УЧЕТ УГЛОВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАДИАЦИИ В ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СЛАБЫХ ТЕРМИЧЕСКИХ ВОЛН

В. А. Прокофьев (Москва)

В статье установлены критерии существования в безграничной среде слабых плоских вынужденных волн, индуцированных радиацией.

На основании уравнений радиационной газовой динамики при произвольном (двупараметрическом) уравнении состояния газа вычислены и проанализированы параметры распространения волн (коэффициенты затухания и мера дисперсии скорости), во всем диапазоне определяющих движение безразмерных чисел (отношение удельных теплоемкостей, число Больцмана, число Буге). Учтены собственное термическое излучение, поглощение радиации газом и распределение интенсивности излучения по направлениям. Радиационные характеристики взяты в осредненном по частотам виде. В работе приведено также сравнение индуцированных радиацией волн с волнами давления. Показано отличие полученных результатов от результатов анализа с осреднением интенсивности радиации по направлениям

Обозначения

γ — отношение удельных теплоемкостей;

c_0 — адиабатическая скорость звука;

σ — заданная циклическая частота вынужденных колебаний;

ζ_1^{-1} — излучательная способность газа;

Z^{-1} — число Больцмана, отнесенное к скорости звука;

$(2\pi v)^{-1}$ — число Буге (оптическая длина звуковой волны);

ω — объемный коэффициент поглощения радиации;

$(2\pi\eta)^{-1}$ — оптическая длина волны;

$2\pi\alpha_{10}$ — коэффициент поглощения волн на длине звуковой волны той же частоты;

α_τ — коэффициент поглощения волн на длине свободного пробега радиации;

$2\pi\alpha_1$ — коэффициент поглощения на длине волны (истинный коэффициент поглощения);

r — мера дисперсии скорости (отношение фазовой скорости волны к скорости звука).

Распространение плоских вынужденных гармонических возмущений бесконечно малой амплитуды в идеальной сжимаемой покоящейся безграничной жидкости описывается с учетом притока тепла за счет термического излучения характеристическим уравнением: [1]

$$\frac{1}{2q}\ln\frac{1+q}{1-q} = 1 + \gamma i\zeta_1 \frac{1+m^2}{1-m^2}$$

$$q = q_r + iq_i = mv, \qquad m = m_r + im_i = ac_0 / \sigma \tag{0.1}$$

$$v = \sigma / c_0\omega, \qquad Z = 16\sigma' T^3 / \rho c_v c_0, \qquad \zeta_1 = v / Z$$

Здесь ρ, T — плотность и температура невозмущенного газа, c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме, σ' — постоянная Стефана — Больцмана. Искомой величиной будет комплексный показатель a функции $\exp(ax + i\sigma t)$, которой пропорциональны все газодинамические параметры, либо (что все равно) безразмерные величины m или q.

При выводе использовано осредненное по оптическим частотам уравнение переноса радиации с точным учетом углового распределения интенсивностей. В левой части (0.1) берется одна ветвь логарифмической функции с аргументом в интервале $(0-\pi)$. Равенство (0.1) — четная функция от m, причем знаки действительной и мнимой частей каждого корня одинаковы: от начала координат в обе стороны движутся симметричные плоские затухающие волны.

При любых Z, v, γ существует пара корней ($\pm m^{(1)}$) характеристического уравнения, описывающая распространение волн давления (см. работу [1]).

При определенных условиях имеется еще вторая пара корней ($\pm m$). Ей соответствуют термические радиационные волны, возбуждаемые в среде радиационным теплообменом. Иных случаев нет. В дальнейшем рассматриваются положительные действительные и мнимые части корней, что не ограничивает общности выводов.

Существование индуцированных радиацией волн, не имеющих аналогов в гидродинамике непоглощающего газа, установлено ранее [2-6]. Все параметры волн легко выражаются через действительную m_r и мнимую m_i части корней

$$\alpha_{10} = m_r, \quad \alpha_\tau = q_r = m_r v, \quad \alpha_1 = m_r / m_i, \quad \eta = m_i v, \quad r = m_i^{-1}, \quad \alpha_a{}^1 = \sigma c_0^{-1} m_r \tag{0.2}$$

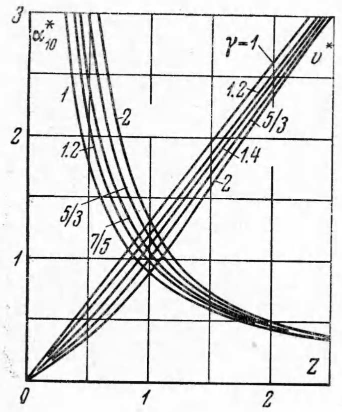
Здесь $\alpha^1{}_a$ — коэффициенты затухания волн в расчете на единицу длины.

§ 1. Условия существования индуцированных радиаций волн. Из (0.1) следует, что для каждых значений γ и Z действительная и мнимая части второго корня — монотонно убывающие функции v. При стремлении v к некоторому значению v^* мнимая часть корня стремится к нулю (скорость волн при этом стремится к бесконечности). Действительная часть корня отлична от нуля во всей области $v < v^*$. Для всех значений $v \geqslant v^*$ второй корень не существует.

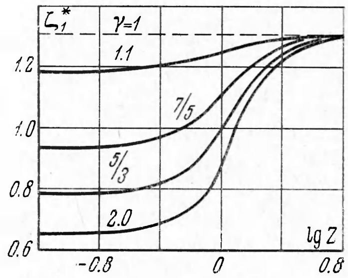
Предельные значения параметров (обозначены звездочками) определятся уравнением (0.1), если в нем m_i устремить к нулю

$$\alpha_\tau^* = \operatorname{cth} \alpha_\tau^*, \qquad \pi(\gamma v^{*2} + \alpha_\tau^{*2}) = 2\gamma\zeta_1\alpha_\tau^*(v^{*2} + \alpha_\tau^{*2}) \tag{1.1}$$

Корень первого уравнения [7] $\alpha_\tau^* = 1.199678$ и соответствует обращению потока радиации в нуль. Второе уравнение накладывает ограничения на ζ_1 (или Z), v, γ. Отсюда для каждого γ и Z определится единственное положительное значение v^* или ζ_1^* (фиг. 1,2).



Фиг. 1



Фиг. 2

В случае пьезотропной среды ($\gamma = 1$) не только α_τ^*, но и ζ_1^* будут универсальными постоянными. Из (1.1) имеем

$$v^* = \tfrac{1}{2}\pi Z / \alpha_\tau^* = 1.309348\, Z, \qquad \zeta_1^* = \tfrac{1}{2}\pi / \alpha_\tau^* = 1.309348,$$
$$\zeta^* = \zeta_1^{*-1} = 0.7637383, \qquad \alpha_{10}^* = 0.916240 Z^{-1} \tag{1.2}$$

При любых γ и Z число ζ_1^* заключено в интервале

$$\pi(2\gamma\alpha_\tau^*)^{-1} \leqslant \zeta_1^* \leqslant \pi(2\alpha_\tau^*)^{-1} \tag{1.3}$$

При $Z \ll 1$ ($s = \tfrac{1}{2}\pi Z \alpha_\tau^{*-2} = 1.091417Z$)

$$\alpha_{10}^* = \gamma s^{-1}\left[1 - (\gamma - 1)\gamma^{-2}s^2 + (\gamma - 1)(2 - \gamma)\gamma^{-4}s^4 + \cdots\right]$$
$$v^* = \alpha_\tau^*\gamma s^{-1}\left[1 + (\gamma - 1)\gamma^{-2}s^2 + (\gamma - 1)(2\gamma - 3)\gamma^{-4}s^4 + \cdots\right] \tag{1.4}$$

