

16. Переквальский В. С., Салов А. Н., Ставер Г. В. Экспериментальное исследование взаимодействия газовых полостей от взрыва сферических и удлиненных зарядов под водой. — ФГВ, 1975, № 2, с. 304—311.
17. Петриченко В. Н., Вовченко А. И., Бурцев В. А. Приставка к сверхскоростной камере СФР-2М для исследования процессов длительностью до сотен миллисекунд. — «Журн. науч. и приклад. фотографии и кинематографии», 1975, № 6, с. 440—441.
18. Сычинский В. В., Бенцелев С. Д. Предупреждение оборудования окалина. М., «Машиностроение», 1964.

УДК 532.529 : 534.2.532

РАСПРОСТРАНЕНИЕ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ

В. Ш. Шагапов

(Уфа)

Задача о распространении малых возмущений в жидкости с пузырьками в той или иной постановке исследована в работах [1—7], а для газа с частицами в [8].

1. Линеаризованная система уравнений. Рассмотрим распространение малых возмущений в жидкости с пузырьками газа при следующих допущениях. Длина звуковой волны намного больше среднего расстояния между пузырьками, которое гораздо больше размеров пузырьков (т. е. объемное содержание газовой фазы α достаточно мало, $\alpha < 0,1$). Смесь полидисперсная, т. е. в каждом элементарном объеме имеются пузырьки $m-1$ сортов, причем во всех пузырьках один и тот же газ. Пренебрегается капиллярными эффектами (пузырьки не очень мелкие). Вязкость и теплопроводность существенны лишь в процессах взаимодействия между пузырьками и жидкой фазой и при радиальных пульсациях.

Используем линеаризованную систему уравнений [9], обобщенную для полидисперсного случая. Уравнения сохранения массы, количества пузырьков, импульса, энергии и пульсационного движения имеют следующий вид:

$$(1.1) \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_{10} \operatorname{div} v_1 = - \sum_{i=2}^m I_i, \quad \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \rho_{i0} \operatorname{div} v_i = I_i, \quad \frac{\partial n_i}{\partial t} + n_{i0} \operatorname{div} v_i = 0,$$

$$\rho_{10} \frac{\partial v_1}{\partial t} = - \alpha_{10} \nabla p_1 - \sum_{i=2}^m f_i, \quad \rho_{i0} \frac{\partial v_i}{\partial t} = - \alpha_{i0} \nabla p_1 + f_i,$$

$$\rho_{10} \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\alpha_{10} p_0}{\rho_{10}^0} \frac{\partial \rho_1^0}{\partial t} - \sum_{i=2}^m q_i^0, \quad \rho_{i0} \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\alpha_{i0} p_0}{\rho_{i0}^0} \frac{\partial \rho_i^0}{\partial t} - q_{0i}, \quad q_i^0 + q_{0i} = I_i,$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \delta_i}{\partial t} = w_i + \frac{I_i}{\pi \delta_{i0}^2 n_{i0} \rho_{i0}^0}, \quad \frac{\delta_{i0}}{2} \frac{\partial w_i}{\partial t} = \frac{p_i - p_1}{\rho_{i0}^0} - \frac{v_1}{\delta_{i0}} w_i,$$

где ρ , ρ^0 , v , p , n , u , w , δ — соответственно возмущения средней плотности, истинной плотности, скорости, давления, числа пузырей в единице объема, внутренней энергии, массовой радиальной скорости жидкости на по-

верхности раздела фаз, диаметра пузырьков; α_i — объемная концентрация фаз; l — удельная теплота парообразования; ν_1 — кинематическая вязкость жидкости.

Система уравнений (1.1) будет замкнутой, если зададим выражения для силового взаимодействия f_i , теплообмена q_i^0, q_{0i} , массообмена I_i и уравнения состояния фаз и некоторые кинематические зависимости.

Для силового взаимодействия и для теплообмена можно принять следующие соотношения:

$$f_i = f_{mi} + f_{fi}, \quad f_{mi} = \frac{1}{2} \frac{\pi n_{i0} \delta_{i0}}{6} \rho_{i0}^0 \frac{\partial}{\partial t} (v_1 - v_i), \quad f_{fi} = \chi n_{i0} \delta_{i0} \nu_1 \rho_{i0}^0 (v_1 - v_i);$$

$$q_i^0 = \pi n_{i0} \delta_{i0} \text{Nu}_i^0 (T_1 - T_{\sigma i}), \quad q_{0i} = \pi n_{i0} \delta_{i0} \text{Nu}_{0i} (T_i - T_{\sigma i}),$$

где $\chi = 3\pi$, если считать закон обтекания по Стоксу, и $\chi = 6\pi$ — по Левичу [10]; $\text{Nu}_i^0, \text{Nu}_{0i}$ — числа Нуссельта для теплообмена поверхностей соответственно с жидкой и газовой фазой.

Уравнение для кинетики фазовых переходов для линейной теории неравновесности может быть записано в виде

$$I_i = \pi n_{i0} \delta_{i0}^2 \beta_i (T_{\sigma i} - T_{si}) = \pi n_{i0} \delta_{i0}^2 \frac{l_0}{T_0} F_i \frac{(T_{\sigma i} - T_{\rho i})}{T_0}, \quad \left(F_i = \frac{\beta_i T_0^2}{l_0} \right)$$

(β_i — коэффициент массоотдачи). Если допустить, что $T_{\sigma i} = T_{si}$, т. е. температура на поверхности пузырьков равна температуре насыщения при давлении, равном давлению внутри пузырьков (квазиравновесная или «равновесная» модель [11]), то интенсивность фазовых переходов определяется автоматически из уравнения энергии поверхностной фазы.

