_k = \frac{4(-1)^{k+1}}{R^2+\beta_k^4}\left[\frac{R^2}{\beta_k^2}\frac{H_{1k}}{H_{3k}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\beta_k^2}{R}\right)^{1/3}\frac{H_{2k}}{H_{3k}}\right] + \frac{1}{H_{3k}}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\alpha_j\rho_{kj}E_j,$$

где

$$N_k = \frac{\alpha_k^2 - b_4^2}{b_4}\operatorname{th} b_4 + s_7 \operatorname{sh} b_5\cdot\cos b_6 - s_8 \operatorname{ch} b_5\cdot\sin b_6;$$

$$H_{1k} = \frac{F_2}{2}\left[\left(b_2 - \frac{b_3}{\sqrt{3}}\right)\operatorname{sh}(2c_3) - \left(\frac{b_2}{\sqrt{3}} + b_3\right)\operatorname{sh}(2c_2)\right];$$

$$H_{2k} = -\frac{F_2}{2}\left[b_2\sin(2c_3) + b_3\operatorname{sh}(2c_2)\right];$$

$$H_{3k} = b_1\operatorname{th} c_1 + \frac{F_2}{2}\left[\left(b_2\sqrt{3}+b_3\right)\sin(2c_3) + \left(\sqrt{3}b_3 - b_2\right)\operatorname{sh}(2c_2)\right];$$

$$(3.6)\quad \rho_{kj} = 2(-1)^k\left[\frac{\alpha_j^2 - b_{4j}^2}{\beta_k^2 + b_{4j}^2} + \frac{\left(b_{5j}^2 - b_{6j}^2 - \alpha_k^2\right)^2 + 4b_{5j}^2b_{6j}^2 - \left(\alpha_j^2 - b_{4j}^2\right)\left(\alpha_j^2+\beta_k^2\right)}{\left(b_{5j}^2 + b_{6j}^2 + \beta_k^2\right)^2 - 4b_{5j}^2\beta_k^2}\right];$$

$$\sigma_{kj} = 2\varepsilon_1(-1)^k\left[\frac{\alpha_k\left(b_{2j}^2 - b_{3j}^2 + \alpha_k^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}b_{2j}b_{3j}\right)}{\left(b_{2j}^2 + b_{3j}^2 + \alpha_k^2\right)^2 - 4b_{3j}^2\alpha_k^2} - \frac{1}{\alpha_k}\right];$$

$$h_{kj} = 2\varepsilon_1(-1)^k\alpha_k\left[\frac{1}{b_{1j}^2+\alpha_k^2} - \frac{b_{2j}^2 - b_{3j}^2 + \alpha_k^2 + 2\sqrt{3}\,b_{2j}b_{3j}}{\left(b_{2j}^2+b_{3j}^2+\alpha_k^2\right)^2 - 4b_{3j}^2\alpha_k^2}\right];$$

$$\eta_{kj} = 4\varepsilon_1(-1)^k\frac{\alpha_k b_{2j}b_{3j}}{\left(b_{2j}^2+b_{3j}^2+\alpha_k^2\right)^2 - 4b_{3j}^2\alpha_k^2}.$$

В (3.6) дополнительный индекс j у b_i означает, что в соответствующих формулах (2.3) для b_i k должно быть заменено на j.

Вычислим среднюю скорость движения жидкости вдоль канала. Подставляя в (2.9) вместо w его значение, согласно (3.4), имеем

$$(3.7)\quad w_c = f_1(\varepsilon_1, R) = 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{R^2+\beta_k^4}\left\{1 - \varepsilon_1F_3\times\right.$$
$$\left.\times\frac{\left[\left(b_3 + b_2/\sqrt{3}\right)\sin(2b_3) + \left(b_2 - b_3/\sqrt{3}\right)\operatorname{sh}(2b_2)\right]}{2\left(b_2^2+b_3^2\right)}\right\} +$$
$$+\frac{4R^{4/3}}{\sqrt{3}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{F_3}{\left(R^2+\beta_k^4\right)\beta_k^{8/3}}\frac{\left(b_3\operatorname{sh}(2b_2) - b_2\sin(2b_3)\right)}{b_2^2+b_3^2} +$$
$$+R\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\beta_k}E_k\left\{\frac{\operatorname{th} b_4}{b_4} - F_5\frac{\left(b_5+\theta_1b_6\right)\operatorname{sh}(2b_5) + \left(b_6 - \theta_1b_5\right)\sin(2b_6)}{2\left(b_5^2+b_6^2\right)}\right\} -$$
$$-\sqrt[3]{R}\varepsilon_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{D_k(-1)^k}{\beta_k^{2/3}}\left[\frac{\operatorname{th} c_1}{b_1} - F_3\frac{\left(b_3+\sqrt{3}b_2\right)\sin(2b_3) + \left(b_2 - \sqrt{3}b_3\right)\operatorname{sh}(2b_2)}{2\left(b_2^2+b_3^2\right)}\right\}.$$

