УДК 533.95

Анализ энергетического баланса дугового разряда, ограниченного стенками

Е.Н. Васильев

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

E-mail: ven@icm.krasn.ru

Проведено моделирование формирования структуры равновесного дугового разряда в осесимметричной постановке в широком диапазоне значений силы тока и радиуса. Из расчетных данных определена граница, разделяющая радиационный и теплопроводный режимы горения разряда. Приведен анализ влияния энергетических механизмов на структуру разряда и предложена каналовая модель для расчета его параметров в радиационном режиме.

Ключевые слова: дуговой разряд, теплообмен, радиационный режим, каналовая модель.

введение

Одной из важнейших характеристик равновесной газоразрядной плазмы является температура, определяющая величину электропроводности и другие характеристики разряда. В свою очередь распределение температуры в разряде зависит от баланса энергетических механизмов: джоулевой диссипации, теплопроводности, излучения и конвекции. Уровень развития современной вычислительной техники позволяет проводить численное моделирование динамики разрядов с учетом всех основных физических механизмов в трехмерной постановке [1, 2]. Однако такие расчеты требуют больших затрат вычислительных ресурсов, а анализ влияния отдельных факторов затруднен из-за сложности математических моделей. Во многих случаях, особенно при проведении инженерных расчетов, достаточно использовать более простые модели, однако рамки их применимости должны быть четко определены. Исследованию разрядов посвящено огромное количество работ, основные экспериментальные и расчетные результаты системно изложены в монографиях [3-6]. В них рассматриваются различные режимы существования газоразрядной плазмы, при этом границы диапазонов параметров, которые соответствуют этим режимам, определены недостаточно точно. Так, например, в [4] приведена следующая формулировка границ радиационного и теплопроводного режимов: "И расчеты и опыт показывают, что при не чрезмерно высоких температурах, ниже, примерно, 10000-15000 К, и не слишком высоких давлениях, в частности, при атмосферном, потери энергии на излучение заметно уступают теплопроводностным".

В настоящей работе представлены результаты анализа структуры и энергобаланса электрической дуги, на основе которых определена граница, разделяющая радиационный и теплопроводный режимы, и построена каналовая модель разряда в радиационном режиме.

СТРУКТУРА РАЗРЯДА

Рассмотрим теплофизические процессы в электродуговой плазме, находящейся в состоянии локального термодинамического равновесия. При атмосферном давлении данное приближение применимо при силе тока $I \ge 10$ A [3]. Конвекция оказывает значительное влияние на энергобаланс разрядов, обдуваемых потоком газа. Без решения системы газодинамических уравнений определить точно мощность этого механизма трудно из-за сложной структуры разряда и всего течения в целом. Оценку влияния конвекции можно выполнить для случая сквозного протекания газа через разрядную область, имеющую объем V, площадь бокового сечения S и толщину δ . Величина конвективного теплового потока на выходе из зоны разряда газом составляет $q_T = c_p \rho v T$, при этом потери энергии на единицу объема разряда будут $Q_T = q_T S/V = q_T/\delta$. Для дуговых разрядов атмосферного давления характерная мощность джоулевой диссипации Q_I составляет примерно 10^8 Вт/м³, поэтому для плотности газа $\rho \approx 0.03$ кг/м³, теплоемкости $c_p \approx 10^3$ Дж/(кг·К), характерного поперечного размера $\delta \approx 3$ см, температуры $T \approx 10^4$ K величина Q_T будет порядка Q_1 при значении скорости $v \sim 10$ м/с. Очевидно, что такая оценка будет соответствовать максимальной интенсивности конвективного теплообмена, поскольку известно, что при поперечном обдуве дуги в ее столбе нет сквозного продува, а в результате газодинамического взаимодействия поток обтекает столб разряда, внутри которого формируются два вихря, закрученных в противоположные стороны [2, 7, 8]. Влияние естественной конвекции на энергобаланс дуги, горящей в трубке, исследовано в работе [9], в которой показано, что при атмосферном давлении этот механизм практически не оказывает никакого влияния на распределение температуры. Следовательно, основными механизмами теплоотдачи от столба разряда, ограниченного стенками, являются излучение и теплопроводность.

Распределение температуры в разряде, горящем в цилиндрическом объеме и имеющем осевую симметрию, описывается уравнением Эленбааса-Геллера следующего вида:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \sigma E^2 - Q_R = 0,\tag{1}$$

где r — радиус, T — температура, λ , σ — коэффициенты теплопроводности и электропроводности газа, E — напряженность электрического поля, Q_R — объемная мощность радиационных энергопотерь.