В качестве уравнений состояния двухфазной однокомпонентной системы будем использовать соотношения

$$p_1 = p_0 + a_1^2 (\rho_1^0 - \rho_{i0}^0), \quad u_1 = c_1 (T_1 - T_0) - \int_{p_0}^{p_1} p_1 d(1/\rho_1^0),$$

$$(1.2) \quad p_i = \rho_i^0 R_2 T_i, \quad u_i = c_1 (T_{si} - T_0) - \int_{p_0}^{p_i} p_1 d(1/\rho_1^0) + l_i + c_{p2} (T_i - T_{si}) +$$

$$+ p_i (1/\rho_1^0 - 1/\rho_i^0),$$

$$l_i = l(p_i), \quad T_{si} = T_s(p_i) \quad (c_{p2} = c_2, \quad c_1 = \text{const}).$$

В случае отсутствия фазовых переходов уравнения состояния имеют вид

$$p_1 = p_0 + a_1^2 (\rho_1^0 - \rho_{i0}^0), \quad u_1 = c_1 (T_1 - T_0) - \int_{p_0}^{p_1} p_1 d(1/\rho_1^0),$$

$$(1.3) \quad p_i = \rho_i^0 R_2 T_i, \quad u_i = c_2 T_i \quad (c_1, c_2 = \text{const}), \quad (i = 2, 3, \dots, m).$$

Добавим еще кинематические зависимости

$$\alpha_i = \rho_i / \rho_i^0, \quad \alpha_i = \frac{\pi}{6} n_i \delta_i^3, \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1.$$

Введем безразмерные переменные

$$P_i = \frac{p_i}{p_0}, \quad U_i = \frac{v_i}{a_*}, \quad \Theta_i = \frac{T_i}{T_0}, \quad \Theta_{si} = \frac{T_{si}}{T_0}, \quad \Theta_{\sigma i} = \frac{T_{\sigma i}}{T_0} \quad (a_*^2 = p_0 / \rho_{i0}^0),$$

$$(1.4) \quad \Phi_i = \frac{\rho_i}{\rho_{i0}^0}, \quad \Phi_i^0 = \frac{\rho_i^0}{\rho_{i0}^0}, \quad W_i = \frac{w_i}{a_*}, \quad D_i = \frac{\delta_i}{\delta_{i0}}, \quad N_i = \frac{n_i}{n_{i0}}$$

и параметры

$$C_1 = \frac{c_1}{R_2}, \quad C_2 = \frac{c_2}{R_2}, \quad L = \frac{l}{R_2 T_0},$$

а также приведенные переменные

$$(1.5) \quad \begin{aligned} f_{mi}^* &= \frac{f_{mi}}{\rho_{i0} a_*^2}, & f_{fi}^* &= \frac{f_{fi}}{\rho_{i0} a_*^2}, & N_{ri}^* &= \frac{8\nu_1 w_i}{\delta_{i0}^2 a_*^2}, \\ q_i^{0*} &= \frac{q_i^0}{\rho_{i0} a_* R_2 T_0}, & q_{0i}^* &= \frac{q_{0i}}{\rho_{i0} a_* R_2 T_0}, & I_i^* &= \frac{l_i}{\rho_{i0} a_*}, & \tau &= a_* t. \end{aligned}$$

Система уравнений (1.1) с учетом (1.4), (1.5) в безразмерных переменных будет иметь следующий вид:

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau} + \frac{\partial U_1}{\partial x} &= - \sum_{i=2}^m M_i I_i^*, & \frac{\partial \Phi_i}{\partial \tau} + \frac{\partial U_i}{\partial x} &= I_i^*, & \frac{\partial N_i}{\partial \tau} + \frac{\partial U_i}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial U_1}{\partial \tau} &= \frac{\partial P_1}{\partial x} - \sum_{i=2}^m M_i (f_{mi}^* + f_{fi}^*), & \frac{\partial U_i}{\partial \tau} &= \frac{1}{r} \frac{\partial P_i}{\partial x} + f_{mi}^* + f_{fi}^*, \\ C_1 \frac{\partial \Theta_1}{\partial \tau} &= - \sum_{i=2}^m M_i q_i^{0*}, & C_2 \frac{\partial \Theta_i}{\partial \tau} + B \frac{\partial P_i}{\partial \tau} &= -q_{0i}^*, & q_i^{0*} + q_{0i}^* &= L I_i^*, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{W}_i}{\partial \tau} &= \frac{P_i - P_1}{\delta_{i0}} - N_{ri}^*, & \frac{1}{2} \frac{\partial D_i}{\partial \tau} - \frac{W_i}{\delta_{i0}} + \frac{r}{6} I_i^* & & \\ (r_i = \rho_{i0}^0 / \rho_{i0}^0 = r, & M_i = \rho_{i0} / \rho_{10}, & B = \Theta_s'(C_1 - C_2) - L' + r - 1, & & \\ & A_{i0}^2 = a_1^2 / a_*^2). & & & \end{aligned}$$

Уравнения состояния и выражения (1.3) примут вид

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \alpha_i &= \alpha_{i0} (\Phi_i - \Phi_i^0), & \alpha_i &= \alpha_{i0} (N_i + 3D_i), \\ P_1 &= A_{10}^2 \Phi_1^0, & P_i &= \Phi_i^0 + \Theta_i, & \sum_{i=1}^m \alpha_i &= 0 \quad (i = 2, 3, \dots, m). \end{aligned}$$

Для $f_{mi}^*, f_{fi}^*, q_i^{0*}, q_{0i}^*, I_i^*$, отображающих межфазные взаимодействия и для N_{ri}^* имеем выражения

$$\begin{aligned} f_{mi}^* &= \frac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \tau} (U_1 - U_i), & f_{fi}^* &= \frac{U_1 - U_i}{\tau_{vi}}, & N_{ri}^* &= \frac{W_i}{\tau_{ri}}, \\ q_i^{0*} &= \frac{\Theta_1 - \Theta_{\sigma i}}{\tau_i^0}, & q_{0i}^* &= \frac{\Theta_i - \Theta_{\sigma i}}{\tau_{0i}}, & I_i^* &= \frac{\Theta_{\sigma i} - \Theta_{si}}{\tau_{mi}}, \\ \tau_{vi} &= \frac{\pi r \delta_{i0}^2 a_*}{6 \chi \nu_1}, & \tau_{ri} &= \frac{\delta_{i0}^2 a_*}{8 \nu_1}, & \tau_i^0 &= \frac{\rho_{i0}^0 R_2 \delta_{i0}^2 a_*}{6 \lambda_1 \text{Nu}_i^0}, \\ \tau_{0i} &= \frac{\rho_{i0}^0 R_2 \delta_{i0}^2 a_*}{6 \lambda_2 \text{Nu}_0^0}, & \tau_{mi} &= \frac{\rho_{i0}^0 T_0 \delta_{i0}^2 a_*}{6 F l_0} \quad (i = 2, 3, \dots, m), \end{aligned}$$

$\tau_{vi}, \tau_{ri}, \tau_i^0, \tau_{0i}, \tau_{mi}$ — приведенные времена релаксации. Отметим, что уравнения (1.6) записаны для возмущений. Приведем эту систему к более удоб-

