

**МЕТОД ВКБ ПРИ ПРОДОЛЖЕНИИ СЕЙСМИЧЕСКОГО ПОЛЯ  
ПО УДАЛЕНИЮ ИСТОЧНИК—ПРИЕМНИК**

**С.В. Гольдин, О.А. Мелис, Е.В. Мезенцев**

*Институт геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск, просп. Коптюга, 3, Россия*

Продолжение сейсмического волнового поля по удалению источник—приемник (ДМО) осуществляется с целью приведения сейсмограммы к системе наблюдения с совмещенными источниками и приемниками. Это упрощает проведение многих процедур обработки, таких как миграция и AVO-анализ. Но, в свою очередь, сама процедура ДМО не должна быть громоздкой. Наиболее перспективны алгоритмы, которые решают задачу продолжения сейсмограмм в спектральной области, так как это позволяет применить быстрое преобразование Фурье. Однако известные спектральные реализации ДМО не являются точными в том смысле, что искажают геометрию отражающих границ даже в высокочастотном пределе. В данной статье рассматривается способ построения решения уравнения ДМО с помощью метода ВКБ, в котором сохраняется правильная геометрия отражающих границ. Для этого используется ряд преобразований переменных, которые и позволяют свести известное уравнение Фомеля к такому виду, для которого применим классический вариант метода ВКБ. В конце работы приведены численные расчеты, иллюстрирующие полученное решение.

*Продолжение волнового поля, метод ВКБ, преобразование Фурье.*

**WKB METHOD FOR OFFSET WAVEFIELD CONTINUATION**

**S.V. Gol'din, O.A. Melis, and E.V. Mezentsev**

Offset wavefield continuation (DMO procedure) precedes migration or AVO analysis and simplifies the processing by reducing common-offset seismic gathers to zero offset. Then, the DMO algorithm itself should be quite elegant. Frequency-domain solutions can employ FFT, but the available spectral algorithms fail to reconstruct the true geometry of reflections even in the high-frequency limit. We suggest to solve the DMO equation using the WKB method. The new algorithm includes several transformations of variables applied to reduce Fomel's partial differential equation to an equation resolvable by the classical WKB method. The WKB-based solution was tested in several numerical experiments and showed to resolve the geometry of plane and curved shallow dipping reflectors to a sufficient accuracy.

*Offset wavefield continuation, WKB method, Fourier transform*

**ВВЕДЕНИЕ**

Метод ДМО, заключающийся в продолжении волнового поля по удалению источник—приемник и имеющий своей целью построение сейсмограммы нулевых удалений по сейсмограмме равных (но отличных от нуля) удалений, нашел заметное место в практике сейсмической обработки. Он широко применяется как процедура, предваряющая AVO-анализ, поскольку после выполнения ДМО для сейсмограмм с разными удалениями, амплитуды, относящиеся к одной и той же точке профиля, относятся и к одной и той же точке отражения (хотя и к разным углам отражения). Среди различных способов реализации ДМО особого внимания заслуживает спектральный способ реализации ДМО благодаря возможности применить быстрое преобразование Фурье. Известно, что широкое распространение метод ДМО получил именно после того, как Дэвид Хейл предложил свой алгоритм спектрального варианта ДМО [1]. Однако выполненный в дальнейшем анализ этого алгоритма показал, что он не является кинематически эквивалентным. Это означает, что волна, форма которой совпадает с  $\delta$ -функцией и которая на сейсмограмме равных удалений имеет годограф  $t_h(X)$  ( $X$  — средняя точка,  $h$  — полуудаление), после преобразования имеет годограф, не совпадающий в точности с  $t_0(x)$ . Чтобы найти кинематически эквивалентный способ в спектральной области, следует опираться на дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет продолжение волнового поля по удалениям.

