

О НЕКОТОРЫХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ
СТАЦИОНАРНОГО МОНОЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ПУЧКА
ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

В. А. Сыровой

(Москва)

Рассмотрен класс инвариантных решений, которые могут описывать только вихревые потоки ($\text{rot } \mathbf{P} \neq 0$, \mathbf{P} — обобщенный импульс). Показано, что среди них имеются решения, соответствующие течениям с плоского или цилиндрического эмиттера при линейном падении напряжения на нем (непосредственный накал) в режиме ограничения температурой¹. Для эмиссии с плоскости в однородном магнитном поле, перпендикулярном к плоскости течения, решение получено в аналитической форме. Оно же (при $\beta = 0$) определяет плоский магнетрон в T -режиме. Решение задачи для цилиндрического эмиттера сводится к рассмотрению уравнений, описывающих цилиндрический диод или магнетрон в T -режиме, причем форма коллектора задается кривой распределения потенциала для этих случаев. Результаты могут быть распространены на релятивистский пучок, если на его относительные размеры наложены ограничения, позволяющие пренебречь собственным магнитным полем. Исследованы потоки бриллюэновского типа, в том числе и безвихревые, в которых частицы движутся, не пересекая эквипотенциальных поверхностей, по пространственным спиральям, расположенным на поверхности конусов. Дано аналитическое решение для релятивистского бриллюэновского течения в коническом диоде при строгом учете собственного магнитного поля.

§ 1. Ниже будут исследованы решения уравнений стационарного моноэнергетического пучка заряженных частиц с одним и тем же значением и знаком удельного заряда η в нерелятивистском случае [1, 2], вид которых приведен в табл. 1.

Таблица 1

	ξ	\mathbf{v}	φ	ρ	\mathbf{H}
1°	x	\mathbf{J}_v	$\alpha y + J_4$	J_5	\mathbf{J}_H
2°	R	\mathbf{J}_v	$\alpha \psi + \beta z + J_4$	J_5	\mathbf{J}_H
3°	ψ	\mathbf{J}_v	$\alpha \ln R + J_4$	$R^{-2} J_5$	$R^{-1} \mathbf{J}_H$
4°	q_1	\mathbf{J}_v	$\alpha q_2 + J_4$	$e^{2b_2 q_2} J_5$	$e^{-b_2 q_2} \mathbf{J}_H$
5°	θ	\mathbf{J}_v	$\alpha \ln r + \beta \psi + J_4$	$r^{-2} J_5$	$r^{-1} \mathbf{J}_H$

Здесь \mathbf{V} — вектор скорости частицы, φ — скалярный потенциал, ρ — плотность пространственного заряда, \mathbf{H} — вектор напряженности внешнего магнитного поля, $\mathbf{J}_v = \{J_1, J_2, J_3\}$, $J_4, J_5, \mathbf{J}_H = \{J_6, J_7, J_8\}$ — функции от ξ . α, β — произвольные постоянные, не обращающиеся одновременно в нуль; x, y, z — декартовы координаты, R, ψ, z — цилиндрические координаты, q_1, q_2, z — спиральные цилиндрические координаты, r, θ, ψ — сферические координаты. Спиральные координаты q_1, q_2 свя-

¹ В дальнейшем для краткости эмиссию, ограниченную температурой, будем определять термином «эмиссия в T -режиме».

заны с обычными полярными координатами R, ψ соотношениями

$$q_1 = \frac{b_1}{b_1^2 + b_2^2} \left(\ln R - \frac{b_2}{b_1} \psi \right), \quad q_2 = \frac{b_2}{b_1^2 + b_2^2} \left(\ln R + \frac{b_1}{b_2} \psi \right)$$

$$(b_1, b_2 = \text{const})$$

Следуя [3], будем называть течение регулярным, если обобщенный импульс \mathbf{P} частицы является потенциальным вектором. В этом случае имеет место интеграл энергии для потока в целом

$$V^2 + 2\eta\phi = \text{const} \quad (1.1)$$

Решения, рассмотренные в [1, 2], могут соответствовать как регулярным, так и нерегулярным течениям. Решения, приведенные в табл. 1, в принципе не могут описывать регулярные пучки, так как вид вектора скорости и скалярного потенциала исключает существование интеграла энергии в форме (1.1).