ному виду. Из уравнений сохранения массы и числа пузырьков, используя выражения (1.7), получим

$$(1.8) \quad \frac{\alpha_{i0}}{A_{i0}^2} \frac{\partial P_i}{\partial \tau} + \sum_{i=2}^m \alpha_{i0} \left(r \frac{\partial \Phi_i^0}{\partial \tau} + 3(r-1) \frac{\partial D_i}{\partial \tau} \right) + \sum_{i=1}^m \alpha_{i0} \frac{\partial U_i}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi_i^0}{\partial \tau} + 3 \frac{\partial D_i}{\partial \tau} = I_i^*.$$

Вместо уравнения импульса для первой фазы используем уравнение количества движения для всей смеси

$$\alpha_{i0} \frac{\partial U_1}{\partial \tau} + \sum_{i=2}^m r \alpha_{i0} \frac{\partial U_i}{\partial \tau} + \frac{\partial P_1}{\partial x} = 0.$$

Второе уравнение для пульсационного движения, используя (1.8), запишем в виде

$$\frac{W_i}{\delta_{i0}} = -\frac{1}{6} \left(r \frac{\partial \Phi_i^0}{\partial \tau} + 3(r-1) \frac{\partial D_i}{\partial \tau} \right).$$

2. Распространение гармонических колебаний. Рассмотрим распространение плоских периодических волн. Решение будем искать в виде затухающей бегущей волны

$$\Phi_i, \Phi_i^0, P_i, U_i, \Theta_i \sim \exp [i(Kx - \omega t)] = e^{-dx} \exp [i(kx - \omega t)],$$

$$K = k + id, \quad a_p = A_p a_* = \omega/k,$$

где K — волновой вектор (комплексное число d , a_p — соответственно коэффициент (декремент) затухания и фазовая скорость волны, определяемые мнимой и действительной частью волнового вектора). В дальнейшем вместо частоты ω используем безразмерную $\eta = \omega \delta_0 / a_*$, где δ_0 — некоторый осредненный диаметр. Условием существования нетривиального решения такого типа после подстановки в систему (1.6), (1.7) является равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов при амплитудах возмущений. Это условие дает связь между частотой возмущений и волновым вектором. Получение определителя прямым способом в полидисперсном случае затруднительно, поэтому нужную связь найдем постепенно, исключая амплитуды возмущений.

Из четвертого уравнения (1.7)

$$(2.1) \quad U_i = \frac{\Pi_{v2i} U_1 + i \delta_0 K P_1}{\Pi_{v1i}},$$

здесь

$$\Pi_{v1i} = \frac{r \delta_0}{\tau_{vi}} - i \eta (r + 1/2), \quad \Pi_{v2i} = \frac{r \delta_0}{\tau_{vi}} - i \eta / 2.$$

Подставляя (2.1) в третье уравнение (1.6), находим

$$(2.2) \quad U_1 = \frac{\delta_0 K}{\eta} \pi_v P_1, \quad \pi_v = \left(1 + \sum_{i=2}^m \eta \frac{r \alpha_{i0}}{\Pi_{v1i}} \right) \left(\alpha_{i0} + \sum_{i=2}^m \frac{r \alpha_{i0} \Pi_{v2i}}{\Pi_{v1i}} \right)^{-1}.$$

Отсюда

$$(2.3) \quad U_i = \frac{\delta_0 K}{\eta} \frac{\pi_v \Pi_{v2i} + i \eta}{\Pi_{v1i}} P_1.$$

Из оставшихся уравнений системы (1.6) выразим $z_i = r\Phi_i^0 + 3(r-1)D_i$ через P_1 . Из уравнений для пульсационного движения

$$(2.4) \quad \Pi_{ri} z_i = P_1 - P_i,$$

здесь

$$\Pi_{ri} = \frac{1}{6} i\eta \frac{\delta_{i0}}{\delta_0} \left(i\eta \frac{\delta_{i0}}{2\delta_0} - \frac{\delta_{i0}}{\tau_{ri}} \right).$$

Учитывая (2.4) и уравнение состояния для второй фазы (1.7), из второго уравнения для пульсационного движения получим

$$(2.5) \quad \left(\frac{i\eta}{\delta_0} \frac{1}{\Pi_{ri}} - \frac{i\eta}{\delta_0} + (1-r) \frac{\Theta'_s}{\tau_{mi}} \right) P_i - \frac{i\eta}{\delta_0} \frac{1}{\Pi_{ri}} P_1 - (1-r) \frac{\Theta_{\sigma i}}{\tau_{mi}} + \frac{i\eta \Theta_i}{\sigma_0} = 0.$$

Из уравнения (2.5) с помощью уравнения для внутренней энергии пузырьков, исключая Θ_i , имеем

$$(2.6) \quad \left\{ \left(\frac{1}{\tau_{0i}} - C_2 \frac{i\eta}{\delta_0} \right) \left[(1 - \Pi_{ri}^{-1}) \frac{i\eta}{\delta_0} - (1-r) \frac{\Theta'_s}{\tau_{mi}} \right] - B \frac{i\eta}{\delta_0} \frac{i\eta}{\delta_0} \right\} P_1 + \frac{i\eta}{\delta_0} \frac{1}{\Pi_{ri}} \left(\frac{1}{\tau_{0i}} - C_2 \frac{i\eta}{\delta_0} \right) P_1 + \left[\left(\frac{1}{\tau_{0i}} - C_2 \frac{i\eta}{\delta_0} \right) \frac{(r-1)}{\tau_{mi}} - \frac{i\eta}{\delta_0} \frac{1}{\tau_{0i}} \right] \Theta_{\sigma i} = 0.$$

Исключая Θ_i из уравнений энергии для поверхностной фазы и для пузырьков, получим

$$(2.7) \quad \left[B \frac{i\eta}{\delta_0} \frac{1}{\tau_{0i}} + \left(\frac{1}{\tau_{0i}} - C_2 \frac{i\eta}{\delta_0} \right) \frac{L\Theta'_s}{\tau_{mi}} \right] P_i + \left(\frac{1}{\tau_{0i}} - C_2 \frac{i\eta}{\delta_0} \right) \frac{1}{\tau_i^0} \Theta_1 + \left[\frac{1}{\tau_{0i}^2} - \left(\frac{1}{\tau_{0i}} - C_2 \frac{i\eta}{\delta_0} \right) \left(\frac{L}{\tau_{mi}} + \frac{1}{\tau_i^0} + \frac{1}{\tau_{0i}} \right) \right] \Theta_{\sigma i} = 0.$$