Дифференциальное уравнение в частных производных, позволяющее реализовать преобразование ДМО в кинематически эквивалентной форме, появилось только в 1994 г. в работе С.Б. Фомеля [2]. Однако

прямое применение преобразование Фурье к этому уравнению оказывается невозможным, поскольку это уравнение имеет коэффициенты, зависящие от тех переменных, по которым необходимо осуществлять Фурье-преобразование. Преобразованием  $\ln t = \chi$  удается избавиться от одного из этих коэффициентов. Впервые логарифмическая замена переменной времени в применении к оператору ДМО была предложена Г. Болонди с соавторами еще в 1982 г. [3]. Подробно данный подход был описан К.Д. Нотфорсом и Р.Дж. Годфри [4]. Подобное преобразование как для временных, так и для пространственных координат было рассмотрено также в статье Дж.К. Кабреры и С. Леви [5]. К.Л. Линер [6] в своей статье сравнил алгоритм Нотфорса с алгоритмами Хейла и Бейла—Якубовича и показал, что только алгоритм Нотфорса позволяет получать высококачественные изображения среды, которые ранее можно было получить только с помощью алгоритма Хейла. Однако и после указанного преобразования не удается получить аналитическое выражение для спектра искомого решения.

В данной работе предлагается искать решение с помощью метода ВКБ (Ветцель—Крамер—Бриллюэн). В этом случае решение записывается в виде интеграла типа Фурье. При том выборе фазовой функции (под знаком интеграла), которое осуществляется в методе ВКБ, алгоритм сохраняет кинематическую эквивалентность [7]. В работе [8] утверждалось, что уравнение Фомеля гарантирует не только кинематическую, но и динамическую эквивалентность оператору ДМО в истинных амплитудах, т. е. обеспечивается восстановление амплитуды, пропорциональной коэффициенту отражения. Однако при выводе этого заключения была допущена неточность, которая была исправлена в работе [9]. Динамическая эквивалентность фактически выполняется только для плоских границ. Вносит ли алгоритм, основанный на ВКБ, дополнительные искажения, остается пока неясным. Приведенные в работе численные эксперименты не позволили выявить каких-либо заметных искажений.

#### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ (МЕТОД ВКБ)

Как было показано С. Фомелем, двумерное уравнение ДМО имеет вид

$$h(u_{xx} - u_{hh}) = \tau u_{\tau h}, \quad (1)$$

где  $u = u(X, h, \tau)$  — волновое поле (в координатах:  $X$  — средняя точка,  $h$  — половина расстояния источник—приемник,  $\tau$  — время, исправленное путем введения кинематической поправки для выбранного значения скорости). В отличие от классического волнового уравнения, уравнение (1) определено не в физическом пространстве, а в пространстве наблюдений:  $h = (r - s)/2$ ,  $X = (r + s)/2$ , где  $s$  и  $r$  — координаты источника и приемника при „новом“ времени, связанном с настоящим временем подстановкой  $t^2 \rightarrow \tau^2 = t^2 - 4h^2/v^2$ ,  $v$  — известная скорость.

Для постановки краевых условий используем данные на линии (в пространстве наблюдений):

$$h = H = \text{const}: u(X, h = H, t) = u_H(X, t). \quad (2)$$

По этим данным необходимо построить поля при  $h = 0$ . Предлагается решать данное уравнение методом ВКБ (т. е. искать некоторое асимптотическое решение уравнения (1), удовлетворяющее данным (2)). Строго говоря, этих данных еще недостаточно для построения единственного решения. В этом случае имеется два решения, отвечающие прямому и обращенному продолжению волнового поля (а также их всевозможные линейные комбинации) [10]. В методе ВКБ выбор решения достигается соответствующим выбором знака в экспоненте.

Метод ВКБ заключается в следующем [11—13]. На интервале:  $I: a < x < d$ , который может быть как конечным, так и бесконечным, рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$y^n(x) - Q(x)y(x) = 0.$$

Функция  $Q(x) \in C^2(I)$  — комплексно-значная и удовлетворяет условию  $Q(x) \neq 0$  при  $x \in I$ . Тогда решение будет выглядеть так:

$$y(x) \approx C Q^{-1/4}(x) \exp \left\{ \pm \int_a^x \sqrt{Q(x)} dx \right\},$$

где  $C$  — const. Два знака отвечают различному типу продолжения: прямому и обращенному.

Сделаем еще одно замечание: дифференциальное уравнение второго порядка  $z'' + p(x)z' + q(x)z = 0$ , заменой  $z(x) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_a^x p(t) dt \right\} y(x)$ , где  $y(x)$  — новая переменная, можно привести к виду  $y'' + \left( q - \frac{1}{4} p^2 - \frac{1}{2} p' \right) y = 0$ .

### ВЫВОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДМО МЕТОДОМ ВКБ

Итак, мы рассматриваем уравнение (1). Для начала введем безразмерные переменные:  $\xi = \frac{X}{L}$ ,  $\eta = \frac{h}{H}$  а для того, чтобы избавиться от переменного коэффициента при смешанной производной, введем логарифмическую переменную:  $\chi = \ln \frac{\tau}{\tau_0}$ . В безразмерных переменных уравнение примет следующий вид:

$$\eta \frac{H^2}{L^2} u_{\xi\xi} - \eta u_{\eta\eta} - u_{\chi\eta} = 0. \quad (3)$$

Воспользуемся преобразованием Фурье и переведем переменные  $\xi$  и  $\chi$  в частоты  $k$  и  $\omega$  соответственно. Уравнение (3) примет следующий вид:

$$-k^2 \eta \frac{H^2}{L^2} \tilde{u} - \eta \tilde{u}_{\eta\eta} - i\omega \tilde{u}_\eta = 0,$$

где

$$\tilde{u}(k, \omega, \eta) = \iint u(\xi, \chi, \eta) \exp(ik\xi + i\omega\chi) d\xi d\chi.$$

Обозначим  $A^2 = k^2 H^2 / L^2$ . Тогда окончательно получаем:

$$\tilde{u}_{\eta\eta} + I(\omega/\eta) \tilde{u}_\eta + A^2 \tilde{u} = 0. \quad (4)$$

Искомому решению отвечает предел при  $\eta \rightarrow 0$ . Но в этом случае возникает особенность в коэффициенте при первой производной. Чтобы ее избежать, делается новая замена:  $\lambda = \ln \eta$ . Поскольку переменная  $\eta$  изменяется в пределах:  $\eta \in [0, 1]$ , то  $\lambda \in [-\infty, 0]$ , при этом решение, которое нас интересует, отвечает пределу при  $\lambda \rightarrow -\infty$ . Тогда получаем:

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{d\lambda^2} + B \frac{d\tilde{u}}{d\lambda} + A^2 e^{2\lambda} \tilde{u} = 0, \quad (5)$$

где  $B = i\omega - 1$ .

Для того, чтобы воспользоваться методом ВКБ, произведем следующую замену:

$$\tilde{u}(\lambda) = \exp\left\{\frac{1}{2} \int_{\lambda}^0 p(\mu) d\mu\right\} y(\lambda) = \exp\left\{\frac{1}{2} \int_{\lambda}^0 B d\mu\right\} y(\lambda).$$

В результате этой замены получим

$$y'' + y \left( A^2 e^{2\lambda} - \frac{B^2}{4} \right) = 0. \quad (6)$$

Тогда, согласно методу ВКБ, на интервале  $\lambda \in [\lambda_0, 0]$  для уравнения (6) получим следующее приближенное решение:

$$\tilde{u}(\lambda) \approx C Q^{-1/4}(\lambda) \exp\left\{\int_{\lambda}^0 \left(\frac{B}{2} \pm \sqrt{Q(\mu)}\right) d\mu\right\},$$

где  $Q(\lambda) = \frac{B^2}{4} - A^2 e^{2\lambda}$ . Константа  $C$  определяется из краевых условий:  $C = \tilde{u}_h Q^{1/4}(\lambda = 0)$ , здесь  $\tilde{u}_h$  — краевое условие при  $h = H$  после соответствующего преобразования Фурье. И окончательно:

$$\tilde{u}(\lambda) \approx \tilde{u}_H Q^{1/4}(0) Q^{-1/4}(\lambda) \exp\left\{\int_{\lambda}^0 \left(\frac{B}{2} \pm \sqrt{Q(\mu)}\right) d\mu\right\}. \quad (7)$$

Выбор знака перед корнем под знаком интеграла определяется смыслом задачи. При продолжении поля в область меньших значений  $h$  выбирается знак „минус“. Устремляя  $\lambda \rightarrow -\infty$ , получим требуемое решение уравнения (4).