Таблица 2

	H_{x^1}	H_{x^2}	H_{x^3}
1°	H_{01}	H_{02}	H_{03}
2°	$H_{01}R^{-1}$	$H_{02}R^{-1}$	H_{03}
3°	$H_{01}R^{-1}$	$H_{02}R^{-1}$	0
4°	$H_{01}R^{-1}$	$H_{02}R^{-1}$	0
5°	$H_{01}r^{-1}$	$r^{-1}(H_{01}\text{ctg}\theta + H_{02}\text{csc}\theta)$	$H_{03}r^{-1}\text{csc}\theta$

Вместе с тем, решения табл. 1 являются инвариантными. В дальнейшем будем пользоваться безразмерными переменными, принятыми в [1, 2], везде, где специально не будет оговорено противное.

В табл. 2 приведены внешние магнитные поля, которые могут быть реализованы без специальных поддерживающих устройств в пучке (H_{x^i} — физические компоненты напряженности поля).

Здесь H_{01}, H_{02}, H_{03} — произвольные постоянные.

Заметим, что решения 2° при $\alpha \neq 0$ и 5° при $\beta \neq 0$, зависящие от ψ , имеют смысл лишь при $0 \leq \psi < 2\pi$. Видно, что решения табл. 1 могут описывать течения в некоторых диодах с эмиттером в виде: 1° — плоскости $x = \text{const}$, 2° — цилиндра $R = \text{const}$, 3° — полуплоскости $\psi = \text{const}$, 4° — спирального цилиндра $q_1 = \text{const}$, 5° — конуса $\theta = \text{const}$, причем потенциал на нем меняется по линейному или логарифмическому закону. Можно показать, что не существует решений вида 1° — 5°, у которых нормальная компонента скорости и поле на эмиттере одновременно обращаются в нуль.

Рассмотрим подробнее течения вида 1° и 2° при $\alpha = 0$. Попытка удовлетворить условиям полного пространственного заряда для них приводит к бесконечной тангенциальной плотности тока на эмиттере. Ниже показано, что эти решения могут описывать эмиссию, ограниченную температурой, в некоторых диодах с прямым накалом.

Система уравнений, определяющая решение 1° при $\mathbf{H} = 0$, имеет вид

$$uu' = J_4', \quad \rho u = j, \quad J_4'' = \rho, \quad uv' = \alpha \quad (j = \text{const}) \quad (1.2)$$

Здесь u, v, w — компоненты скорости в декартовых координатах. Первые три уравнения описывают течение в плоском диоде, последнее задает y -компоненту скорости. Заметим, что движение в y -направлении будет равномерно-ускоренным. При эмиссии, ограниченной температурой

$$J_4 \sim x, \quad u \sim x^{1/2}, \quad \rho \sim x^{-1/2}$$

следовательно, $v \sim x^{1/2}$, и плотность тока везде конечна. Эквипотенциальные поверхности $\phi = \text{const}$ полностью задаются распределением потенциала в соответствующем одномерном течении

$$\alpha y = -J_4(x) + \text{const}$$

Таким образом, для нахождения исследуемого решения достаточно знать величины, описывающие плоский диод в T -режиме [4]. Решение

этой задачи может быть дано в параметрической форме (фиг. 1)

$$\xi = \frac{1}{2\sqrt{2}}t^3 + \frac{\nu}{2}t^2, \quad \zeta = \frac{1}{2}t^2, \quad \frac{u}{j} = \frac{\sqrt{2J_4}}{j} = \frac{1}{2}t^2 + \frac{\nu\sqrt{2}}{3}t$$

$$\left(\xi = \frac{3x}{j\sqrt{2}}, \zeta = \frac{y-y_0}{\alpha}, \nu = \frac{3\varepsilon_0}{j\sqrt{2}} \right) \quad (1.3)$$

Исключая t из выражений для ξ и ζ , получим уравнение траектории

$$\xi = \zeta^{3/2} + \nu\zeta \quad (1.4)$$

Кривые J_4/j^2 , задающие форму коллектора, как функции от ξ при разных ν , представлены на фиг. 2. Частицы оставляют эмиттер $x = 0$ под углом $\vartheta_0 = \arctg(\varepsilon_0/\alpha)$, где $\varepsilon_0 = J_4'(0)$.