Исключая P_i из (2.6), (2.7), имеем

$$\Theta_{\sigma i} = \left\{ \frac{\Pi_{T3i}}{\Pi_{ri}} P_1 + \left(1 - i\eta C_2 \frac{\tau_{0i}}{\delta_0} \right) \left[i\eta (\Pi_{ri}^{-1} - 1) \frac{\tau_{mi}}{\delta_0} - \Theta'_s (1-r) + (i\eta)^2 B \frac{\tau_{0i}}{\delta_0} \frac{\tau_{mi}}{\delta_0} \right] \Theta_1 \right\} [(1 - \Pi_{ri}^{-1}) \Pi_{T1i} + \Pi_{T2i}]^{-1},$$

где

$$\Pi_{T1i} = i\eta \frac{\tau_i^0}{\delta_0} \left[\left(L + \frac{\tau_{mi}}{\tau_i^0} + \frac{\tau_{mi}}{\tau_{0i}} \right) \left(1 - i\eta C_2 \frac{\tau_{0i}}{\delta_0} \right) - \frac{\tau_{mi}}{\tau_{0i}} \right];$$

$$\Pi_{T2i} = (r-1) \left[\Theta'_s - i\eta \left(\Theta'_s C_2 \left(1 + \frac{\tau_{0i}}{\tau_i^0} \right) \right) + B \right] \frac{\tau_i^0}{\delta_0} - i\eta \left[\Theta'_s L + i\eta B \left(L + \frac{\tau_{mi}}{\tau_{0i}} + \frac{\tau_{mi}}{\tau_i^0} \right) \frac{\tau_{0i}}{\delta_0} \right] \frac{\tau_i^0}{\delta_0};$$

$$\Pi_{T3i} = i\eta \left[\Theta'_s L \left(1 - i\eta C_2 \frac{\tau_{0i}}{\delta_0} \right) + i\eta B \frac{\tau_{mi}}{\delta_0} \right] \frac{\tau_i^0}{\delta_0}.$$

Подставляя полученное $\Theta_{\sigma i}$ в уравнение энергии для первой фазы, находим

$$(2.8) \quad \Theta_1 = \pi_T P_1,$$

здесь

$$\begin{aligned} \pi_T = & \left\{ \sum_{i=2}^m M_i \frac{\Pi_{T3i}}{\Pi_{T1i}} \left[1 + \Pi_{ri} \left(1 + \frac{\Pi_{T2i}}{\Pi_{T1i}} \right) \right]^{-1} \frac{\delta_0}{\tau_i^0} \right\}^{-1} \times \\ & \times \left\{ \sum_{i=2}^m M_i \frac{\Pi_{T5i}}{\Pi_{T1i}} \left[1 + \Pi_{ri} \left(1 + \frac{\Pi_{T6i}}{\Pi_{T5i}} \right) \right] \left[1 + \Pi_{ri} \left(1 + \frac{\Pi_{T2i}}{\Pi_{T1i}} \right) \right]^{-1} \times \right. \\ & \left. \times \frac{\delta_0}{\tau_i^0} - i\eta C_1 \right\}^{-1}; \end{aligned}$$

$$\Pi_{T5i} = i\eta \left[\left(1 - i\eta C_2 \frac{\tau_{0i}}{\delta_0} \right) \left(L + \frac{\tau_{mi}}{\tau_{0i}} \right) - \frac{\tau_{mi}}{\tau_{0i}} \right] \frac{\tau_i^0}{\delta_0};$$

$$\Pi_{T6i} = (1-r) i\eta (\Theta'_s C_2 + B) \frac{\tau_i^0}{\delta_0} - i\eta \left[\Theta'_s L + i\eta B \left(L + \frac{\tau_{mi}}{\tau_{0i}} \right) \frac{\tau_{0i}}{\delta_0} \right] \frac{\tau_i^0}{\delta_0}.$$

Исключая $\Theta_{\sigma i}$ из уравнений (2.6), (2.7) и учитывая (2.8) для z_i , получим

$$(2.9) \quad z_i = \left(1 + \frac{\pi_T \Pi_{T4i}}{\Pi_{T1i} + \Pi_{T2i}} \right) \left[\Pi_{ri} + \left(1 + \frac{\Pi_{T2i}}{\Pi_{T1i}} \right)^{-1} \right]^{-1} P_1,$$

где
$$\Pi_{T4i} = (1+r) \left(1 - i\eta C_2 \frac{\tau_{0i}}{\delta_0} \right) - i\eta \frac{\tau_{mi}}{\delta_0}.$$

Окончательно дисперсионное выражение получим после подстановки (2.2), (2.3) и (2.9) в уравнение сохранения массы для всей смеси и сокращения на P_1

$$(2.10) \quad \frac{\delta_0^2 K^2}{\eta^2} = \left(\alpha_{10} \pi_v + \sum_{i=2}^m \alpha_{i0} y_i \right)^{-1} \left(\frac{\alpha_{10}}{A_{10}^2} - \sum_{i=2}^m \alpha_{i0} z_i \right),$$

здесь

$$y_i = (\pi_v \Pi_{v2i} + i\eta) / \Pi_{v1i}.$$

В случае $m = 2$, т. е. для монодисперсного случая,

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \frac{\delta_0^2 K^2}{\eta^2} = & \left\{ 1 + \alpha_{20} (r-1) \left[1 - i\eta \left(\alpha_{10} + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{r} \frac{\tau_v}{\delta_0} \right] \times \right. \\ & \left. \times \left[1 - i\eta \left(\frac{1}{2} + \alpha_{10} (\alpha_{20} - r\alpha_{10}) \right) \frac{1}{r} \frac{\tau_v}{\delta_0} \right]^{-1} \right\} \times \\ & \times \left\{ \frac{\alpha_{10}}{A_{10}^2} + \alpha_{20} \left[\left(1 + \frac{\Pi_0 + \pi \Pi_3 - \Pi_1 \Pi_4}{\Pi_2 \Pi_4 + \Pi_3} \right)^{-1} + i\eta \frac{1}{\delta} \left(i\eta \frac{1}{2} - \frac{\delta_0}{\tau_r} \right) \right]^{-1} \right\}, \end{aligned}$$

здесь

$$\Pi_0 = \text{Re} \Pi_0 + i \text{Im} \Pi_0, \quad \text{Re} \Pi_0 = (1-r) (\Theta'_s (C_2 - C_1/M) + B),$$

$$\text{Im} \Pi_0 = (r-1) \left(\Theta'_s C_2 \left(1 + \frac{\tau_v}{\tau_0} \right) + B \right) \eta \frac{C_1}{M} \frac{\tau_0}{\delta_0}, \quad \pi = \Theta'_s L \tau_0 / \tau_m,$$

$$\Pi_1 = \Theta'_s L + i\eta B \frac{\tau_m}{\delta_0}, \quad \Pi_2 = -i\eta C_2 \frac{\tau_m}{\delta_0},$$

$$\Pi_3 = i\eta \left(L + \frac{\tau_m}{\tau_0} \right) \frac{C_1}{M} \frac{\tau_0}{\delta_0}, \quad \Pi_4 = \left(1 + L \frac{\tau_0}{\tau_m} \right) - i\eta \left(1 + \frac{\tau_0}{\tau_0} + L \frac{\tau_0}{\tau_m} \right) \frac{C_1}{M} \frac{\tau_0}{\delta_0}.$$

Уравнение (2.10) записано в самом общем виде. Из этого уравнения можно получить частные случаи. Например, $\tau_T = 0$ соответствует случаю, когда $C_1 = \infty$, т. е. несущая фаза ведет себя как термостат. Равенство $z_i = 0$ означает, что фазовые переходы, теплообмен, инерционные и диссипативные эффекты при радиальных пульсациях не приводят к дисперсии.