### ПОСТРОЕНИЕ ОКОНЧАТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

В этом разделе обсуждается вычисление интеграла в (7) при  $\lambda \rightarrow -\infty$ . Проблема состоит в том, что при аналитическом вычислении этого интеграла (а он сводится к табличному) при  $\lambda \rightarrow -\infty$  получается

неопределенность типа  $\infty/\infty$ . Поэтому мы разобьем его на два интеграла:  $\int_{\lambda}^{\lambda_0} = \int_{\lambda}^0 + \int_0^{\lambda_0}$ , первый мы будем

считать аналитически, а для второго используем разложение в ряд Тейлора (при условии, что  $\lambda_0$  лежит в круге сходимости этого ряда), а затем перейдем к пределу при  $\lambda \rightarrow -\infty$ . Подынтегральная функция равна

$$\frac{B}{2} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4} - A^2 e^{2\lambda}} = \frac{B}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4A^2}{B^2} e^{2\lambda}} \right).$$

Обозначим  $b^2 = \frac{4A^2}{B^2} = \frac{4k^2 H^2}{L^2(i\omega - 1)}$  и разложим в ряд Тейлора функцию  $\sqrt{1 - b^2 e^{2\lambda}}$ , получим:

$$\sqrt{1 - b^2 e^{2\lambda}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n!} b^{2n} e^{2n\lambda},$$

где  $m = \frac{1}{2}$ .

Уже отмечалось, что в формуле (7) по физическому смыслу задачи нужно выбрать знак „минус“. Следует заметить, что именно в этом случае мы получаем сходящийся при  $\lambda \rightarrow -\infty$  интеграл. Заметим также, что величина  $B/2$  не зависит от  $\lambda$  и может быть вынесена за знак интеграла, поэтому мы будем интегрировать без нее, а потом внесем его в конечную формулу. Вычислим интеграл:

$$I = \int_{\lambda}^{\lambda_0} (1 - \sqrt{1 - b^2 e^{2\lambda}}) d\lambda = \int_{\lambda}^{\lambda_0} \left( 1 - 1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n!} b^{2n} e^{2n\lambda} \right) d\lambda.$$

Поскольку ряд сходящийся, то можно внести интеграл под знак суммы. Следовательно

$$\begin{aligned} I &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n!} b^{2n} \frac{e^{2n\lambda}}{2n} \Bigg|_{\lambda}^{\lambda_0} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n!} b^{2n} \frac{e^{2n\lambda_0}}{2n} \approx \\ &\approx \frac{b^2}{4} e^{2\lambda_0} + \frac{b^4}{32} e^{4\lambda_0} = \frac{A^2}{B^2} e^{2\lambda_0} + \frac{A^4}{2B^4} e^{4\lambda_0}. \end{aligned}$$

(В разложении Тейлора мы используем только первые два члена, поскольку они дают наибольший вклад в предельное значение интеграла при  $n \rightarrow \infty$ .)

Далее считаем первый интеграл, учитывая знак „минус“:

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_0}^0 (1 - \sqrt{1 - b^2 e^{2\lambda}}) d\lambda &= (\text{замена } e^{2\lambda} = y) = -\lambda_0 - \int_{e^{2\lambda_0}}^1 \frac{\sqrt{1 - b^2 y}}{2y} dy = \\ &= -\lambda_0 - \frac{1}{2} \left( 2\sqrt{1 - b^2 y} + \ln \frac{\sqrt{1 - b^2 y} - 1}{\sqrt{1 - b^2 y} + 1} \right) \Bigg|_{\lambda_0}^1 = \\ &= -\lambda_0 - \left( \sqrt{1 - b^2} - \sqrt{1 - b^2 e^{2\lambda_0}} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1 - b^2} - 1}{\sqrt{1 - b^2} + 1} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1 - b^2 e^{2\lambda_0}} - 1}{\sqrt{1 - b^2 e^{2\lambda_0}} + 1} \right). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$Q^{-1/4}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{B^2}{4} - A^2 e^{2\lambda}}} \rightarrow \sqrt{\frac{2}{B}} \quad \lambda \rightarrow -\infty.$$

И в результате мы получаем приближенное решение уравнения (4) при  $\lambda \rightarrow -\infty$ :

$$\tilde{u}(k, \omega, \lambda = -\infty) = \tilde{u}_H(k, \omega) \sqrt[4]{1 - b^2} \exp \left( \frac{B}{2} \left( \frac{A^2}{B^2} e^{2\lambda_0} + \frac{A^4}{2B^4} e^{4\lambda_0} \right) \right) \times$$

$$\times \exp \left( -\frac{B}{2} \left( \lambda_0 + \sqrt{1 - b^2} - \sqrt{1 - b^2 e^{2\lambda_0}} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1 - b^2} - 1}{\sqrt{1 - b^2} + 1} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1 - b^2 e^{2\lambda_0}} - 1}{\sqrt{1 - b^2 e^{2\lambda_0}} + 1} \right) \right),$$