Уравнение (1) дополняется граничными условиями в центре разрядной области

$$\left[\frac{\partial T}{\partial r}\right]_{r=0} = 0\tag{2}$$

и на внешней границе

$$[T]_{r=R_0} = T_0. \tag{3}$$

Напряженность электрического поля E зависит от силы тока I и распределения электропроводности по радиусу:

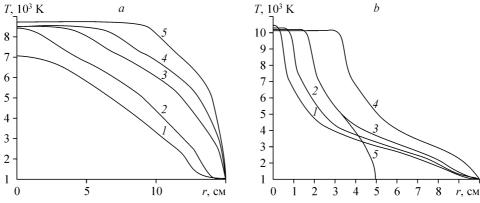
$$E = I / 2\pi \int_{0}^{R_0} \sigma r dr. \tag{4}$$

Как правило, поперечные размеры дугового разряда не превышают нескольких сантиметров, что обусловливает его малую оптическую толщину в диапазоне давления $0,1\div 1$ МПа. Следовательно, при расчете радиационных энергопотерь Q_R в разряде оправдано использование упрощенной модели излучения — приближения объемного излучателя. Определим среднюю величину радиационных объемных энергопотерь как $Q_R = uF/V$, где u — плотность радиационного потока, покидающая единицу поверхности излучающего объема, F — суммарная площадь поверхности, ограничивающая объем V. Величина потока излучения с поверхности цилиндра может быть определена через поток излучения полусферического объема $u = \varepsilon \sigma_R T^A$ с соответствующим эквивалентным радиусом R и коэффициентом черноты ε (T, R), здесь σ_R — постоянная Стефана—Больцмана. Для случая бесконечного цилиндра, соответствующего одномерной постановке задачи, отношение F/V = 4/D, а эквивалентный радиус равен диаметру цилиндра R = D [10]. После подстановки получаем выражение для определения величины радиационных энергопотерь

$$Q_R = 4\sigma_R \varepsilon(T, R) T^4 / R. \tag{5}$$

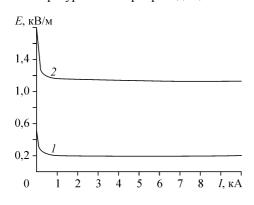
Формула (5) описывает процесс радиационного теплообмена без учета спектральных и угловых характеристик, с ее помощью расчет Q_R прост в реализации и не требует больших вычислительных затрат. Сравнительные расчеты величины Q_R из решения уравнения переноса излучения и с помощью приближения объемного излучателя для объемов с малой оптической толщиной показывают существенное отличие только на краях излучающей области [11]. В формуле (5) зависимость Q_R от размера R при малых оптических длинах достаточно слабая, так, для воздуха, по данным [12] при $T=8\times10^3$ K, p=0,1 МПа, коэффициент черноты полусферического объема $\varepsilon=0,23\times10^{-3}$ для R=1 см и $\varepsilon=0,58\times10^{-3}$ для R=3 см, таким образом, при увеличении R в 3 раза отношение $\varepsilon(R)/R$ уменьшается всего на 13 %. С учетом этого во всех проведенных расчетах в качестве характерного размера принималось одинаковое значение R=1 см.

Решение краевой задачи (1)—(5) проводилось методом установления с помощью конечноразностного алгоритма, при этом из нестационарного уравнения теплопроводности, соответствующего (1), находилось распределение T(r), сходящееся к стационарному решению. Величина пространственного шага в расчетах принималась равной 1 мм. Излучательные ε (T, p) [12] и транспортные свойства воздуха $\sigma(T, p)$, $\lambda(T, p)$ [13] вводились в программу в виде таблиц с шагом по температуре 10^3 К. Температурная зависимость теплофизических свойств имеет нелинейный степенной характер, поэтому для уменьшения погрешности интерполяция проводилась для логарифмов табличных величин, а затем выполнялось потенцирование полученного значения. В расчетах начальное состояние дуги задавалось в цилиндрическом объеме с заданным радиусом R_0 и с синусоидальным распределением температуры по координате r, максимальное значение температуры в центре равнялось $T = 7 \times 10^3$ K, значение на внешней границе — 10^3 K.



Puc. 1. Распределения температуры T(r) в разряде для давления p = 0,1 (a), 1 (b) МПа.