При $Z \gg 1$ зависимость параметров от γ исчезает

$$\alpha_{10}^* = s^{-1}\left[1 + (\gamma - 1)\gamma^{-1}s^{-2} + (\gamma - 1)(2\gamma - 3)\gamma^{-2}s^{-4} + \cdots\right]$$
$$v^* = \alpha_\tau^* s\left[1 - (\gamma - 1)\gamma^{-1}s^{-2} + (\gamma - 1)(2 - \gamma)\gamma^{-2}s^{-4} + \cdots\right] \tag{1.5}$$

Если γ близко к единице ($\gamma - 1 = \delta \ll 1$), то имеем

$$\alpha_{10}^* = \frac{1}{s}\left[1 + \frac{\delta}{1 + s^2} + \frac{s^2(1 - s^2)}{(1 + s^2)^3}\delta^2 + \frac{s^2(s^6 - 2s^4 + 4s^2 - 1)}{(1 + s^2)^5}\delta^3 + \cdots\right] \tag{1.6}$$

$$v^* = \alpha_\tau^* s\left[1 - \frac{\delta}{1 + s^2} + \frac{1 + s^4}{(1 + s^2)^3}\delta^2 - \frac{s^8 + 5s^4 - s^2 + 1}{(1 + s^2)^5}\delta^3 + \cdots\right] \tag{1.7}$$

С ростом Z величина v^* и ее производная монотонно возрастают от значений (1.4), пропорциональных Z и обратно пропорциональных γ, до значений (1.5), обратно пропорциональных Z, асимптотически приближаясь к своему значению для пьезотропной среды. При любом Z значение v^* тем меньше, чем больше γ. Число ζ_1^* с ростом Z монотонно возрастает от $\pi(2\gamma\alpha_\tau^*)^{-1}$ до своего значения $\pi(2\alpha_\tau^*)^{-1}$ для пьезотропной среды. Кривая $\zeta_1^*(Z)$ имеет единственную точку перегиба. При любом Z значение ζ_1^* тем больше, чем меньше γ.

Фиг. 1 также дает зависимость Z^* (v) или Z^* ($l_{\tau 0}$). Для заданных γ и $l_{\tau 0}$ термические волны образуются лишь при $Z > Z^*$. Для каждой заданной оптической длины акустической волны $l_{\tau 0}$ существует предельное значение Z, ниже которого термические волны не возбуждаются: за границу звуковой волны выходит недостаточное для индуцирования новых волн количество радиационной энергии. При заданных γ, Z термические волны возбуждаются только тех частот, которым соответствуют звуковые волны с оптическими длинами, не меньшими величины $l_{\tau 0}^* = 2\pi v^{*-1}$.

Поток радиации с ростом v от 0 до v^* возрастает от 0 до максимума, а затем снова падает до 0 при $v \to v^*$. Предельное значение коэффициента поглощения на длине звуковой адиабатической волны α_{10}^* монотонно убывает с ростом Z (фиг. 1); его величина тем больше, чем больше γ при одном и том же Z. Для больших Z он совпадает со своим значением в пьезотропной среде. Коэффициент поглощения на длине свободного пробега радиации в пределе равен постоянной величине α^*_τ для всех γ, Z. Скорость и длина волны в пределе становятся бесконечными, гармонические возмущения радиационного поля в координатной плоскости порождают экспоненциально затухающие в пространстве колебания всей среды как целого. Бегущие волны не образуются.

Термические радиационные волны существуют при $\zeta_1 > \zeta^*_1$. Это условие, в силу (1.10) статьи [1], перепишется так:

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_T} > \frac{\varepsilon_2^*}{\varepsilon_T^*} = \frac{1}{\alpha_\tau^*}\frac{\gamma v^{*2} + \alpha_\tau^{*2}}{\gamma(v^{*2} + \alpha_\tau^{*2})} \tag{1.8}$$

Волны могут возникать лишь при таких условиях в среде и при таких частотах вынуждающих колебаний, когда отношение излучаемой единицей массы газа за период колебаний радиационной энергии к массовой плотности внутренней термической энергии газа становится не меньше некоторой предельной величины порядка единицы.

Поведение параметров волн в окрестности предельной точки $\alpha_\tau = \alpha^*_\tau$, $\eta = 0$ определяется соотношениями

$$\alpha_\tau = \alpha_\tau^* + A_1(v - v^*), \qquad \eta = A_2(v - v^*)$$

$$A_1 = -\gamma R^{-1}\alpha_\tau^*\zeta_1^*\varphi^*(\alpha_\tau^* - 1)^2\{(v^2 + \alpha_\tau^{*2})\chi^{*2} + 2v^{*2}[2\gamma\chi^{*2} - \psi^{*2}(\chi^* + \gamma\psi^*)]\}$$

$$R = \gamma^2 Z\zeta_1^{*2}(\alpha_\tau^{*2} - 1)^2[(v^{*2} + 5\alpha_\tau^{*2})\chi^{*2} - 2\alpha_\tau^{*2}\psi^*(\chi^* + \psi^*)] + \tag{1.9}$$

$$+ \alpha_\tau^{*4}(\gamma v^{*2} + \alpha_\tau^{*2})\chi^{*3}, \qquad \psi^* = \pi\chi^*(2\gamma\zeta_1^*\alpha_\tau^*)^{-1}$$

$$A_2 = \chi^*\alpha_\tau^{*2}A_1[\gamma\zeta_1^*\varphi^*(\alpha_\tau^{*2} - 1)]^{-1}$$

$$\varphi^* = \psi^* + 2(\gamma - 1)\alpha_\tau^{*2}v^{*2}, \qquad \chi^* = (\gamma v^{*2} + \alpha_\tau^{*2})^2$$

Величины A_1, A_2 — отрицательные, монотонно убывающие по модулю с ростом Z (и v) и возрастающие с ростом γ ($1 \leqslant \gamma \leqslant 2$), причем

$$A_1 \approx -0.12615\gamma Z^{-1}, \qquad A_2 \approx -0.31570\gamma Z^{-1} \qquad (Z \ll 1)$$

$$\left.\begin{aligned} A_1 &\approx -0.12615[\gamma + 4(\gamma^2 - 1)](\gamma Z)^{-1} \\ A_2 &\approx -0.31570[\gamma + 4(\gamma^2 - 1)](\gamma Z)^{-1} \end{aligned}\right\} \quad (Z \gg 1) \tag{1.10}$$

§ 2. **Пьезотропная среда**. Законы распространения волн в газе и при $\gamma \neq 1$, начиная с некоторых ζ_1, в первом приближении совпадают с законами для пьезотропной среды, если Z достаточно велико, и описываются подобными им законами, если Z мало. Уравнение (0.1) при $\gamma = 1$ распадаются на два

$$m^2 + 1 = 0, \qquad {}^1\!/_2 q^{-1}\ln[(1 + q)/(1 - q)] = 1 + i\zeta_1 \tag{2.1}$$

Первым уравнением описывается движение со скоростью звука незатухающих волн давления. Второе дает законы движения термических радиационных волн. Оно эквивалентно системе

$$\mu = \alpha_\tau - \zeta_1\eta, \qquad \nu = \eta + \zeta_1\alpha_\tau$$

$$\mu \equiv \frac{1}{4}\ln\frac{(1 + \alpha_\tau)^2 + \eta^2}{(1 - \alpha_\tau)^2 + \eta^2} \tag{2.2}$$

$$\nu \equiv \begin{cases} {}^1\!/_2 \operatorname{arc\,tg}[2\eta(1 - \alpha_\tau^2 - \eta^2)^{-1}], & \alpha_\tau^2 + \eta^2 < 1 \\ {}^1\!/_2\{\pi - \operatorname{arc\,tg}[2\eta(\alpha_\tau^2 + \eta^2 - 1)^{-1}]\}, & \alpha_\tau^2 + \eta^2 > 1 \end{cases}$$