Для безразмерной фазовой скорости звука $A_p = \delta_0 k / \eta$ и для декремента затухания d имеем

$$A_p = \left[\frac{2}{\varphi + (\varphi^2 + \psi^2)^{1/2}} \right]^{1/2}, \quad d = \frac{1}{2} \eta A_p \psi / \delta_0,$$

где φ и ψ — действительная и мнимая части правой части уравнения (2.10). При $\eta \rightarrow 0$ и $\eta \rightarrow \infty$ находим соответственно равновесную и «замороженную» скорости звука

$$a_e^{-2} = a_*^{-2} (1 + \alpha_{20} (r - 1)) \left(\frac{\alpha_{10}}{A_{10}^2} + \frac{\alpha_{20}}{L} (1 - r) (\Theta'_s (C_2 + C_1/M) + B + (1 - \Theta'_s) L) \right),$$

$$a_f^{-2} = a_1^{-2} \alpha_{10} \frac{1 - \alpha_{20} (r - 1)}{1 + 2\alpha_{10} (\alpha_{20} - r\alpha_{10})} \simeq a_1^{-2}.$$

Здесь имеется в виду $\alpha_{20} = 1 - \alpha_{10}$, т. е. α_{20} — общая объемная концентрация газовой фазы.

При $p_0 = 10$ бар имеем для воды

$$\Theta'_s \simeq 10^{-1}, \quad L \simeq 10, \quad C_1 \simeq 2, \quad C_2 \simeq 10, \quad B \simeq -1,$$

$$r \simeq 2 \cdot 10^{-2}, \quad A_{10}^{-2} \simeq i0^{-3}, \quad \alpha_{20} \simeq 10^{-2},$$

отсюда $\Theta'_s C_1 / M \gg \Theta'_s C_2, B, L (\Theta'_s - 1)$, поэтому

$$(2.12) \quad a_e^2 = a_*^2 L r / \Theta'_s C_1,$$

т. е. равновесная скорость звука практически в данном случае не зависит от объемной концентрации пузырьков. Равновесная скорость звука (2.12) совпадает со скоростью из [12]. При отмеченных параметрах $a_e \simeq 10$ м/с.

Для «замороженного» коэффициента затухания d_f в случае, когда можно пренебречь инерцией пузырьков за счет их массы, т. е. при $r \ll 1$, получим

$$d_f = 2\alpha_{10}^2 A_{10}^{-1} \left(\sum_{i=2}^m \alpha_{i0} / \tau_{vi}^0 \right) (1 + 2\alpha_{10} (1 - \alpha_{10}))^{-3/2} \quad (\tau_{vi}^0 = \tau_{vi} / r).$$

В монодисперсном случае при $\alpha_{20} \ll 1$

$$d_f = 2\alpha_{20} / A_{10} \tau_v^0.$$

Нужно отметить, что для односкоростной модели $d_f = 0$. Это связано с тем, что при стремлении частоты к бесконечности радиальное движение пузырьков «замораживается», т. е. $D_i = 0$, поэтому диссипация при радиальных пульсациях из-за теплообмена и вязкости исчезает. Из уравнений (2.3), когда $r \ll 1$, для асимптотики отношения возмущений i -й ($i = 2, 3, \dots, m$) и первой фазы при $\eta \rightarrow \infty$ имеем

$$U_i / U_1 \simeq (1 + 2\alpha_{10}) \simeq 3.$$

Таким образом, вследствие наличия скольжения фаз диссипация из-за вязкости по m -скоростной модели остается.

3. Случай отсутствия фазовых переходов. В этом случае из уравнений состояния (1.3) имеем

$$\begin{aligned} \Pi_{T1i} &= 1 - i\eta C_2 \left(1 + \frac{\tau_i^0}{\tau_{0i}}\right) \frac{\nu_{0i}}{\delta_0}, \quad \Pi_{T2i} = i\eta B \left(1 + \frac{\tau_i^0}{\tau_{0i}}\right) \frac{\tau_{0i}}{\delta_0}, \\ \Pi_{T3i} &= -\Pi_{T6i} = i\eta B \frac{\tau_i^0}{\delta_0}, \quad \Pi_{T4i} = 1, \quad \Pi_{T5i} = -i\eta C_2 \frac{\tau_i^0}{\delta_0}. \end{aligned}$$

Для монодисперсной смеси имеем дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\delta_0^2 K^2}{\eta^2} &= \left\{ 1 + \alpha_{20}(r-1) \left[1 - i\eta(\alpha_{10} + 1/2) \frac{1}{r} \frac{\tau_v}{\delta_0} \right] \left[1 - i\eta \left(\frac{1}{2} + \right. \right. \right. \\ &+ \alpha_{10}(\alpha_{20} - r\alpha_{10}) \left. \left. \left. \frac{1}{r} \frac{\tau_v}{\delta_0} \right)^{-1} \right] \left\{ \frac{\alpha_{10}}{A_{10}^2} + \alpha_{20} \left[\left(1 + (1 - i\eta B \left(1 + \frac{\tau^0}{\tau_0} \right) \times \right. \right. \right. \right. \right. \\ &\times \frac{C_1}{M} \frac{\tau_0}{\delta_0} \left. \left. \left. \left(C_1/M + C_2 \left(1 - i\eta \left(1 + \frac{\tau^0}{\tau_0} \right) \frac{C_1}{M} \frac{\tau_0}{\delta_0} \right) \right)^{-1} \right)^{-1} + i\eta \frac{1}{6} \times \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. \times \left(i\eta/2 - \frac{\delta_0}{\tau_r} \right) \right]^{-1} \right\} \right\}, \end{aligned}$$