Как видно из рис. 1, а, температура в разряде меняется от максимального значения в центре до значения, равного температуре стенки, на границе. Максимальное значение температуры в центре разряда повышается с увеличением силы тока до значения $I \approx 1$ кA, затем происходит ее стабилизация. При дальнейшем повышении силы тока в центре разряда формируется область с практически постоянным значением температуры (кривые 3-5). Очевидно, что в зоне с однородным распределением температуры механизм теплопроводности отсутствует, его действие проявляется только на границах дугового столба. Изменение характера распределения T(r) при увеличении силы тока свидетельствует о качественном изменении в энергобалансе разряда, а именно о переходе от теплопроводного к радиационному режиму отвода энергии из разрядной области. В случае преобладания радиационных энергопотерь режим горения разряда становится объемным, когда при изменении силы тока значения температуры, электропроводности сохраняются, а площадь поперечного сечения электропроводящего столба разряда меняется пропорционально величине І. При приближении поперечного размера разряда к величине диаметра трубки мощность кондуктивного теплообмена на границе разрядного столба увеличивается из-за роста температурных градиентов, из-за этого дальнейшее увеличение силы тока приводит к росту плотности тока и температуры в электропроводящей области (кривая 5, см. рис. 1, а). Напряженность



электрического поля E с ростом силы тока сначала снижается, затем при переходе разряда к объемному режиму горения принимает практически постоянное значение (рис. 2). Аналогичным свойством постоянства напряженности электрического поля при изменении силы тока обладает нормальный тлеющий разряд [3, 5].

Рис. 2. Вольтамперные характеристики для давления p = 0, 1 (*I*) и 1 (2) МПа.

Повышение давления приводит к изменению соотношения энергетических механизмов, радиационные энергопотери растут практически прямо пропорционально давлению, а величина коэффициентов теплопроводности и электропроводности меняется незначительно. Вследствие этого температурный фронт на границе разрядного столба становится существенно круче, а поперечное сечение разряда формируется с меньшей площадью, что обеспечивает более высокий уровень плотности тока и джоулевой диссипации и компенсирует возросшие радиационные энергопотери (см. рис. 1, b). Из сравнения кривых a и a на рис. 1, a можно сделать вывод, что при больших значениях a0 стенка практически не влияет на распределение температуры в центральной зоне разряда, соответствующей электропроводящему столбу. Вольтамперная характеристика (см. рис. 2) для давления a0 мПа расположена существенно выше, чем при a0 мПа, что также обусловлено большей мощностью энергопотерь.

Анализ энергетического баланса дуги намеренно проведен по результатам расчетов для больших значений R_0 . Это позволило, с одной стороны, исключить влияние боковой стенки при анализе роли энергетических механизмов, с другой стороны — более наглядно показать особенности горения дуги в радиационном режиме.

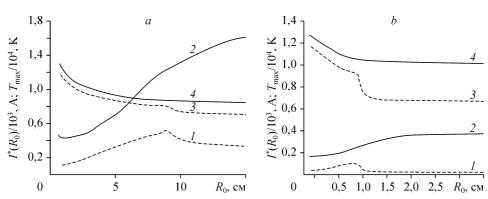
Вычислительная модель (1)-(5) также применена при расчете структуры разряда для условий эксперимента, описанного в [7]. В этой работе приведены двумерные распределения температуры для поперечно обдуваемой дуги, горящей в азоте при атмосферном давлении. При силе тока I = 19,3 A и индукции магнитного поля $B = 1.5 \times 10^{-3}$ Тл значение температуры в центре дуги равно 6960 K, скорость обдува 0,8 м/с, скорость вихревого движения в разряде 3,6 м/с, поперечный размер по координатным осям х и у составляет примерно 2-3 см. В этом эксперименте разряд не был ограничен стенками, однако обдув столба разряда потоком приводит к непрерывному уносу неэлектропроводного газа с краев, по этой причине электропроводящий разрядный столб непосредственно граничит с холодным обтекающим газом. С учетом этого при моделировании на внешней границе разряда величина температуры принималась равной температуре потока. Расчетное значение максимальной температуры составило при $R_0 = 1.5$ см — 6776 K, при 1 см — 7024 К. Близость значений температуры, полученных в эксперименте и расчете, косвенно свидетельствует о том, что при небольших скоростях обдува влияние конвекции на энергобаланс дуги незначительно, хотя приводит к заметной деформации формы поперечного сечения столба разряда.