где

$$b^2 = \frac{4A^2}{B^2} = \frac{4k^2 H^2}{L^2(i\omega - 1)}, \quad \tilde{u}_H(k, \omega) = \iint u_H(X(\xi), t(\chi)) \exp(ik\xi + i\omega\chi) d\xi d\chi.$$

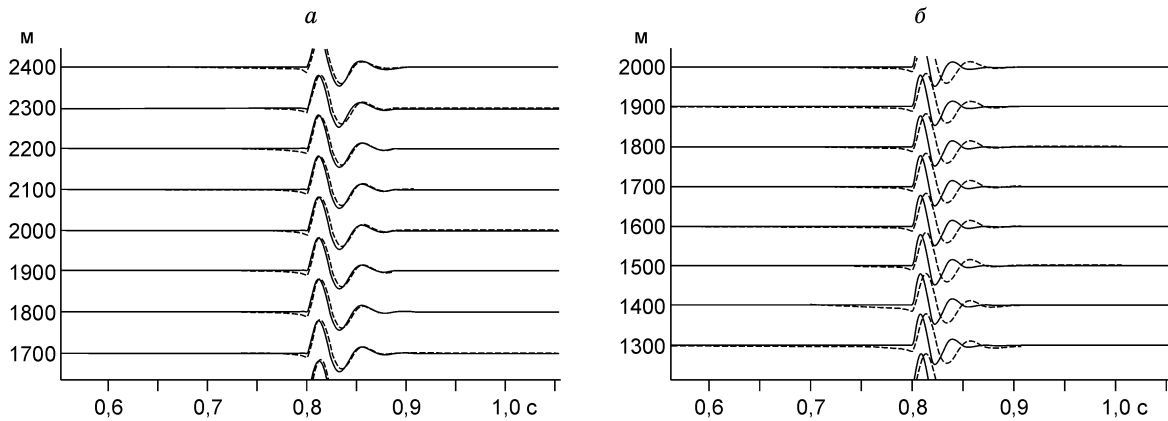
После вычисления  $\tilde{u}(k, \omega, \lambda = -\infty)$  находим решение краевой задачи (1), (2) при  $h = 0$ :

$$u(X, h = 0, t) = \iint \tilde{u}(k, \omega, \lambda(h) = -\infty) \exp(-ik\xi(X) - i\omega\chi(t)) dk d\omega.$$

### ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

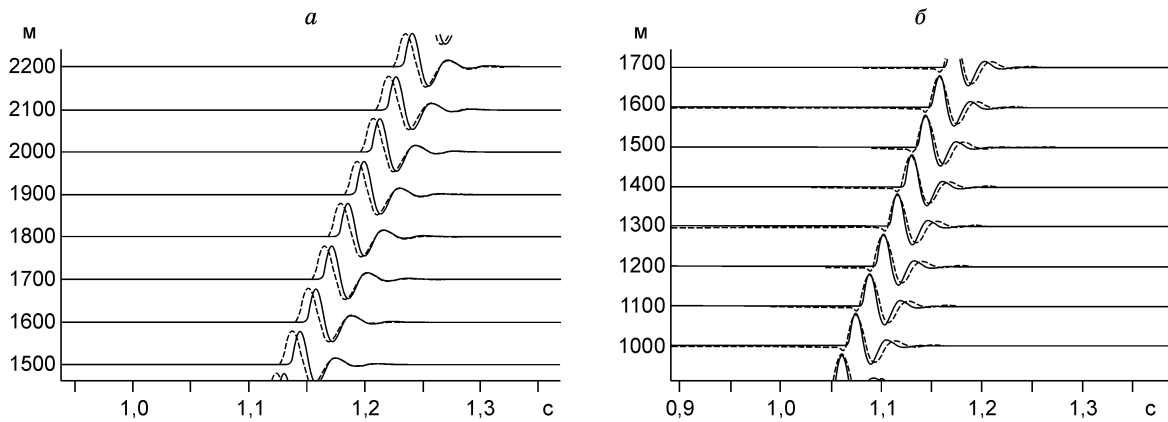
Для численных расчетов брались следующие данные: скорость распространения волн в среде  $V = 2500$  м/с, глубина залегания границы в первой точке профиля 1000 м, длина профиля 3200 м, половина максимального расстояния источник—приемник  $H = 1000$  м. В качестве сигнала выбирался импульс Берлаге:  $F(t) = a_0 t e^{-\beta t} \sin(\omega_0 t)$  с параметрами  $a_0 = 10$ ,  $\beta = 100$  и  $\omega_0 = 30$ . На рис. 1—3 по вертикали откладываются координаты приемников по профилю в метрах, по горизонтали время в секундах.