Рассмотрим три случая движения частиц в однородном магнитном поле \mathbf{H} . Введем безразмерные переменные $r^\circ, V^\circ, \varphi^\circ, \rho^\circ$ по формулам

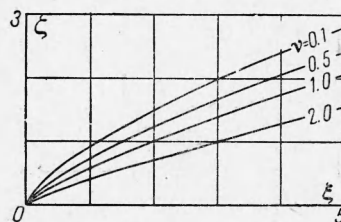
$$r = ar^\circ, \quad V = \sqrt{a\eta\varepsilon_0}V^\circ, \quad \varphi = -a\varepsilon_0\varphi^\circ, \quad \rho = (j/\sqrt{a\eta\varepsilon_0})\rho^\circ$$

Пусть сначала магнитное поле направлено по оси z . Тогда, опуская символ безразмерной величины, имеем

$$x'' = J_4' + \omega y', \quad y'' = \beta - \omega x', \quad \rho x' = 1$$

$$J_4'' = \gamma \rho \quad (1.5)$$

$$\left(\omega = \frac{H}{c} \left(\frac{a\eta}{\varepsilon_0} \right)^{1/2}, \beta = \frac{\alpha}{a\varepsilon_0}, \gamma = \frac{4\pi a j}{\varepsilon_0 \sqrt{a\eta\varepsilon_0}} \right)$$



Фиг. 1

Точкой и штрихом здесь обозначено дифференцирование по t и x . Решение (1.5) удается выписать в параметрической форме. Выбирая время t в качестве параметра [5], легко получаем

$$X = \omega^2 x = 1 - \cos \tau + \mu (\tau - \sin \tau) \quad (1.6)$$

$$Y = \omega^2 (y - y_0) = -\tau + \sin \tau + \mu (1 - \cos \tau) - \lambda \tau^2$$

$$\Phi = \omega^2 J_4 = 1 - \cos \tau + \mu (\tau - \sin \tau) + \lambda \{ 2 (\sin \tau - \tau \cos \tau) + \mu [2 (1 - \cos \tau - \tau \sin \tau) + \tau^2] \}$$

$$(\mu = 2\lambda + \beta, \lambda = \gamma/2\omega, \tau = \omega t)$$

На фиг. 3 в координатах X, Y представлены траектории при различных μ, λ , на фиг. 4 — кривые $\Phi = \Phi(X; \mu, \lambda)$. Если $\beta = 0$, то (1.6) определяют плоский магнетрон при эмиссии, ограниченной температурой; траектории и кривые $\Phi = \Phi(X; \lambda)$ изображены на фиг. 5, 6.

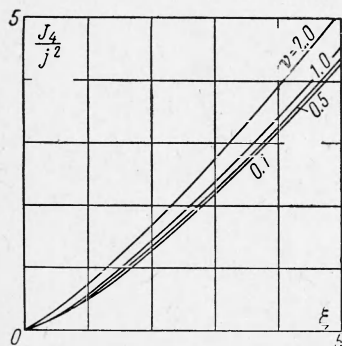
В случае, когда магнитное поле направлено по оси y , приходим к уравнениям

$$u u' = J_4' - \omega w, \quad w' = \omega, \quad \rho u = 1$$

$$J_4'' = \gamma \rho, \quad y'' = \beta \quad (1.7)$$

Первые четыре из них определяют плоский магнетрон.