где

$$B = -1, \quad C_2 = \gamma_2/(\gamma_2 - 1) \quad (\gamma_2 = c_{p2}/c_{v2}).$$

Для равновесной скорости звука имеем выражение

$$a_e^{-2} = a_*^{-2} (1 + \alpha_{20}(r-1)) \left(\frac{\alpha_{10}}{A_{10}^2} + \alpha_{20} \left(1 + \frac{1 - \gamma_2}{\gamma_2 + (\gamma_2 - 1) C_1/M} \right) \right).$$

Для давлений $p_0 \sim 1-10$ бар и для объемных концентраций $\alpha_{20} \sim 10^{-2}$ в смеси жидкость-пузырьки при

$$r \simeq 10^{-3}, \quad C_1/M \simeq 10^5, \quad A_{10}^{-2} \simeq 10^{-3}$$

имеем

$$a_e^2 = \frac{a_*^2}{\alpha_{10}\alpha_{20}} = \frac{p_0}{\rho_{10}^0 \alpha_{10}\alpha_{20}}.$$

Полученные выражения для равновесных и «замороженных» скоростей звука совпадают с соотношениями, следующими из рассмотрения условий существования волн уплотнения [13] в двухфазных средах.

4. Обобщение для непрерывного распределения пузырьков по размерам. До сих пор везде предполагалось, что пузырьки по размерам распределены дискретно, т. е. имеются пузырьки $m-1$ сортов. Все это можно обобщить для случая непрерывного распределения.

Введем функцию плотности распределения пузырьков по диаметру $\kappa(\delta'_0)$ такую, что

$$1 - \alpha_{10} = \int_{\delta_{10}}^{\delta_{20}} \kappa(\delta'_0) d\delta'_0 = \lim \sum_i \kappa(\delta'_{i0}) \Delta\delta'_{i0}.$$

Каждому слагаемому $\kappa(\delta'_{i0}) \Delta\delta'_{i0}$ раньше соответствовало α_{i0} . Поэтому, формально заменяя α_{i0} через $\kappa(\delta'_{i0}) \Delta\delta'_{i0}$ и переходя к пределу при $\max(\Delta\delta'_{i0}) \rightarrow 0$, вместо дисперсионного уравнения (2.11) имеем

$$(4.1) \quad \frac{\delta_0^2 K^2}{\eta^2} \left[\frac{\alpha_{10}}{A_{10}^2} + (1 - \alpha_{10}) \int_{\delta_{10}}^{\delta_{20}} \kappa^* z d\delta'_0 \right] \left[\alpha_{10} \tau_v + (1 - \alpha_{10}) \int_{\delta_{10}}^{\delta_{20}} \kappa^* y d\delta'_0 \right]^{-1},$$

где κ^* — нормированная плотность распределения, т. е. $\kappa = (1 - \alpha_{10})\kappa^*$. Для остальных переменных, входящих в (4.1), имеем

$$\begin{aligned} \pi_v &= \left(\int_{\delta_{10}}^{\delta_{20}} \kappa^* \Pi_{v1}^{-1} d\delta_0' \right) \left(\int_{\delta_{10}}^{\delta_{20}} \kappa^* \Pi_{v2} \Pi_{v1}^{-1} d\delta_0' \right)^{-1}; \\ y &= (\pi_v \Pi_{v2} + i\eta) / \Pi_{v1}, \quad z = \left(1 + \frac{\pi_T \Pi_{T4}}{\Pi_{T1} + \Pi_{T2}} \right) \left[\Pi_r + \left(1 + \frac{\Pi_{T2}}{\Pi_{T1}} \right)^{-1} \right]^{-1}, \\ \pi_T &= \left\{ \int_{\delta_{10}}^{\delta_{20}} \kappa^* \frac{\Pi_{T3} \delta_0'}{\Pi_{T1} \tau^0} \left[1 + \Pi_r \left(1 + \frac{\Pi_{T2}}{\Pi_{T1}} \right) \right]^{-1} d\delta_0' \right\} \left\{ \int_{\delta_{10}}^{\delta_{20}} \kappa^* \frac{\Pi_{T5} \delta_0'}{\Pi_{T1} \tau^0} \left[1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Pi_r \left(1 + \frac{\Pi_{T6}}{\Pi_{T1}} \right) \right] \left[1 + \Pi_r \left(1 + \frac{\Pi_{T2}}{\Pi_{T1}} \right) \right]^{-1} d\delta_0' - i\eta c_1 / M \right\}^{-1} \\ &\quad (M = (1 - \alpha_{10}) r / \alpha_{10}). \end{aligned}$$

Выражения для Π_T , Π_v , Π_r такие же, как и раньше с соответствующей поправкой δ_{10} на δ_0' . Уравнение (4.1) соответствует для монодисперсной смеси, если в качестве функции плотности распределения взять δ -функцию $e(\delta_0' - \delta_0)$. В односкоростном случае при изотермическом поведении пузырьков дисперсионное уравнение принимает вид

$$\frac{\delta_0'^2 K^2}{\eta^2} = \alpha_{10} \left\{ \frac{\alpha_{10}}{A_{10}^2} + (1 - \alpha_{10}) \int_{\delta_{10}}^{\delta_{20}} \kappa^* \left[1 - \frac{\eta^2}{12} \left(\frac{\delta_0'}{\delta_0} \right)^2 \right]^{-1} d\delta_0' \right\}.$$

Это уравнение совпадает с уравнением, полученным в [3]. Учет теплообмена осуществлялся аналогично [13].

5. Результаты расчетов. В монодисперсном случае проверяли влияние различных факторов на фазовую скорость и на затухание звука. Проверяли двухскоростные эффекты, считая силу трения по формуле Левича и Стокса.

На фиг. 1, 2 приведены дисперсионные кривые при следующих значениях термодинамических параметров:

$$\begin{aligned} \rho_{10}^0 &= 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad a_1 = 1,5 \cdot 10^3 \text{ м/с}, \quad v_1 = 0,2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}, \\ c_1 &= 4,4 \cdot 10^3 \text{ м}^2/\text{с}^2 \cdot \text{град}, \quad \gamma_2 = 1,4, \quad \lambda_2 = 2,47 \cdot 10^{-2} \text{ кг} \cdot \text{м/с}^3 \cdot \text{град}, \\ \lambda_1 &= 0,65 \text{ кг} \cdot \text{м/с}^3 \cdot \text{град}, \quad p_0 = 2 \text{ бар}, \quad T_0 = 300 \text{ К}, \quad R_2 = 0,287 \cdot 10^3 \text{ м}^2/\text{с}^2 \cdot \text{град}. \end{aligned}$$

Линия 1 рассчитана по дисперсионному уравнению без фазовых переходов для дискретного распределения пузырьков, приведенного в [1] с $\text{Nu}_i^0 = 10^2$ и $\text{Nu}_{0i} = 10$, 2 из работы [1] — для этого же распределения, 3 — для осредненной монодисперсной смеси ($\delta_0 = 0,11 \cdot 10^{-3}$ м), 4 — разброс экспериментальных точек.