В качестве теста использовалась модель с горизонтальной отражающей границей. Для лучшей наглядности, предлагаемые рисунки это только части полученных сейсмограмм, для криволинейной границы мы привели два самых худших куска полученной сейсмограммы. Как известно, в этом случае оператор ДМО сводится к единичному оператору (т. е. он не должен изменять сейсмограмму). Соответствие теории иллюстрируется на рис. 1, а. На рис. 1, б, где дано сопоставление результата ДМО с точной



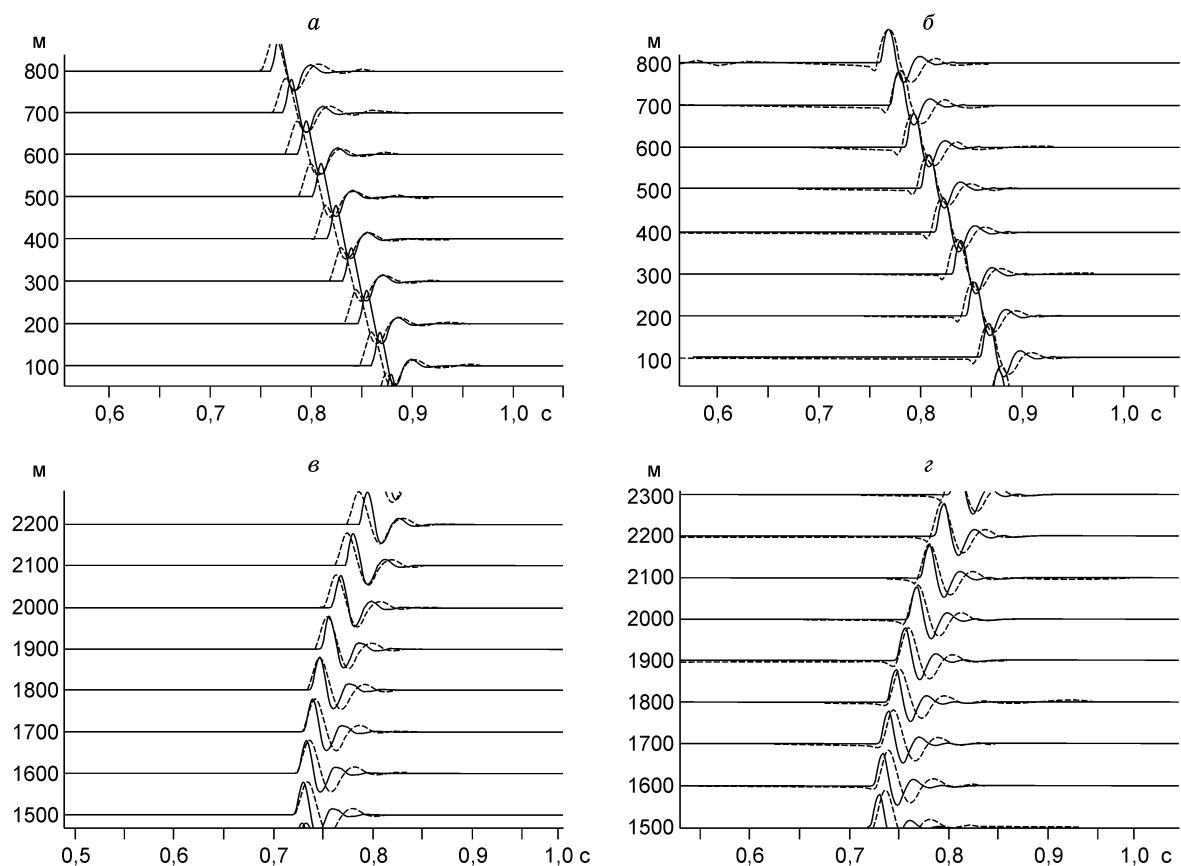
**Рис. 1. Горизонтальная граница.**

а — данные после кинематической поправки (сплошная) и данные после применения метода (штриховая); б — данные для нулевого выноса источник—приемник (сплошная) и данные после применения метода (штриховая).