Траектория частицы, движущейся в нем при эмиссии в T -режиме, будет развертываться в пространстве вследствие наложения равномерно-ускоренного движения $y = 1/2 \beta t^2$.



Фиг. 2

Если, наконец, приравнять нулю H_y и H_z , то в результате получим суперпозицию независимых движений в x -направлении (по тому же закону, что и в плоском диоде)

$$x'' = J_4', \quad \rho x' = 1, \quad J_4'' = \gamma \rho$$

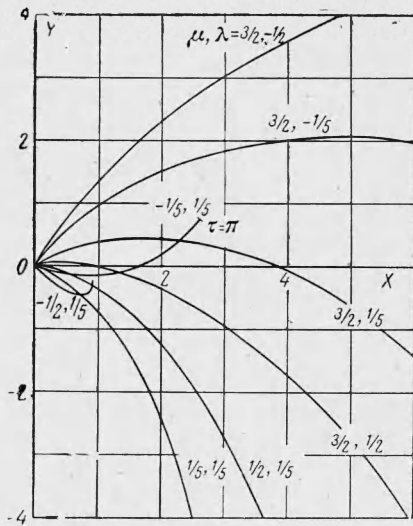
и в плоскости yz (движение в однородных электрическом и магнитном полях)

$$y'' = \beta + \omega z', \quad z'' = -\omega y' \quad (1.8)$$

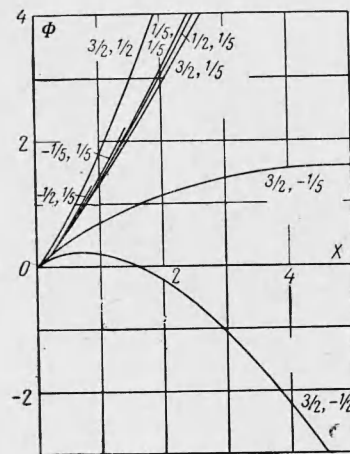
Решением (1.8) при $v(0) = w(0) = 0$ будут циклоиды

$$Y = \frac{\omega^2}{\beta} (y - y_0) = 1 - \cos \tau, \quad Z = \frac{\omega^2}{\beta} (z - z_0) = \tau - \sin \tau \quad (1.9)$$

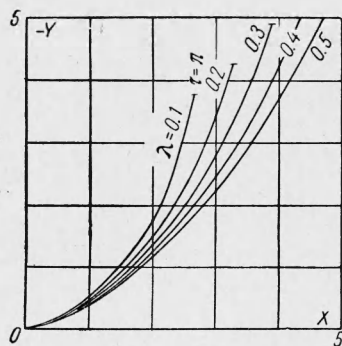
Развертка кривых (1.9) в пространстве осуществляется по закону $x = x(\tau)$ плоского диода. Приравнивая потенциал ϕ постоянной, полу-



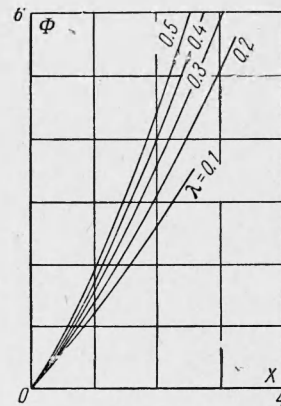
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

чаем цилиндрические поверхности с образующими, параллельными оси z , причем их форма задается распределением потенциала в плоском диоде $\phi = \phi(x; \gamma)$.

Система уравнений, определяющая электростатическое решение 2° при $\alpha = 0$, имеет вид

$$v_R v_R' = J_4', \quad R \rho v_R = j, \quad R^{-1} (R J_4')' = \rho, \quad v_R v_z' = \beta \quad (1.10)$$

Первые три уравнения описывают течение в цилиндрическом диоде, последнее задает z -компоненту скорости. Следовательно, решение для эмиссии в T -режиме с непосредственно накаливаемого цилиндра $R = \text{const}$ полностью определяется параметрами, характеризующими соответствующее течение в цилиндрическом диоде [6]. Так, например, коллектор получается вращением кривой $\varphi(R)$ вокруг оси z (фиг. 7)¹. Частицы движутся в плоскостях $\psi = \text{const}$, проходящих через ось эмиттера.