Искомый корень зависит только от ζ_1. При $\alpha_\tau^2 + \eta^2 = 1$ получаем $\alpha_\tau = 0.89666540$, $\eta = 0.44270888$, $\zeta_1 = 0.38218189$. Из (2.2) видно, что $\alpha_1 \geqslant 1$ (равенство при $\alpha_\tau = \eta = 0$), форма гармонических колебаний в волне не сохраняется, индуцируются почти экспонциально затухающие возмущения. При малых ζ_1 решение дается разложениями

$$\alpha_\tau = \sqrt{1.5\zeta_1}\,(1 + a_1\zeta_1 - a_2\zeta_1^2 - a_3\zeta_1^3 - a_4\zeta_1^4 + \cdots)$$

$$\eta = \sqrt{1.5\zeta_1}\,(1 - a_1\zeta_1 - a_2\zeta_1^2 + a_3\zeta_1^3 - a_4\zeta_1^4 + \cdots)$$

$$\alpha_1 = 1 + 2a_1\zeta_1 + 2a_1^2\zeta_1^2 + 2\,(a_1^3 + a_1a_2 - a_3)\,\zeta_1^3 + 2a_1\,(a_1^3 - 2a_1a_2 - 2a_3)\,\zeta_1^4 + \cdots \tag{2.3}$$

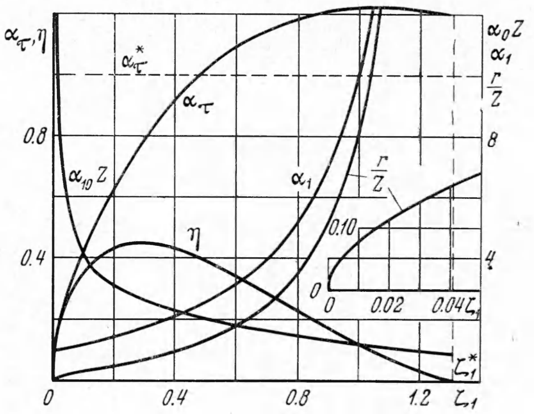
$$r = \sqrt{2z_1}\,[1 + a_1\zeta_1 + (a_1^2 + a_2)\,\zeta_1^2 + (a_1^3 + 2a_1a_2 - a_3)\,\zeta_1^3 + (a_1^4 + 3a_1^2a_2 - 2a_1a_3 + a_2^2 + a_4)\,\zeta_1^4 + \cdots]$$

$$z_1 = \frac{1}{3}Zv, \quad a_1 = \frac{9}{10}, \quad a_2 = \frac{1269}{1400}, \quad a_3 = \frac{12\,699}{14\,000}, \quad a_4 = \frac{450\,672\,741}{21\,560\,000}$$

В первом приближении α_{10} и r зависят только от z_1. В окрестности предельного значения ζ_1^*

$$\alpha_\tau = \alpha_\tau^* - 0.12615\,(\zeta_1 - \zeta_1^*)$$

$$\eta = -0.31570\,(\zeta_1 - \zeta_1^*) \tag{2.4}$$



Фиг. 3

Параметры α_τ, $Z\alpha_{10}$, α_1, rZ^{-1}, η (фиг. 3) определяются только числом ζ_1. Коэффициент α_τ с ростом ζ_1 возрастает от 0 до максимальной величины (равной $\sim$1,22 при $\zeta_{1\max} \approx 1.05$), а затем убывает до предельного значения α_τ^*. Оптическое волновое число η также имеет единственный максимум (равный $\sim$0,46 при $\zeta_1 \approx 0{,}29$). Произведение $Z\alpha_{10}$ монотонно убывает от ∞ до предельного значения. При фиксированном ζ_1 коэффициент поглощения $\alpha_{10} \sim Z^{-1}$, а при фиксированном Z — тем меньше, чем больше v. Коэффициент поглощения α_1 монотонно возрастает от 1 до ∞. Величина rZ^{-1} монотонно возрастает от 0 до ∞ с ростом ζ_1 от 0 до ζ^*_1. При фиксированном ζ_1 отношение скоростей $r \sim Z$. В начале координат $dr\,/\,dv = \infty$.

Из фиг. 3 можно получить сведения и о зависимости параметров от ν. Кривая $\alpha_1\,(v)$ идет тем ниже, чем больше Z; кривые, соответствующие разным Z, не пересекаются. Коэффициент $\alpha_{10} \sim Z^{-1/2}$ при $v \ll 1$. Две кривые $\alpha_{10}\,(v)$, соответствующие Z_1 и Z_2, либо не пересекаются, либо пересекаются в одной точке. Пересечение имеет место, если v удовлетворяет одновременно неравенствам

$$\zeta_{1\max} Z_1 < v < \zeta_1^* Z_1, \quad \zeta_1^{**} Z_2 \leqslant v < \zeta_{1\max} Z_2, \quad Z_1 < Z_2 \tag{2.5}$$

(ζ^{**}_1 меньший корень уравнения $\alpha^*_\tau\,(\zeta_1) = 1$)

Кривая $\alpha_\tau\,(v)$ имеет максимум. Восходящая ветвь кривой тем выше, чем меньше Z. Восходящая ветвь кривой, соответствующей бóльшему Z, может пересекаться в одной точке с нисходящей ветвью кривой, соответствующей меньшему Z, если можно одновременно удовлетворить неравенствам (2.5). Заменой в (2.5) Z_1 на Z_2 ($Z_1 > Z_2$) получаются условия пересечения нисходящей ветви кривой, соответствующей меньшему значению Z, с восходящей ветвью кривой, отвечающей бóльшему Z.

Кривые $r\,(v)$ монотонно возрастают от 0 до ∞, в начале координат производная $dr\,/\,dv = \infty$. При малых v кривые идут тем выше, чем больше Z. Кривая, соответствующая фиксированному Z, пересекается один раз с каждой кривой, соответствующей другому Z; точка пересечения лежит тем правее и тем выше, чем большему Z соответствует вторая кривая. В любой точке положительного квадранта плоскости (r, v) пересекаются две кривые, соответствующие разным Z.

С ростом v оптическое волновое число η растет тем быстрее, чем меньше Z. Величина $\eta \sim Z^{-1/2}$ при малых v. Имеется максимум кривой, после чего $\eta\,(v)$ убывает до 0 в предельной точке. Кривые для разных Z по одному разу пересекаются (не считая начала координат), причем восходящая ветвь кривой, соответствующей большему Z, пересекается с нисходящей ветвью кривой, соответствующей меньшему Z.

Индуцированные волны — затухающие, волны давления — незатухающие: при всех частотах преобладают волны давления.

§ 3. **Малые числа Z.** При $Z \ll 1$ термические радиационные волны существуют лишь при $v \ll 1$, причем всюду $|m| \gg 1$, $|q| \leqslant 0$ (1). В первом приближении уравнение (0.1) принимает вид

$$\frac{1}{2q} \ln \frac{1+q}{1-q} = 1 + \gamma i \zeta_1 \tag{3.1}$$

что отличается от (2.2) заменой ζ_1 на $\gamma\zeta_1$. Последующие приближения найдутся, если положить (m_0 — корень уравнения (3.1))

$$m = m_0 (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \cdots) \tag{3.2}$$

Второе $m_0\varepsilon_1$ и третье $m_0\varepsilon_2$ приближения при $\zeta_1 = 0$ (1) определяются соотношениями ($\alpha_{\tau 0} = m_{r0} v$, $\eta_0 = m_{i0}\, v$)

$$\operatorname{Re} \varepsilon_1 = D\,[2A\alpha_{\tau 0}\eta_0 - B(\alpha_{\tau 0}^2 - \eta_0^2)]$$

$$\operatorname{Im} \varepsilon_1 = D\,[A(\alpha_{\tau 0}^2 - \eta_0^2) - 2B\alpha_{\tau 0}\eta_0]$$

$$\begin{gathered} A = 1 - C(1 - \alpha_{\tau 0}^2 - \eta_0^2), \qquad C = [(1 - \alpha_{\tau 0}^2 + \eta_0^2)^2 + 4\alpha_{\tau 0}^2\eta_0^2]^{-1} \\ B = \gamma\zeta_1 + 2\alpha_{\tau 0}\eta_0 C, \qquad D = \gamma(\gamma - 1)\, Zv\, (\alpha_{\tau 0}^2 + \eta_0^2)^{-2} (A^2 + B^2)^{-1} \end{gathered} \tag{3.3}$$

$$\begin{gathered} m_0^4 [1 + \gamma i\zeta_1 + (m_0^2 v^2 - 1)^{-1}]\, \varepsilon_2 = m_0^4 \varepsilon_1^2 [1 + \gamma i \zeta_1 + \\ + (2m_0^2 v^2 - 1)(m_0^2 v^2 - 1)^{-2}] - (\gamma - 1)\gamma i \zeta_1 (m_0^2 \varepsilon_1 + \gamma) \end{gathered} \tag{3.4}$$