АНАЛИЗ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО БАЛАНСА РАЗРЯДА

От соотношения механизмов энергопотерь (теплопроводности и излучения) зависит режим горения разряда, а также распределение основных параметров ионизованного газа — температуры и электропроводности. В зависимости от условий один из этих механизмов может доминировать, либо их влияние является соизмеримым. Рассмотрим соотношение мощности механизмов в центре разряда, поскольку именно максимальные значения температуры и электропроводности по сути являются масштабными величинами и определяют параметры разряда в целом. При малых значениях силы тока в энергобалансе преобладает теплопроводный механизм, с увеличением тока вклад Q_R возрастает и с некоторого значения I начинает превышать по величине долю теплопроводности Q_T . При выполнении условия $Q_T \approx Q_R$ влияние излучения становится существенным и его необходимо учитывать при проведении оценок и расчетов. Переход к радиационному режиму характеризуется возникновением температурного плато в центре разряда, дальней-

Для определения границы радиационного и теплопроводного режимов выберем в качестве критерия величину отношения мощностей $k_Q = Q_R/Q_J = 0,95$, которая условно соответствует начальной стадии формирования температурного плато. В качестве еще одного порогового значения, определяющего баланс теплопроводности и излучения, примем отношение $k_Q = 0,5$. Каждому из этих характерных значений отношения k_Q соответствуют величина I^* и максимальная температура в центре разряда $T_{\rm max}$. Значения I^* и $T_{\rm max}$ определялись из решения уравнений (1)–(5).

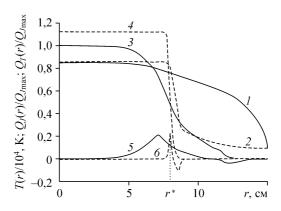
Геометрические места точек I^* для разных значений R_0 и двух величин k_0 образуют зависимости $I^*(R_0)$, приведенные на рис. 3, a, b ($k_0 = 0.5$ (1), 0.95 (2)), а соответствующие значения максимальной температуры на оси разряда отображаются зависимостями $T_{\text{max}}(R_0)$ ($k_0 = 0.5$ (3), 0.95 (4)). Для давления p = 0.1 МПа (см. рис. 3, a) зависимости $T_{\max}(R_0)$ для обоих значений k_Q расположены достаточно близко друг к другу, величина T_{max} снижается с $1,2\times10^4$ K при $R_0=1$ см до значения $T_{\text{max}} \approx 8 \times 10^3$ К. При больших значениях радиуса расчетной области ($R_0 \ge 10$ см) величина T_{\max} практически не меняется, поскольку в данном случае стенка оказывает слабое влияние на распределение параметров в столбе разряда. Величина I^{*}, соответствующая значению $k_O = 0.95$, с увеличением R_0 растет практически во всем диапазоне, при $k_O = 0.5$ распределение $\hat{I}(R_0)$ имеет максимум, обусловленный локальным максимумом зависимости $\lambda(T)$ при $T = 7 \times 10^3$ K. Кривые 1 и 2 разделяют плоскость параметров $I^* - R_0$ на три области. Ниже кривой I расположена зона параметров, при которых основным механизмом энергопотерь в разряде является теплопроводность. Совокупность процессов с доминирующим влиянием излучения в энергобалансе разряда расположена в области между кривыми 1 и 2. Радиационному режиму соответствуют все возможные соотношения силы тока $I^{\hat{}}$ и радиуса стенки R_0 , находящиеся выше кривой 1. На рис. 3, b приведены аналогичные зависимости для давления p = 1 МПа. При повышении давления переход к радиационному режиму происходит при существенно меньших значениях тока, а при величине $R_0 \ge 3$ см зависимости практически выходят на асимптоту.



Puc.~3.~ Зависимости $I^*(R_0)/10^3,~k_Q=0,5~(I),~0,95~(2)$ и $T_{\rm max}(R_0)/10^4,~k_Q=0,5~(3),~0,95~(4)$ для давления p=0,1~(a),~1~(b) МПа.

Puc. 4. Распределения температуры $T(r)/10^4$ (I), мощностей джоулевой диссипации $Q_J(r)/Q_{J\max}$ (3) и теплопроводности $Q_T(r)/Q_{J\max}$ (5) в разряде ($Q_{J\max}$ = $=4.3\times10^7$ Вт/м 3), в той же последовательности штриховыми линиями (2,4,6) отображены распределения, полученные в расчете с $\lambda/100$.