Система уравнений пучка в однородном магнитном поле, направленном по оси z , такова:

$$\begin{aligned} v_R v_R' - R^{-1} v_\psi^2 &= J_4' + H v_\psi \\ v_\psi' + R^{-1} v_\psi &= -H, \quad R \rho v_R = j \\ R^{-1} (R J_4')' &= \rho, \quad v_R v_z' = \beta \end{aligned} \quad (1.11)$$

Видно, что решение задачи может быть дано, если известно решение для цилиндрического магнетрона в T -режиме.

Рассмотрим течение типа 5°, считая, что $v_\theta = 0$ в магнитном поле, определяемом последней строкой табл. 2

$$\begin{aligned} v_\psi^2 - H_{03} \csc \theta v_\psi + \alpha &= 0 \\ v_r (v_\psi - H_{01} \cot \theta - H_{02} \csc \theta) &= \beta \csc \theta \\ J_4' &= -\cot \theta v_\psi^2 - H_{01} v_\psi + H_{03} \csc \theta v_r \\ J_5 &= \alpha + \csc \theta (\sin \theta J_4')' \end{aligned} \quad (1.12)$$

При выполнении неравенства $H_{03}^2 \geq 4\alpha$ существуют два различных решения, причем все определяющие их величины могут быть получены из (1.12) при помощи алгебраических операций и дифференцирования, и лишь потенциал вычисляется взятием квадратуры. При $\beta \neq 0$ это решение имеет смысл для $0 \leq \psi < 2\pi$. Частицы движутся по пространственным спиральям, которые получаются от пересечения эквипотенциальных поверхностей и конусов. На фиг. 8 дано схематическое изображение верхней половины эквипотенциальной поверхности $\varphi = \text{const}$. Горизонтальную плоскость $\theta = 1/2\pi$ поверхности $\varphi = \text{const}$ пересекают по спиральям, определяемым уравнением

$$S(r, 1/2\pi, \psi) = \alpha \ln r + \beta \psi + J_4(1/2\pi) = \text{const}$$

В полуплоскости $\psi = \psi_0$ след эквипотенциальной поверхности задается уравнением

$$\Phi(r, \theta, \psi_0) = \alpha \ln r + J_4(\theta) + \beta \psi_0 = \text{const}$$

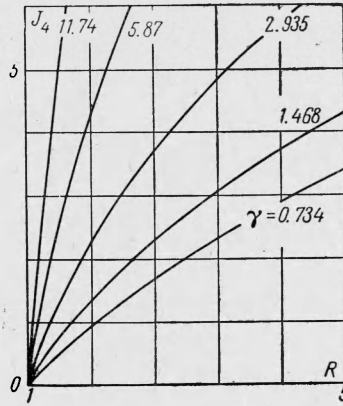
При $v_r = 0$ $\beta = 0$ траекториями будут окружности, расположенные на эквипотенциальных поверхностях (поверхности вращения)

$$\Phi(r, \theta) = \text{const}$$

Заметим, что рассмотренные решения определяют течения бриллюэновского типа, так как частицы движутся, не пересекая эквипотенциальных поверхностей; они входят в класс обобщенных бриллюэновских течений, введенный в [7,8] и характеризующийся сохранением обобщенного импульса вдоль траектории.

Решения, приведенные в табл. 1. могут также определять течения с релятивистскими скоростями. Так как вблизи эмиттера всегда существует нерелятивистская область,

¹ На фиг. 7 $\gamma = (9/4 \sqrt{2|\eta|} |R_0| |j|)^{-2/3} J_4'(\bar{R}_0)$, где R_0 — радиус эмиттера.