При малых ζ_1 (одновременно $v \ll 1$, $Zv \ll 1$)

$$m_0 v = (1 + i)(^3/_2\gamma\zeta_1)^{1/2}, \qquad \varepsilon_1 = -ic_1\zeta_1, \qquad \varepsilon_2 = -c_2\zeta_1^2, \qquad \varepsilon_3 = -ic_3\zeta_1^3 \tag{3.5}$$

$$c_1 = {^9/_{10}}\gamma(1 - Z^2 / Z_0^2), \qquad Z_0^2 = 5.4\gamma^2 / (\gamma - 1)$$

$$c_2 = {^{1269}/_{1400}}\gamma^2 - {^3/_{20}}(\gamma - 1) Z^2 + {^1/_{72}}(\gamma - 1)(5 - \gamma)\gamma^{-2} Z^4$$

$$\begin{gathered} c_3 = 2c_1^3 + {^1/_6}c_1^2 (Z^2 - 81\gamma) - {^6/_{35}}\gamma c_1 (7Z^2 - 90\gamma) - \\ - c_2 [c_1 + {^1/_3}(2\gamma - 3) Z^2] + {^9/_{14}}\gamma^2 (Z^2 - 7\gamma) \end{gathered}$$

$$\alpha_{10} = Z^{-1} (^3/_2\gamma\zeta_1^{-1})^{1/2} (1 + c_1\zeta_1 - c_2\zeta_1^2 + c_3\zeta_1^3 + \cdots) \tag{3.6}$$

$$m_i = Z^{-1} (^3/_2\gamma\zeta_1^{-1})^{1/2} (1 - c_1\zeta_1 - c_2\zeta_1^2 - c_3\zeta_1^3 + \cdots)$$

$$\alpha_1 = 1 + 2c_1\zeta_1 - 2c_1^2\zeta_1^2 + 2(c_1^3 + c_1c_2 + c_3)\zeta_1^3 + \cdots$$

$$\begin{gathered} r = Z(^2/_3\gamma^{-1}\zeta_1)^{1/2} [1 + c_1\zeta_1 + (c_1^2 + c_2)\zeta_1^2 + \\ + (c_1^3 + 2c_1c_2 + c_3)\zeta_1^3 + \cdots] \end{gathered}$$

В окрестности $\zeta_1 = \zeta_1^*$

$$\begin{gathered} \alpha_\tau = [1 + (1 + \lambda^2)^{-1} (1 - v / v^*)]\, \alpha_\tau^* \\ \eta = \frac{\lambda\alpha_\tau^*}{1 + \lambda^2}\left(1 - \frac{v}{v^*}\right), \qquad \lambda = \frac{\alpha_\tau^{*2}}{\gamma\zeta_1^* (\alpha_\tau^{*2} - 1)} \end{gathered} \tag{3.7}$$

Итак, если $Z \ll 1$, то $\alpha_{10} \gg 1$ при любом $v < v^*$ и убывает с ростом v; при малых v коэффициент α_{10} обратно пропорционален корню квадратному из частоты. Термические радиационные волны при $Z \ll 1$ затухают гораздо быстрее волн давления той же частоты. Коэффициент $\alpha_1 \gg 1$ и растет с увеличением или уменьшением Z, форма волны искажается. Это скорее — экспоненциально затухающие начальные возмущения по несколько измененному закону Буге. Волны по существу не образуются. Скорость распространения мала при $v \ll 1$ и пропорциональна корню квадратному из частоты; с ростом v скорость и длина волны монотонно растут от 0 до ∞. Коэффициент α_τ и η возрастают от 0 до максимума, после чего $\alpha_\tau \to \alpha_\tau^*$, а $\eta \to 0$.

§ 4. **Большие числа Z.** При больших Z решение, описывающее термические радиационные волны, существует в широком диапазоне чисел v.

1) При $v \ll 1$, $Z v \ll 1$ справедливы разложения (3.6). Термические радиационные волны затухают гораздо сильнее, а распространяются гораздо медленнее волн давления и гораздо короче их. С ростом v коэффициенты α_1 и α_{10} убывают, а величины r, α_τ растут. Коэффициенты α_{10}, α_τ тем больше, чем больше γ и чем меньше Z. Скорость и длина волны тем больше, чем меньше γ и больше Z. Коэффициент α_1 с ростом γ и Z убывает.

2) При $v \leqslant 1$, $Zv = 0(1)$ искомый корень характеристического уравнения представится разложениями (4.2) статьи [1], где

$$m_{r0} = \frac{u_1}{\sqrt{2z_1}}, \qquad m_{i0} = \frac{u_1}{\sqrt{2z_1}} \qquad (1 \leqslant \gamma < 2) \tag{4.1}$$

$$u_1 = [{}^1/_2\gamma\,(a_5 + a_2 - z_1)]^{1/2}, \qquad u_2 = [{}^1/_2\gamma\,(a_5 - a_2 + z_1)]^{1/2} \tag{4.2}$$

$$a_5 = [1 + a_1 + z_1^2 - 2\,(a_2 z_1 - a_3)]^{1/2}$$

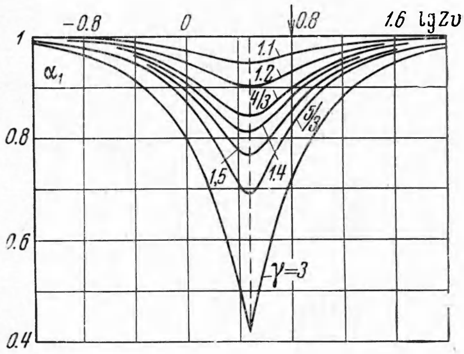
величины a_1, a_2, a_3 даны в статье [1]. В первом приближении

$$\alpha_{10} = u_1 / \sqrt{2z_1}, \quad \alpha_\tau = u_1 \sqrt{{}^3/_2\zeta_1}, \; \alpha_1 = u_1/u_2, \quad r = \sqrt{2z_1} / u_2, \quad \eta = u_2 \sqrt{{}^3/_2\zeta_1} \tag{4.3}$$

Из этих выражений получаются в первом приближении и формулы при $Z v \ll 1$ и при $v \ll 1$, $Zv \gg 1$, т. е. они пригодны в первом приближении, когда $v \ll 1$, $\zeta_1 \ll 1$. Обе пары корней порядка 1 и в первом приближении определяются числами Zv и γ. Коэффициент α_{10} монотонно убывает с ростом Zv. Коэффициент α_τ — малая величина, монотонно возрастающая с ростом Zv. Для фиксированного Zv коэффициент $\alpha_\tau \sim Z^{-1}$. Коэффициент α_1 (фиг. 4) имеет минимум

$$z_{1\,\min} = 1$$

$$\alpha_{1\,\min} = (1 + \sqrt{2 - \gamma}) / (1 + \sqrt{\gamma}) \tag{4.4}$$



Фиг. 4

Минимум тем меньше, чем больше γ (при $\gamma = 2, {}^5/_3, {}^3/_2, {}^7/_5, {}^4/_3, {}^6/_5, {}^{11}/_{10}$ соответственно $\alpha_{10\min} = 0.4142136$, 0.6885003, 0.7673269, 0.8128361, 0.8430390, 0.9041691, $0,9511225$). Скорость волн монотонно возрастает с ростом Zv, в этой области осуществляется переход от дозвуковых к сверхзвуковым скоростям. Величина η — малая, монотонно растет с ростом v (при заданном Z) и монотонно убывает с ростом Z (при заданном v). В области $Zv = 0\,(1)$ кривые $\alpha_{10}\,(v)$ (а также и $\alpha_{10}\,(\zeta_1)$) для одинаковых Z, но разных γ пересекаются, после пересечения выше идет кривая, соответствующая меньшему γ.