Для выяснения влияния теплопроводности на формирование разряда в радиационном режиме проведены расчеты с обыч-



ным и с уменьшенным в 100 раз коэффициентами теплопроводности, при этом значения остальных параметров и теплофизических свойств оставались неизменными. Распределения температуры и составляющих энергетического баланса Q_T и Q_I приведены для обоих случаев на рис. 4. Максимальное значение Q_T в этих расчетах составило примерно 9×10⁶ Вт/м³, причем теплопроводность имела в энергобалансе заметный вклад (≈ 20 %) только в узкой зоне разряда на границе токопроводящего столба. Следует отметить, что интегральные характеристики для этих случаев отличались незначительно, так, напряженность электрического поля Е равнялась 180 и 177 В/м. Из результатов этих расчетов можно сделать вывод, что влияние теплопроводности приводит к размазыванию границ электропроводной зоны разряда и не меняет существенно его характерные параметры: E и $T_{\rm max}$. Кроме того, уменьшение коэффициента теплопроводности λ приводит к соответствующему увеличению градиентов в распределениях T(r) и $Q_J(r)$ на границе разряда. Очевидно, что в пределе при дальнейшем уменьшении λ профили T(r), $\sigma(r)$ и $Q_{l}(r)$ будут стремиться к прямоугольной форме, а значения параметров будет полностью определяться балансом Q_J и Q_R . Значения температуры T^* и радиуса r^* , соответствующие этому предельному случаю, можно принять в качестве масштабных величин для разряда в радиационном режиме. По известным значениям T^* и r^* однозначно определяются такие основные характеристики разряда, как электропроводность и напряженность электрического поля.

КАНАЛОВАЯ МОДЕЛЬ РАЗРЯДА В РАДИАЦИОННОМ РЕЖИМЕ

Большинство работ по дуговым разрядам посвящено исследованию теплопроводного режима без учета влияния излучения, а основой теории является каналовая модель дугового столба [4–6]. В этой модели рассматривается упрощенное представление дуги как некоторой цилиндрической зоны с постоянной температурой и электропроводностью, за пределами которой газ неэлектропроводен. Исходя из рис. $1,\ a,\ b$ можно сделать вывод, что в радиационном режиме однородный характер распределений температуры в центральной зоне разряда в значительно большей степени соответствует каналовой модели, чем в теплопроводном режиме. Рассмотрим особенности энергетического баланса и принципы построения каналовой модели дугового разряда в радиационном режиме.

В процессе формирования поперечный размер разряда устанавливается таким, чтобы при установившемся уровне электропроводности и величине напряженности электрического поля E мощности джоулевой диссипации было достаточно для компенсации энергопотерь. Определение значений E, T^* и r^* проведем

на основе анализа функции энергобаланса $\Omega(T) = \sigma(T)E^2 - 400\sigma_R \varepsilon(T)T^4$, из которой вычтены теплопроводные энергопотери. На рис. 5 эта функция приведена для значений $R_0 = 15$ см, I = 10 кA, кривая I соответствует центру разряда, кривая 2 границе токопроводящего канала, отмеченной на рис. 4 как r^* . Кривая 1 имеет два корня (точки A и B) и максимум (точка C), соответствующий значению температуры $T_C \approx 8 \times 10^3$ К. В соответствии с графиком максимальное значение температуры в разряде в установившемся состоянии не может превышать величину, соответствующую правому корню $T_B \approx 8.4 \times 10^3 \text{ K}$ (точка B), поскольку при отрицательном энергобалансе температура неизбежно снизится до этого значения. Такое значение температуры T_B является максимально возможным при данном значении E, и оно устанавливается в центральной зоне разряда, где мощность теплопроводных энергопотерь Q_T близка нулю. Положительные значения функция $\Omega(T)$ имеет в температурном диапазоне $\Delta T = T_B - T_A$, причем разница $Q_J - Q_R$ приходится на долю механизма теплопроводности, который имеет максимальную мощность на границе токопроводящего канала, в точке перегиба температурного профиля, это наиболее отчетливо видно в случае малого λ (см. рис. 4). В предельном случае радиационных энергопотерь (λ и $Q_T \rightarrow 0$) зависимость Ω (кривая 2, см. рис. 5) имеет точку максимума С, которая касается оси абсцисс и соответствует значению температуры $T^* = T_C$ сформировавшегося прямоугольного профиля.