Фиг. 7

то все сказанное выше об условиях на нем остается в силе. Решения 1° и 2° при $\alpha = 0$ в этом случае описывают течения с плоскости $x = \text{const}$ и цилиндра $R = \text{const}$ при линейном падении напряжения на эмиттирующей поверхности и при эмиссии в T -режиме во внешнем магнитном поле или без него. Однако построение каждого из этих решений представляет самостоятельную проблему и не сводится к соответствующей одномерной задаче. При этом, разумеется, предполагается, что на относительные размеры пучка наложены определенные ограничения [9,10], так что собственным магнитным полем можно пренебречь.

§ 2. Рассмотрим течение вида 5° при $\alpha = \beta = 0$, предполагая, что $v_\theta = 0$ и скорости нерелятивистские, во внешнем магнитном поле, определяемом последней строкой табл. 2. Оно описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \varphi' &= H_{03} \csc \theta v_r - H_{01} v_\psi - \text{ctg} \theta v_\psi^2, \quad v_\psi = J_7 = H_{01} \text{ctg} \theta + H_{02} \csc \theta \\ J_5 &= \varphi'' + \text{ctg} \theta \varphi' \end{aligned} \quad (2.1)$$

Видно, что система (2.1) оказывается недоопределенной, что позволяет в качестве v_r взять произвольную функцию от θ . При $H_{03} = 0$ потенциал не зависит от v_r . Формулы (2.1) задают, вообще говоря, нерегулярный поток. Требуя, чтобы имел место интеграл энергии в форме (1.1), приходим к уравнению для v_r

$$v_r v_r' - H_{03} \csc \theta v_r + v_\psi v_\psi' + \text{ctg} \theta v_\psi^2 + H_{01} v_\psi = 0$$

решая которое, получаем

$$v_r = H_{03} \ln \text{tg}^{1/2} \theta + v_{r0} \quad (2.2)$$

Траекториями частиц для (2.1) будут пространственные спирали, расположенные на конусах $\theta = \text{const}$ (фиг. 9).

При $v_r = 0$ траектории вырождаются в окружности. Из (2.1) видно, что $v_\psi = 0$ при $\theta = \theta_0$, если $\cos \theta_0 = -H_{02} / H_{01}$, $|H_{02} / H_{01}| \leq 1$. Выбором v_{r0} в (2.2) можно добиться равенства $v_r = 0$ на $\theta = \theta_0$. При этом на конусе $\theta = \theta_0$ поле также будет равно нулю.

При $v_\psi = 0$ радиальная скорость регулярного потока задается формулой (2.2). Если положить $v_{r0} = -H_{03} \ln \text{tg}^{1/2} \theta_0$, то на конусе

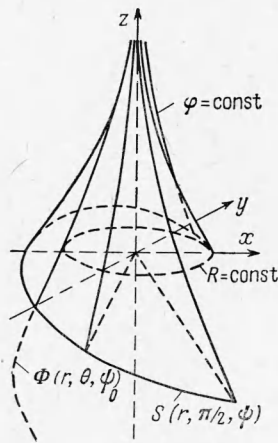
$\theta = \theta_0$ будут выполнены условия полного пространственного заряда¹.

Исследуем теперь бриллюэновское течение в r -направлении в коническом диоде в случае релятивистских скоростей при строгом учете собственного магнитного поля. Система (S/H) для него оказывается недоопределенной

$$\begin{aligned} \varphi' &= v_r J_8, \quad \csc \theta (\sin \theta \varphi')' = J_5, \quad \csc \theta (\sin \theta J_8)' = v_r J_5 \\ v_\theta &= v_\psi = J_6 = J_7 = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Поэтому в качестве радиальной скорости можно выбрать любую функцию, удовлетворяющую неравенству $|v_r| < 1$ (скорости отнесены к скорости

¹ В работе [11] рассмотрена задача о компенсации сил пространственного заряда конического пучка магнитным полем при $H_{01} = -H_{02}$, $H_{03} = 0$. Предположение о независимости радиальной плотности тока от θ привело к приближенному решению, справедливому при малых углах сходимости. Формулы (2.1), (2.2) определяют точное решение, которое имеет место при любых θ в более общем случае: на H_{01} , H_{02} и H_{03} не накладывается каких-либо ограничений и $v_r \neq \text{const}$.