Отношение $m_2^{(21)}$ коэффициентов затухания термических радиационных волн и волн давления на фиксированной длине и отношение $\alpha_1^{(21)}$ истинных коэффициентов затухания в этой области достигают минимумов, больших единицы. При любом Z и малых v преобладают волны давления. Отношение скоростей и длин волн $r^{(21)}$ монотонно возрастает с ростом Zv и при $z_1 = {}^1/_2\,\gamma$ достигает единицы.

Если рассматривать $\gamma \geqslant 2$, то при $\gamma = 2$ имеем:

$$z_1 < 1 \tag{4.5}$$

$$\alpha_{10} = \sqrt{{}^1/_2\,(y_0 - 1)}, \qquad m_{i0} = \sqrt{{}^1/_2\,(y_0 + 1)}$$

$$\alpha_1 = [(y_0 + 1) / (y_0 - 1)]^{1/2}, \qquad y_0 = z_1^{-1}\,[2\,(1 + \sqrt{1 - z_1^2})]^{1/2}$$

$$z_1 = 1 \mp 0 \tag{4.6}$$

$$\alpha_{10} = \sqrt{{}^1/_2\alpha_1}, \qquad r = \sqrt{2\alpha_1}, \qquad \alpha_1 = \sqrt{2} - 1, \qquad d\alpha_1 / dz_1 = \mp\infty$$

$$z_1 > 1 \tag{4.7}$$

$$\alpha_{10} = \sqrt{1 - y_0'} \qquad \alpha_1 = \left(\frac{1 - y_0'}{1 + y_0'}\right)^{1/2}, \qquad y_0' = \left(\frac{z_1 - \sqrt{z_1^2 - 1}}{2z_1}\right)^{1/2}$$

$$m_{i0} = \sqrt{1 + y_0'},$$

Если $\gamma > 2$, то в (4.1) вместо a_5 следует подставить

$$a_5' = [1 + a_1 + z_1^2 - 2(a_2 z_1 + a_3)]^{1/2} \tag{4.8}$$

В точке $z_1 = 1$ при $1 < \gamma < 2$ коэффициенты поглощения волн давления $\alpha_{10}^{(1)}$, $\alpha_1^{(1)}$ [1] достигают максимумов, а для термических радиационных волн α_1 и отношение $\alpha^{(21)}$ достигают минимумов. Параметры обеих волн в этой точке равны

$$m_r^{(1)} = 1/2 [\sqrt{\gamma}(2 - \sqrt{2-\gamma} - \sqrt{\gamma})]^{1/2},$$
$$m_i^{(1)} = 1/2 [\sqrt{\gamma}(2 + \sqrt{2+\gamma} + \sqrt{\gamma})]^{1/2}, \quad \alpha_1^{(1)} = (1 - \sqrt{2-\gamma})(1 + \sqrt{\gamma})^{-1} < 1$$
$$m_r = 1/2 [\sqrt{\gamma}(2 + \sqrt{2-\gamma} - \sqrt{\gamma})]^{1/2}, \quad m_i = 1/2 [\sqrt{\gamma}(2 - \sqrt{2-\gamma} + \sqrt{\gamma})]^{1/2}$$
$$\alpha_1 = (1 + \sqrt{2-\gamma})(1 + \sqrt{\gamma})^{-1} < 1 \tag{4.9}$$
$$m^{(21)} = \frac{2 + \sqrt{2-\gamma} - \sqrt{\gamma}}{\sqrt{2}(\sqrt{\gamma} - 1)}, \quad \alpha^{(21)} = \frac{1 + \sqrt{2-\gamma}}{1 - \sqrt{2-\gamma}}, \quad r^{(21)} = \left(\frac{2 + \sqrt{2-\gamma} + \sqrt{\gamma}}{2 - \sqrt{2-\gamma} + \sqrt{\gamma}}\right)^{1/2}$$

В этой же точке при $\gamma \geqslant 2$

$$m_r^{(1)} = 1/2 [(\sqrt{2} - 1)(\gamma - \sqrt{\gamma(\gamma-2)})]^{1/2}$$
$$m_i^{(1)} = 1/2 [(\sqrt{2} + 1)(\gamma - \sqrt{\gamma(\gamma-2)})]^{1/2}, \quad \alpha_1^{(1)} = \alpha_1 = \sqrt{2} - 1$$
$$m_r = 1/2 [(\sqrt{2} - 1)(\gamma + \sqrt{\gamma(\gamma-2)})]^{1/2} \tag{4.10}$$
$$m_i = 1/2 [(\sqrt{2} + 1)(\gamma + \sqrt{\gamma(\gamma-2)})]^{1/2}$$
$$m^{(21)} = 1/2 \sqrt{2}(\sqrt{\gamma} + \sqrt{\gamma-2}) \geqslant 1, \quad r^{(21)} = 1/2 \sqrt{2}(\sqrt{\gamma} - \sqrt{\gamma-2}) \leqslant 1, \quad \alpha^{(21)} = 1$$

Коэффициенты α_1 обеих категорий волн в этой области при любом γ заключены между 0 и 1, и при $z_1 = 1$ с ростом γ коэффициенты разных категорий волн сближаются, а при $\gamma = 2$ сливаются так же, как и коэффициенты α_{10}. При дальнейшем увеличении γ при $z_1 = 1$ образуется угловая точка, если под волнами давления всегда понимать волны, непрерывно переходящие в звуковые на краях этой области (Z, v).

3) В случае $\zeta_1 \ll 1$, $Zv \gg 1$ при любых Z, v имеем

$$\alpha_{10} = 1/2 z_1^{-1} \sqrt{2z_1} [1 - f_1 + f_2 + O(k)], \quad \eta = \sqrt{3/2 \zeta_1} [1 + f_1 + f_2 + O(k)] \tag{4.11}$$
$$\alpha_1 = 1 = 2f_1 + 2f_1^2 + O(k), \quad r = \sqrt{2z_1} [1 - f_1 - f_2 + f_1^2 + O(k)]$$
$$f_1 = (\gamma - 1 - 3/5 \gamma v^2)(2\gamma z_1)^{-1}$$
$$f_2 = [(\gamma - 1)(7 - 3\gamma + 6\gamma v^2) - 141/175 \gamma^2 v^4](8\gamma^2 z_1^2)^{-1}$$
$$k = \zeta_1^m z_1^{-n} \ (n + m = 3; \ n, m = 0, 1, 2, 3)$$

В этой области α_{10}, α_τ, α_1, r тем больше, чем меньше γ.