Равенства (3.3), (3.7) и (3.4) при $l\to\infty$ ($\varepsilon_1\to 0$) переходят в соответствующие выражения для продольной составляющей скорости и функции тока вторичного течения во вращающемся щелеобразном канале, вытянутом в направлении, перпендикулярном оси вращения [2], при $R = 0$ дают распределение скоростей в неподвижном канале.

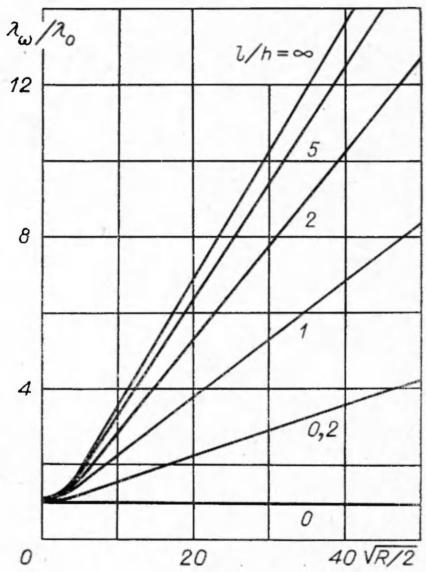
Используя (1.2), (2.12) и (3.7), получим следующее выражение для отношения коэффициентов сопротивления вращающегося и неподвижного каналов:

$$\frac{\lambda_\omega}{\lambda_0} = \frac{f_1(\varepsilon_1, 0)}{f_1(\varepsilon_1, R)}.$$

Выражение для $f_1(\varepsilon_1, 0)$ получается из (3.7) предельным переходом при $R \to 0$

$$f_1(\varepsilon_1, 0) = \frac{2}{3} - f(\varepsilon_1, 0).$$

Системы уравнений (2.6), (2.8) и (3.3) были решены методом итерации для различных значений параметра R и отношений l/h, представляющих практический интерес. (Заметим, что непосредственное численное решение краевой задачи (1.1), (1.2) на существующих ЭВМ возможно только лишь для сравнительно небольших значений числа R [3].) Найденные значения коэффициентов A_k, B_k, D_k и E_k были использованы для расчета поля скоростей и коэффициента сопротивления вращающегося канала. На фигуре приведены результаты расчета коэффициента сопротивления канала λ_ω/λ_0 как функции параметра $\sqrt{R/2}$ для различных отношений l/h. При фиксированном R коэффициент сопротивления канала возрастает с увеличением его удлинения в направлении, перпендикулярном оси вращения. При фиксированном l/h и малых значениях R отношение λ_ω/λ_0 пропорционально R, при $R > 300$ зависимость λ_ω/λ_0 от $\sqrt{R/2}$ практически линейна. Последнее говорит о том, что при больших R основной вклад в сопротивление канала вносят слои Экмана, образующиеся на стенках канала, перпендикулярных оси вращения.



Отсутствие экспериментальных данных не позволяет непосредственно сравнить полученные результаты с опытом. Сопоставление же теоретических значений коэффициента сопротивления с соответствующими значениями λ_ω, полученными путем экстраполяции экспериментальной зависимости $\lambda_\omega = \lambda_\omega(\mathrm{Ro})$ при $R = \mathrm{const}$ в область малых значений числа Россби, показывает хорошую согласованность в случае канала с квадратным поперечным сечением для всех значений R.

Поступила 17 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гринспен Х.** Теория вращающихся жидкостей. М., Гидрометеоиздат, 1975.
2. **Овчинников О. Н., Смирнов Е. М.** Динамика потока и теплообмен во вращающемся щелеобразном канале.— ИФЖ, 1978, т. 35, № 1.
3. **Никольская С. Б.** Ламинарное движение жидкости во вращающихся каналах.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 6.