С учетом особенностей энергетического баланса разряда в радиационном режиме определим значения температуры T^* и радиуса r^* при помощи следующих уравнений:

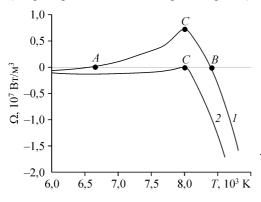
$$\Omega = \sigma(T)E^2 - 400\sigma_R \varepsilon(T)T^4 = 0,$$
(6)

$$d\Omega/dT = 0, (7)$$

$$I = \pi r^2 \sigma E. \tag{8}$$

Здесь выражение (6) отражает выполнение энергобаланса на границе токопроводящего канала, а формула (7) вытекает из наличия экстремума функции $\Omega(T)$ в точке C (кривая 2, см. рис. 5). Следует отметить, что из характера зависимости $\Omega(T)$ следуют сразу два соотношения (6) и (7), поэтому в данной модели нет необходимости привлекать дополнительные соотношения типа известного принципа минимума мощности Штеенбека.

Система уравнений (6)–(8) при таблично заданных зависимостях $\sigma(T)$ и $\varepsilon(T)$ решается численно. Однако в узком температурном интервале эти зависимости с определенной погрешностью можно описать аппроксимационными формулами (например, полиномами второго порядка) и получить из аналитического решения



значение температуры T в столбе разряда. По найденному значению T определяется величина σ , из уравнения (6) напряженность электрического поля E, и далее из соотношения (8) по заданной силе тока однозначно вычисляется значение характерного поперечного размера разряда r.

Рис. 5. Зависимости $\Omega(T)$ в центре разряда (1) и на границе токопроводящего канала (2).

Таким образом, представленная каналовая модель позволяет рассчитывать основные параметры равновесного дугового разряда в радиационном режиме, причем значения температуры T^* , электропроводности σ^* и напряженности электрического поля определяются только теплофизическими свойствами среды и не зависят от силы тока, что также соответствует результатам, полученным при моделировании структуры разряда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Жайнаков А., Урусов Р.М. Трехмерная математическая модель расчета электродуговых потоков плазмы // Теплофизика высоких температур. 2002. Т. 40, № 1. С. 13–18.
- 2. Васильев Е.Н., Нестеров Д.А. Численное моделирование взаимодействия дугового разряда с поперечным магнитным полем // Теплофизика высоких температур. 2007. Т. 45, № 2. С. 165–170.
- 3. Грановский В.Л. Электрический ток в газе. Установившийся ток. М.: Наука, 1971. 543 с.
- 4. Райзер Ю.П. Основы современной физики газоразрядных процессов. М.: Наука, 1980. 416 с.
- **5. Райзер Ю.П.** Физика газового разряда. М.: Наука, 1987. 592 с.
- **6.** Энгельшт В.С., Гурович В.Ц., Десятков Г.А. и др. Теория столба электрической дуги. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1990. 376 с. (Низкотемпературная плазма. Т. 1).
- Sebald N. Measurement of the temperature and flow fields of the magnetically stabilized cross-flow N₂ arcs // Appl. phys. 1980. Vol. 21. P. 221–236.
- **8. Васильев Е.Н., Нестеров** Д.А. Развитие неустойчивости Рэлея-Тейлора в неоднородных магнитогазодинамических течениях // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. Т. 46, № 5. С. 902–912.
- Lowke J.J. Calculated properties of vertical arcs stabilized by natural convection // J. Appl. Phys. 1979.
 Vol. 50, No. 1. P. 147–157.
- 10. Блох А.Г. Основы теплообмена излучением. М.-Л.: Госэнергоиздат. 1962. 332 с.
- **11. Васильев Е.Н., Нестеров Д.А.** Вычислительная модель радиационно-конвективного теплообмена в неоднородных магнитогазодинамических течениях // Вычисл. технологии. 2005. Т. 10, № 6. С. 13–28.
- **12. Авилова И.В., Биберман Л.М., Воробьев В.С. и др.** Оптические свойства горячего воздуха. М.: Наука, 1970. 320 с.
- **13.** Соколова И.А. Коэффициенты переноса воздуха в области температур от 3000 до 25000 °K и давлений 0,1, 1, 10, 100 атм // ПМТФ. 1973. № 2. С. 80–90.

Статья поступила в редакцию 29 апреля 2010 г.