Термические радиационные волны в этом диапазоне Z и v слабо затухают на длине звуковой волны и на длине свободного пробега радиации, причем $\alpha_{10} \sim v^{-1/2}$, $\alpha_\tau \sim v^{1/2}$, $\alpha_a^1 \sim v^{1/2}$. Поправка к первому приближению коэффициентов поглощения отрицательная, для $v < \bar{v}^* \approx [5(\gamma - 1) / (3\gamma)]^{1/2}$, и положительная для $v > \bar{v}^*$ (если $\gamma = 2$, $5/3$, $3/2$, $7/5$, $4/3$, $6/5$, $11/10$, то соответственно $\bar{v}^* = 0.91287$, 0.81650, 0.69007, 0.74536, 0.64550, 0.52705, 0.038925). Коэффициент α_1 при $v = \bar{v}^*$ достигает 1, после чего продолжает монотонно расти вместе с v. Поскольку α_1 близко к единице, форма волны искажается. В этой области величина [1] $\beta \gg 1$ при любом v, вследствие чего в первом приближении

$$m^{(21)} = \frac{\sqrt{6\zeta_1}}{\gamma - 1} K', \quad \alpha^{(21)} = \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma - 1} ZK', \quad r^{(21)} = \sqrt{2\gamma z_1} \tag{4.12}$$

При $v \ll 1$, $Zv \gg 1$ и при $v \gg 1$, $\zeta_1 \ll 1$ получим соответственно

$$m^{(21)} = \left(\frac{2\gamma z_1}{\gamma - 1}\right)^{1/2}, \quad \alpha^{(21)} = \frac{2\gamma z_1}{\gamma - 1} \tag{4.13}$$

$$m^{(21)} = \frac{\sqrt{6\gamma\zeta_1}}{(\gamma - 1)\gamma v}, \quad \alpha^{(21)} = \frac{2\sqrt{\gamma}}{(\gamma - 1)\zeta_1} \tag{4.14}$$

Отношение $m^{(21)}(v)$ при фиксированном Z растет от значения (4.13) до максимального, а затем монотонно убывает до значений (4.14). Максимальное значение v определяется корнем уравнения ($\sqrt{\gamma}v_{\max} = 0.791068980$)

$$5(1 + \gamma v^2) \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{\gamma}v) = \sqrt{\gamma}v(5 + 3\gamma v^2) \tag{4.15}$$

Значения v и $m^{(21)}$ в точке максимума следующие

$\gamma =$	1.1	1.2	4/3	1.4
$v_{\max} =$	0.75425467	0.72214387	0.685085	0.66857531
$m^{(21)}_{\max} / \sqrt{Z} =$	5.4894202	2.8050695	1.7279622	1.4576401
$\gamma =$	1.5	5/3	2	3
$v_{\max} =$	0.64590511	0.61275939	0.55937024	0.45672388
$m^{(21)}_{\max} / \sqrt{Z} =$	1.1863999	0.91354880	0.63743485	0.35271881

При $v \ll 1$ отношение $m^{(21)} > 1$. В области умеренно больших v, а также в области $v \gg 1$, если

$$Z \gg v \geqslant (6Z)^{1/3} [\gamma(\gamma - 1)^2]^{-1/3} \tag{4.16}$$

отношение $m^{(21)} < 1$, преобладают индуцированные радиацией волны: они медленнее затухают и распространяются с большей скоростью.

Формула (4.12) для $r^{(21)}$ справедлива при любом v в рассматриваемом диапазоне. Скорость и длина индуцированных радиацией волн больше скорости и длины звуковых волн и волн давления той же частоты. Скорость волн пропорциональная, а их длина обратно пропорциональна $\sigma^{1/2}$. Отношение скоростей растет с ростом v и γ и убывает с ростом Z. Отношения $r^{(21)}$, $r > 1$.

Отношение $\alpha^{(21)} \approx Z \gg 1$ во всем диапазоне v. В зависимости от v оно изменяется [1] как функция $K'(v)$ и имеет максимум

$$v_{\max} = 1.514994 / \sqrt{\gamma}, \qquad \alpha^{(21)}_{\max} = 0.459756 \sqrt{\gamma} Z / (\gamma - 1) \tag{4.17}$$

4) В области $v = 0(Z)$ корень характеристического уравнения — малая величина. В первом приближении действительно уравнение (2.2), волны распространяются по законам для пьезотропной среды. Если решение для пьезотропной среды принять за первое приближение, то второе и третье приближения для любого γ определяется выражениями

$$\begin{gathered}
\varepsilon_1 = \frac{(\gamma - 1)\zeta_1 [AD - BC + i(AC + BD)]}{C^2 - D^2} \\
\varepsilon_2 = \frac{(\gamma - 1) m_0^2 i\zeta_1 (2\gamma\varepsilon_1 - m_0^2) E - \gamma^2 \varepsilon_1^2 [m_0^4 v^4 + i\zeta_1 E^2]}{E(m_0^2 v^2 - i\zeta_1 E)} \\
A = m_{r0}^2 - m_{i0}^2 - v^2 (m_{r0}^4 - 6 m_{r0}^2 m_{i0}^2 + m_{i0}^4) \\
B = 2 m_{r0} m_{i0} [1 - 2v^2 (m_{r0}^2 - m_{i0}^2)] \\
C = (m_{r0}^2 - m_{i0}^2) v^2 - 2\zeta_1 m_{r0} m_{i0}, \qquad E = 1 - m_0^2 v^2 \\
D = 2v^2 m_{r0} m_{i0} + \zeta_1 v^2 (m_{r0}^2 - m_{i0}^2) - \zeta_1
\end{gathered} \tag{4.18}$$

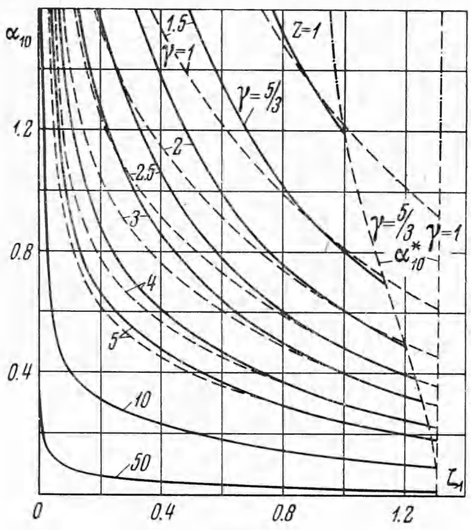
Из (1.5) видно, что при больших Z в окрестности ζ_1^* величина α_{10} — малая, а величина r — большая. Волны слабо затухают на длине звуковой волны и распространяются с очень большой сверхзвуковой скоростью. С ростом ζ_1 величина α_{10} убывает, α_1 и r растут. В этой области кривые $\alpha_{10}(v)$ (а также $\alpha_{10}(\zeta_1)$) для разных γ еще раз пересекаются, и после пересечения выше пойдет кривая для большего γ. Но различие между $\alpha_{10}(v)$ для разных γ лишь на малую величину порядка v^{-1}. Коэффициент α_τ в области $\zeta_1 = 0(1)$ достигает максимума, после чего монотонно убывает до α_τ^* при $\zeta_1 \to \zeta_1^*$.

Отношения $m^{(21)} < 1$, $r^{(21)} > 1$ при $\zeta_1 \to \zeta_1^*$. Отношение $m^{(21)}$ становится меньшим 1 либо при $\zeta_1 \ll 1$, если удовлетворяются (4.16), либо при $\zeta_1 = 0(1)$ в противном случае; начиная с некоторого ζ_1 (при умеренных или больших v), преобладающими становятся индуцированные радиацией волны, и с ростом v это преобладание усиливается ($m^{(21)}$ уменьшается, $r^{(21)}$ увеличивается).

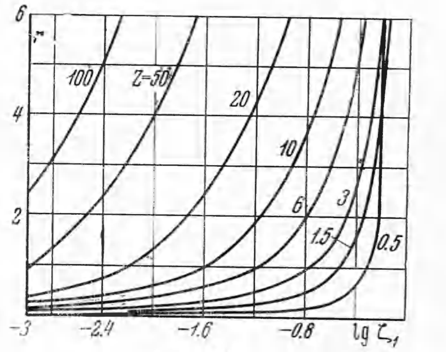
Отношение $\alpha^{(21)}$ при возрастании v в области умеренных значений ξ_1 достигает второго минимума, гораздо большего единицы, после чего неограниченно возрастает при $\zeta_1 \to \zeta_1^*$.

§ 5. Свойства индуцированных радиацией волн. В этом параграфе представлены результаты решения характеристического уравнения для всего диапазона значений γ, Z, v.