На фиг. 3 приведены дисперсионные кривые при значениях термодинамических параметров для воды:

$$\begin{aligned} p_0 &= 10 \text{ бар}, \quad T_0 = 452 \text{ К}, \quad l = 2,014 \cdot 10^6 \text{ м}^2/\text{с}^2, \quad a_1 = 1,5 \cdot 10^3 \text{ м/с}, \\ c_1 &= 4,4 \cdot 10^3 \text{ м}^2/\text{с}^2 \cdot \text{град}, \quad \lambda_1 = 0,68 \text{ кг} \cdot \text{м/с}^3 \cdot \text{град}, \quad v_1 = 0,2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}, \\ R_2 &= 0,59 \cdot 10^3 \text{ м}^2/\text{с}^2 \cdot \text{град}, \quad c_{p2} = 1,9 \cdot 10^3 \text{ м}^2/\text{с}^2 \cdot \text{град}, \quad \lambda_2 = \\ &= 3,14 \cdot 10^{-2} \text{ кг} \cdot \text{м/с} \cdot \text{град}. \end{aligned}$$

Для чисел Нуссельта использовались значения $\text{Nu}_i^0 = 3 \cdot 10^2$, $\text{Nu}_{0i} = 30$.

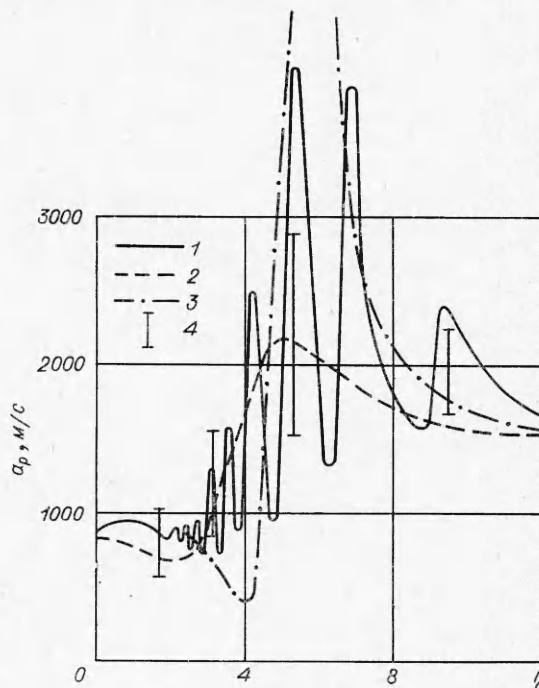
На фиг. 3 приведены дисперсионные кривые в монодисперсном случае для пузырьков $\delta_0 = 10^{-3}$ м и объемного содержания $\alpha_{20} = 0,2 \cdot 10^{-3}$, линия 1 соответствует случаю «равновесных» фазовых переходов, 2 и 3 — дисперсионные линии с кинетикой F соответственно со значениями $F = 10^{-2}, 10^{-4}$ кг·град·с·м $^{-4}$; дисперсионные кривые со значениями $F \geq 1$ кг·град·с·м $^{-4}$ практически совпадают с дисперсионными кривыми для «равновесных» фазовых переходов, а со значениями $F < 10^{-4}$ кг·град·с·м $^{-4}$ — с кривыми для случая отсутствия фазовых переходов.

Расчеты показали, что при учете реального теплообмена на фазовую скорость и на затухание полискоростные эффекты практически не влияют. Увеличение объемной концентрации пузырьков при их фиксированном диаметре приводит к смещению экстремумов фазовой скорости и коэффициента затухания в сторону увеличения частоты возмущений.

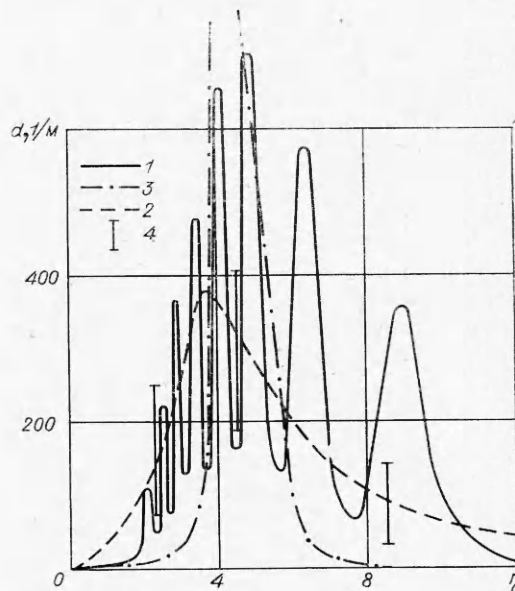
Для пузырей с диаметрами $\delta_0 \sim 10^{-4} - 10^{-3}$ м теплообмен определяется их тепловым сопротивлением, так как $\tau^0/\tau_0 \sim O(10^2)$. При изменении τ^0 , т. е. Nu^0 на порядок, дисперсионные кривые не отличаются, а при изменении τ_0 , т. е. Nu_0 на порядок, изменение коэффициента затухания ощутимо.

От изменения числа Нуссельта Nu_0 при реальных значениях Nu^0 коэффициент затухания в случае бесфазовых переходов зависит немонотонно. При увеличении числа Нуссельта Nu_0 до некоторого значения достигается максимум коэффициента затухания, а потом затухание постепенно уменьшается.