**Рис. 2. Наклонная граница, угол 10°.**

Данные для нулевого выноса источник—приемник (сплошная) и данные: а — после кинематической поправки (штриховая); б — после применения метода (штриховая).



**Рис. 3. Синусоида.**

Данные для нулевого выноса источник—приемник (сплошная) и данные: *а, в* — после кинематической поправки (штриховая); *б, г* — после применения метода (штриховая).

сейсмограммой совмещенных источников и приемников, видно, что форма сигнала на преобразованной сейсмограмме искажена, но это искажение, очевидно, полностью обязано явлению „растяжки“ сигнала при внесении кинематической поправки. На рис. 2 приведены результаты для плоской отражающей границы, наклоненной под углом  $10^\circ$ . На рис. 2, *а* дано сопоставление сейсмограммы нулевых удалений с сейсмограммой, полученной из исходной внесением кинематической поправки, а на рис. 2, *б* — сопоставление сейсмограммы нулевых удалений с сейсмограммой, полученной по методу ДМО. Аналогично составлен иллюстративный материал на рис. 3, *а—г* для модели с криволинейной отражающей границей. Криволинейная граница была выбрана в виде отрезка синусоиды с амплитудой 200 м и периодом, совпадающим с длиной профиля. Как мы видим, разработанный алгоритм гарантирует точность определения времени  $t_0$  в пределах 1 мс. Изменение видимой частоты сигнала (как вдвое больше, так и вдвое меньше) практически не сказывается на точности в оценке времени прихода сигнала.

#### ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что метод ВКБ позволяет построить кинематически эквивалентное решение уравнения ДМО, которое, как видно из численных экспериментов, дает достаточную точность как для плоских отражающих границ, так и для криволинейных границ с небольшими перепадами глубин.

Работа выполнена при частичной поддержке Министерства образования РФ (грант № Е02-9.0-13, Новосибирский государственный университет) и гранта РФФИ № 04-05-64211-а.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Hale D.** Dip moveout by Fourier transform // *Geophysics*, 1984, v. 49, p. 384—406.
2. **Фомель С.Б.** Кинематически эквивалентный дифференциальный оператор продолжения сейсмограмм отраженной волны по удалениям // *Геология и геофизика*, 1994, т. 35 (9), с. 146—160.

3. **Bolondi G., Loinger E., Rocca F.** Offset continuation of seismic section // *Geophys. Prosp.*, 1982, v. 30, № 6, p. 813—828.
4. **Notfors C.D., Godfrey R.J.** Dip moveout in the frequency-wavenumber domain // *DMO processing* / Ed. D. Hale. *Geophysics reprint series*, 1995, № 16, p. 211—214.
5. **Cabrera J.C., Levy S.** Shot dip moveout with logarithmic transformations // *Ibid.*, p. 222—225.
6. **Liner C.L.** General theory and comparative anatomy of dip moveout // *Ibid.*, p. 251—263.
7. **Гольдин С.В.** Геометрический подход к сейсмовидению: реализация контактных отображений // *Сибирский журнал вычислительной математики*, 2003, т. 6, № 4, с. 1—23.
8. **Гольдин С.В., Фомель С.Б.** Оценка коэффициента отражения при построении временных разрезов по методу ДМО // *Геология и геофизика*, 1995, т. 36 (4), с. 103—115.
9. **Гольдин С.В., Герман Е.** Амплитудный анализ продолжения сейсмического волнового поля по удалениям // *Геология и геофизика*, 2004, т. 45, с. 1145—1153.
10. **Гольдин С.В.** К общей теории продолжения волновых полей. Новосибирск, 1986, ИГиГ СО АН СССР, 45 с. (Препр. ИГиГ, № 8).
11. **Федорюк М.В.** Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Наука, 1983, 352 с.
12. **Фреман Н., Фреман П.У.** ВКБ-приближение. М., Мир, 1967, 168 с.
13. **Хединг Дж.** Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). М., Мир, 1965, 238 с.

*Рекомендована к печати 18 марта 2005 г.  
С.В. Гольдиным*

*Поступила в редакцию  
14 декабря 2004 г.*