Коэффициент поглощения на длине звуковой волны (фиг. 5). С изменением ζ_1 от 0 до ζ_1^* при фиксированных γ, Z модули m_r, m_i убывают от ∞ до m_r^* и 0. При малых Z кривые $\alpha_{10}(\zeta_1)$ и $\alpha_{10}(v)$ для одинаковых Z, но разных γ пересекаются по одному разу в области $\zeta_1 = 0$ (1); кривая, соответствующая меньшему γ, после пересечения идет выше. Чем меньше γ, тем дальше вправо простирается кривая, и тем меньше предельное значение α_{10}^*. С ростом Z появляется второе пересечение. При $Z \gg 1$ оно происходит в области $Zv = 0$ (1). До первой и после второй точек пересечения α_{10} больше для бо́льшего γ, между ними α_{10} больше для меньшего γ при одинаковых Z, v. С ростом ζ_1 и Z зависимость параметров от γ сглаживается. Чем больше Z, тем в большем диапазоне ζ_1 или v параметры совпадают с их значениями при $\gamma = 1$. Для каждого γ кривые $\alpha_{10}(\zeta_1)$ тем ниже и тем дальше простираются вправо, чем больше Z. Такова же зависимость от Z и γ и кривых $\alpha_{10}(v)$, их зависимость от v аналогична зависимости от ζ_1. На фиг. 5 сплошными линиями представлена зависимость $\alpha_{10}(\zeta_1)$ для $\gamma = {}^5/_3$, разрывными — для $\gamma = 1$, пунктирными линиями даны предельные значения α_{10}^*.



Фиг. 5



Фиг. 6

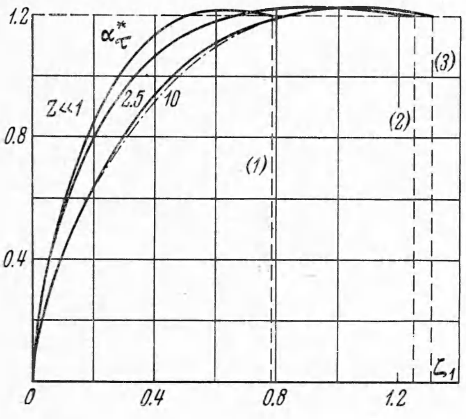
Скорость и длина волн с изменением ζ_1 от 0 до ζ_1^* (или v от 0 до v^*) монотонно возрастают от 0 до ∞ (фиг. 6 для $\gamma = {}^5/_3$). При достаточно малых ζ_1 (или v) волны дозвуковые и их длина короче звуковых, а начиная с некоторых ζ_1 (или v), зависящих от γ и Z, они становятся сверхзвуковыми и длиннее звуковых. Кривые $r(\zeta_1)$ и $r(v)$ выходят из начала координат с вертикальными касательными. Кривая $z(\zeta_1)$ вблизи начала тем выше, чем больше число Z и чем меньше γ, а вблизи ζ_1^* тем выше и тем раньше кривая приближается (асимптотически) к бесконечности, чем меньше Z и чем больше γ. Кривые для одинаковых γ, но разных Z или для одинаковых Z, но разных γ пересекаются между собой по одному разу (кроме начала координат).

Оптическое волновое число. Из начала координат кривые $\eta(\zeta_1)$ выходят с наклоном, не зависящим от Z и пропорциональным $\sqrt{\gamma}$, достигают максимума и затем монотонно приближаются к оси абсцисс, когда $\zeta_1 \to \zeta_1^*$, причем чем больше Z и меньше γ, тем ближе нисходящая ветвь приближается слева к кривой для пьезотропного газа.

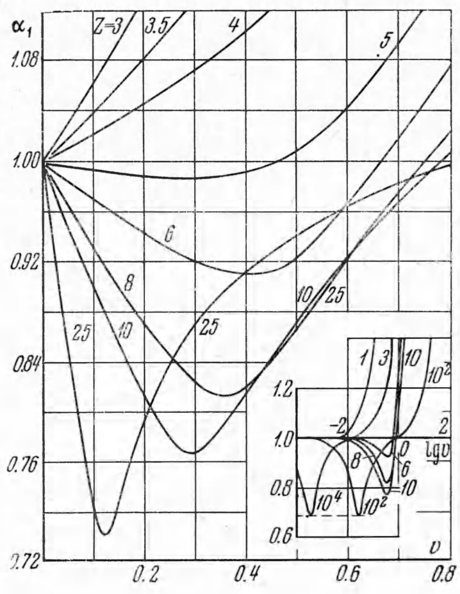
Коэффициент поглощения на длине свободного пробега радиации α_τ с ростом ζ_1, от 0 до ζ_1^* (v от 0 до v^*) сначала возрастает от 0 до максимума, в области умеренных ζ_1, зависящего от Z и γ (фиг. 7), а затем уменьшается до α_τ^* при любых γ, Z. Все кривые $\alpha_\tau(\zeta_1)$, $\alpha_\tau(v)$ в начале координат касаются оси ординат. Кривые $\alpha_\tau(\zeta_1)$ вблизи начала не зависят явно от Z и идут тем круче, чем больше γ. Кривая $\alpha_\tau(v)$ идет тем круче, чем меньше Z. Вблизи ζ_1^* обе кривые убывают быстрее при бо́льших γ; кривая

$\alpha_\tau(\zeta_1)$ убывает быстрее при бо̀льших, а кривая $\alpha_\tau(v)$ — при меньших Z. Максимумы кривых расположены тем правее, чем больше Z и меньше γ. На фиг. 7 изображены кривые $\alpha_\tau(\zeta_1)$ для $\gamma = {}^5/_3$ и различных Z. Разрывная линия (ниже линии $Z = 10$) соответствует $\gamma = 1$ и не зависит от Z. Линия для $Z \ll 1$, $\gamma = {}^5/_3$ обрывается при $\zeta_1 = 0.78561$, для $Z = 2.5$, $\gamma = {}^5/_3$ — при $\zeta_1 = 1.2412$, для $\gamma = 1$ — при $\zeta_1 = 1.3093$.

Истинный коэффициент поглощения α_1 при малых v, когда одновременно малы ζ_1 и Zv, близок к 1 и определяется (3.6). В окрестности $v = 0$ величина $\alpha_1 > 1$, если $Z \leqslant Z_0$, и $\alpha_1 < 1$, если $Z > Z_0$ ($Z_0 = 8.08332$, 6.23538, 5.36656, 5.14393, 4.92950, 4.8, 4.74342, 4.64758 при $\gamma = 1.1$, 1.2, ${}^4/_3$, 1.4. 1.5, 1.6, ${}^5/_3$, 2 соответственно). Если $Z \leqslant Z_0$, то α_1 монотонно возрастает от 1 до ∞ с возрастанием ζ_1 (или v) от 0 до $\zeta_1{}^*$ (или v^*) (фиг. 8 для $\gamma = {}^5/_3$). Кривые идут вверх тем круче, чем меньше Z. При $Z = Z_0$ кривая $\alpha_1(\zeta_1)$ в точке $\alpha_1 = 1$, $\zeta_1 = 0$ имеет касание второго порядка с линией $\alpha_1 = 1$. Если $Z < Z_0$, $Z < \sqrt{5{,}4}\,\gamma$, то чем больше γ, тем круче вверх идут кривые; если $Z > Z_0 > \sqrt{5.4}\,\gamma$, то чем больше γ, тем под меньшим углом выходят кривые.