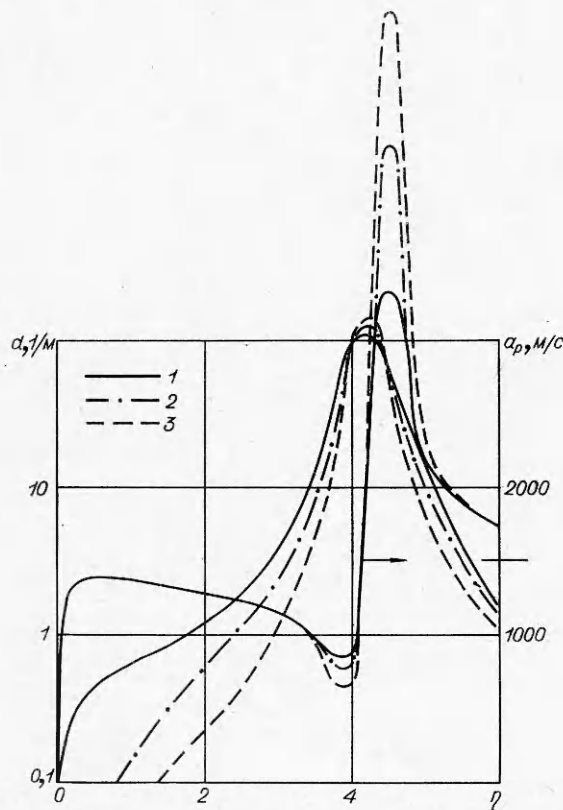
Расчеты дисперсионных уравнений показали, что во всех рассмотренных случаях можно положить $\pi_T = 0$, т. е. жидкость можно считать термостатом. В случае фазовых переходов с кинетикой F увеличение F при



Фиг. 1



Фиг. 2



Ф и г. 3

вых, введением некоторого среднего радиуса пузырьков, во-вторых, введением полидисперсности. Дисперсионные уравнения [1] совпадают с уравнениями данной работы по виду, если принять совпадение скоростей фаз и изотермическое поведение пузырьков, т. е. если оставить диссипацию только за счет вязкости при радиальных пульсациях. Для учета диссипации из-за акустического излучения и теплообмена в [1] введена эффективная вязкость, вместо которой эквивалентно в нашем случае взять коэффициент вязкости $\nu_1 = 0(10^{-2}) \text{ м}^2/\text{с}$. Но это значение эффективной вязкости более чем в 5 раз больше, чем оно должно быть действительно из-за теплообмена, акустического излучения и вязкости при радиальных пульсациях, что отмечено в работе [4].

водит к увеличению коэффициента затухания. Дисперсионные кривые с кинетикой F при этом приближаются к дисперсионной кривой с «равновесными» фазовыми переходами. В случае фазовых переходов проверялись эффекты, обусловленные изменением коэффициента теплообмена. В отличие от случая отсутствия фазовых переходов при «равновесных» фазовых переходах дисперсионные кривые от внешнего теплообмена зависят сильнее, чем от внутреннего.

Введение полидисперсности приводит к существенно немонотонной зависимости дисперсионных кривых от частоты возмущений. Это объясняет сильный разброс экспериментальных точек, в частности, работы [1], где сравниваются с экспериментом дисперсионные кривые в монодисперсном и полидисперсном случаях. Распределение пузырьков по размерам допускалось двойко: во-пер-

Поступила 26 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Francis E., Fox, Stanley R., Curley, Glenn S. Larson Phase velocity and absorption measurements in water containing air bubbles.— «J. of the Acoustical Society of America», 1955, vol. 27, N 7.
2. Silberman E. Sound velocity and attenuation in bubbly mixtures measured in standing waves tubes.— «J. of the Acoustical Society of America», 1957, vol. 29, N 8.
3. Кедринский В. К. Распространение возмущений в жидкости, содержащей пузырьки газа.— ПМТФ, 1968, № 4.
4. Wingaarden L. van. One-dimensional flow of liquids containing small gas bubbles.— «Annular Review Fluid Mech.», 1972, vol. 4, Palo Alto, Calif.

5. Накоряков В. Е., Шрейбер И. Р. Распространение малых возмущений в парожидкостной смеси.— В кн.: Проблемы теплофизики. Новосибирск, «Наука», 1974.
8. Бетчелор Г. К. Волны сжатия в суспензии газовых пузырьков в жидкости.— Сб. пер. Механика, 1968, № 3.
7. Crespo A. Sound and shock waves in liquids containing bubbles.—«The Physics of Fluids», 1969, vol. 12, N 11.
8. Ивандаев А. И., Нигматулин Р. И. Особенности распространения слабых возмущений в двухфазных средах с фазовыми переходами.— ПМТФ, 1970, № 5.
9. Нигматулин Р. И. Мелкомасштабные течения и поверхностные эффекты в гидродинамике многофазных сред.— ПММ, 1971, т. 35, вып. 3.
10. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
11. Лабунцев Д. А., Муратова Г. М. Физические и методические основы формулировки задач тепло- и массообмена при фазовых превращениях. Тепло- и массоперенос. Том II. Минск, 1972.
12. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Техиздат, 1953.
13. Нигматулин Р. И., Шагапов В. Ш. Структура ударных волн в жидкости с пузырьками газа.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1974, № 4.

УДК 532.516.2

ВЛИЯНИЕ МАЛОЙ ВЯЗКОСТИ НА ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ В ФОРМЕ ЭЛЛИПСА

В. А. Батицев

(Ростов-на-Дону)

Изучается действие малой вязкости на плоское потенциальное течение со свободной границей в форме эллипса, полученное в работе [1]. Пусть в начальный момент времени жидкость с полем скоростей

$$(1) \quad v_x = \sqrt{2}x/2, \quad v_y = -\sqrt{2}y/2$$

заклучена внутри круга $x^2 + y^2 \leq 1$, граница которого — свободная поверхность. Давление и касательное напряжение на свободной границе S_t при всех $t \geq 0$ равны нулю, внешние силы отсутствуют. Соответствующее течение идеальной несжимаемой жидкости потенциально и имеет вид [1]

$$(2) \quad v_x = \tau\tau^{-1}x, \quad v_y = -\tau\tau^{-1}y, \\ p = -0,5\tau\tau (x^2\tau^{-2} + y^2\tau^2 - 1),$$

$$\int_1^\tau \sqrt{1 + \rho^{-4}} d\rho = \lambda t (\lambda = \text{const}), \quad \tau(0) = 1, \quad \dot{\tau} = d\tau/dt.$$

Решение (2) допускает следующую интерпретацию. С ростом t свободная граница $x^2 + y^2 = 1$ деформируется в эллипс $L_t: x^2\tau^{-2} + y^2\tau^2 = 1$ с полуосями $\tau(t)$, $\tau^{-1}(t)$. Из (2) следует, что $\tau \rightarrow \infty$, $\tau^{-1} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и $\lambda > 0$. При этом эллипс вытягивается вдоль оси Ox . Если $\lambda < 0$, то $\tau \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и эллипс вытягивается вдоль оси Oy .

При исчезающей вязкости ($\nu \rightarrow 0$) вблизи свободной границы S_t возникает явление пограничного слоя, заключающееся в быстром измене-