Фиг. 8

сти света). Тогда

$$\begin{aligned} \Phi' &= \frac{a}{\sin \theta} \frac{v_r}{\sqrt{1-v_r^2}}, & J_5 &= \frac{a}{\sin \theta} \left(\frac{v_r}{\sqrt{1-v_r^2}} \right)', \\ J_8 &= \frac{a}{\sin \theta} \frac{1}{\sqrt{1-v_r^2}} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Формулы (2.4) при произвольном v_r описывают вихревое течение. Требуя, чтобы имел место релятивистский эквивалент (1.1), приходим к следующим выражениям для регулярного потока:

$$\begin{aligned} v_r &= \pm \frac{1 - b^2 (\operatorname{tg}^{1/2} \theta)^{2a}}{1 + b^2 (\operatorname{tg}^{1/2} \theta)^{2a}}, & \Phi &= \frac{1 + b^2 (\operatorname{tg}^{1/2} \theta)^{2a}}{2b (\operatorname{tg}^{1/2} \theta)^a} \\ J_8 &= \mp \frac{a}{\sin \theta} \Phi \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь a, b — произвольные постоянные.

При $a = b = 1$ формулы (2.5) приобретают особенно простой вид

$$\begin{aligned} v_r &= \pm \cos \theta, & v_\theta &= v_\psi = 0, & \Phi &= \csc \theta, & \rho &= r^{-2} \csc^3 \theta \\ H_r &= H_\theta = 0, & H_\psi &= + r^{-1} \csc^2 \theta \end{aligned} \quad (2.6)$$

Для каждой пары значений a, b существует конус $\theta = \theta_0$ с потенциалом $\Phi = 1$, на котором выполнены условия полного пространственного заряда, а скорость нулевая

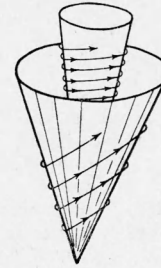
$$\operatorname{tg}^{1/2} \theta_0 = \left(\frac{1}{b} \right)^{1/a}$$

Для (2.6) имеем $\theta_0 = 1/2 \pi$. Заметим в заключение, что течение в ψ -направлении может быть только регулярным.

Поступила 3 IV 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Сыровой В. А. Инвариантно-групповые решения уравнений плоского стационарного пучка заряженных частиц. ПМТФ, 1962, № 4.
2. Сыровой В. А. Инвариантно-групповые решения уравнений пространственного стационарного пучка заряженных частиц. ПМТФ, 1963, № 3.
3. Gabor D. Dynamics of Electron Beams. Proc. IRE, 1945, vol. 33, No. 11.
4. Ivey H. F. Cathode Field in Diodes under Partial Space-Charge Conditions. Phys. Rev., 1949, vol. 16, No. 4.
5. Брауде С. Я. Движение электрона в электрическом и магнитном поле с учетом пространственного заряда. Ж. эксперим. и теор. физ., 1935, т. 5, № 7.
6. Crank J., Hartree D. R., Ingham J., Sloane R. W. Distribution of Potential in Cylindrical Thermionic Valves. Proc. Phys. Soc. A, 1939, vol. 51, No. 288.
7. Данилов В. Н. Обобщенный бриллюэновский режим электронных потоков. Радиотехн. и электрон., 1963, т. 8, № 11.
8. Данилов В. Н. О бриллюэновском состоянии двумерного электронного потока. Радиотехн. и электрон., 1963, т. 8, № 12.
9. Meltzer V. Magnetic Constriction in Simple Diodes. Nature, 1958, vol. 181, No. 4619.
10. Meltzer V. Magnetic Forces and Relativistic Speeds in Stationary Electron Beams. J. Electr. Contr., 1958, vol. 4, No. 4.
11. Hines M. E. Nullification of Space-Charge Effects in a Converging Electron Beam by a Magnetic Field. Proc. IRE, 1952, vol. 40, No. 1.



Фиг. 9