Фиг. 7



Фиг. 8

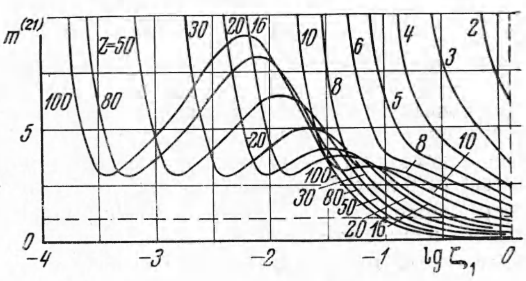
При $Z > Z_0$ и любом γ с ростом ζ_1 (или v) от 0 до ζ^*_1 (или v^*) коэффициент α_1 убывает от 1 до минимума, а затем неограниченно возрастает. Минимальное α_1 при Z, очень близких к Z_0, и при $Z \gg 1$ определяется соответственно формулами

$$\zeta_{1\,\min} = \sqrt{-{}^1/_3 c_1 / c_3}$$

$$\alpha_{1\,\min} = 1 - {}^4/_3 \sqrt{-{}^1/_3 c_1^3 / c_3} \qquad (5.1)$$

$$v_{\min} = 3 / Z$$

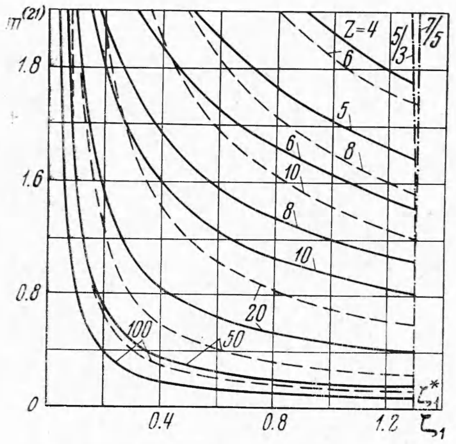
$$\alpha_{1\,\min} = (1 + \sqrt{2-\gamma})/(1+\sqrt{\gamma}) \qquad (5.2)$$



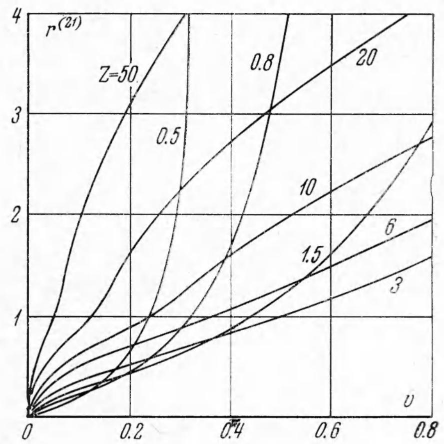
Фиг. 9

С увеличением Z от Z_0 до ∞ величина $\alpha_{1\min}$ убывает от 1 до значения (5.3); $\zeta_{1\min}$ растет от 0 до максимального значения, затем монотонно убывает. Минимальное α_1 тем меньше, чем больше γ. Кривая тем круче идет из точки $\zeta_1 = 0_1$, $\alpha = 1$ вниз, чем больше Z и меньше γ (если $\gamma > 2$, $Z > \sqrt{5.4}\,\gamma$, то тем круче, чем больше γ). При $Z > Z_0$ и $0 \leqslant v \leqslant v_{11}$ коэффициент $\alpha_1 \leqslant 1$. Если Z близко к Z_0, то $v_{11} = (-c_1 / c_3)^{1/2} Z$. При возрастании Z величина v_{11} растет от 0 до $[5(\gamma-1)/(3\gamma)]^{-1/2}$. Всегда α_1 не малая величина; форма волны не сохраняется.

Сравнение с волнами давлений. Поглощение. Пока Z мало, отношение $m^{(21)} \gg 1$ и убывает с ростом ζ_1 или v (фиг. 9, 10 для $\gamma = {}^5/_3$). Преобладают волны давления. С ростом Z общий вид функции $m^{(21)}$ меняется, приближаясь к описанной в § 4 для $Z \gg 1$ с одним минимумом, бо́льшим единицы, и максимумом. При некотором Z достигается равенство $m^{21} = 1$. При заданном γ это достигается (с ростом Z) впервые для некоторого Z^{**}, равного предельному значению Z^* и имеет место только в точке $\zeta_1 = \zeta_1^{**} \to \zeta_1^*$ (или $v = v^{**} \to v^*$). При дальнейшем увеличении $Z > Z^{**} \cong 2\sqrt{3\gamma/(\gamma-1)}$ неравенство $m^{(21)} < 1$ выполняется на все большем отрезке v (или ζ_1), с правым концом в точке $v \to v^*$ ($\zeta_1 \to \zeta_1^*$). Для $Z > Z^{**}$ индуцированные волны преобладают в диапазоне $v^{**} \leqslant v < v^*$, преобладание больше при больших γ, Z, v. На фиг. 10



Фиг. 10



Фиг. 11

изображено отношение коэффициентов поглощения радиационных термических волн и волн давления для $\gamma = {}^5/_3$ (сплошные линии), $\gamma = {}^7/_5$ (разрывные линии) при указанных на кривых значениях Z; пунктирными линиями нанесены предельные значения отношения.

Сравнение с волнами давления. Скорость. Отношение $r^{(21)}$ монотонно возрастает от 0 до ∞ с ростом v (или ζ_1) (фиг. 11 для $\gamma = \zeta^5/_3$). При малых v волны давления преобладают и по скорости распространения. При значении параметров, приводящих к неравенству $m^{(21)} < 1$, имеет место и неравенство $r^{(21)} > 1$.

Сравнение с осредненной теорией. Индуцированные волны в статье [8] рассматривались с осреднением по направлениям уравнения переноса реакции. Характеристическое уравнение имело вид (в q^0 и ζ_1^0 включены коэффициенты осреднения).

$$\frac{1}{1-q^2} = 1 + \gamma i \zeta_1{}^\circ \frac{1+m^2}{\gamma+m^2} \tag{5.3}$$

Из точного учета распределения радиации по направлениям следует существование волн лишь в ограниченном диапазоне чисел u (γ, Z), тогда как осреднение по направлениям приводило к существованию волн при любых γ, Z, v. В осредненной теории получено, что при изменении ζ_1 от 0 до ∞ коэффициент α_τ монотонно возрастает от 0 до g^{-1} (g — коэффициент осреднения). Из точной теории следует, что α_1 возрастает от 0 до α_τ^* при росте ζ_1 от 0 до ζ_1^*, и на этом участке достигается максимум. В осредненной теории показано, что $\alpha_1 < 1$ при $Z < Z_0$, $1 \leqslant \gamma < 2$ и $\zeta_1 > 0$. Из точной теории следует, что при γ, близком к 1 и $Z < Z$, на малую величину коэффициент α_τ меньше 1 (на малую величину) в некотором диапазоне малых значений v. При малых ζ_1 левые части (0.1) и (5.4) для $g = 1/\sqrt{3}$ различаются малыми членами $0(|q|^4)$, и обе теории дадут одинаковые результаты; расхождение усиливается с возрастанием ζ_1. Однако во многих отношениях обе теории дают сходную общую картину движения и в общем случае.

Поступила 29 XI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Прокофьев В. А. Затухание плоских вынужденных слабых волн давления в газах под влиянием радиационного теплообмена. ПМТФ, 1966, № 3, стр. 8—16.

2. Прокофьев В. А. Влияние излучения на распространение малых возмущений в вязкой и теплопроводной жидкости (гидродинамическая теория). Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 7, стр. 94—102.
3. Прокофьев В. А. Поглощение и дисперсия вынужденных волн очень малой и очень большой частоты под влиянием радиационного переноса тепла. Изв. АН ОТН, 1958, № 12, стр. 15—23.
4. Прокофьев В. А. Учет излучения в гидродинамической теории распространения плоских вынужденных волн бесконечно малой амплитуды. Вестн. Москв. ун-та. Сер. матем. механ., астрон., физики, химии, 1957, № 6, стр. 7—16.
5. Прокофьев В. А. Беконечно малые вынужденные волны в излучающей баротропной среде. Сб. «Вопросы механики» (под ред. Сретенского Л. Н.). Изд. МГУ, 1961, вып. 193, стр. 93—130.
6. Прокофьев В. А. Скорость слабых волн в излучающем газе. ПМТФ, 1963, № 3, стр. 11—19.
7. Янке Е., Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. Гостехиздат, 1948, стр. 47.
8. Прокофьев В. А. Теория распространения термических радиационных волн малой амплитуды, основанная на газодинамических уравнениях Эйлера с учетом теплообмена излучением. Вестн. Москв. ун-та, 1964, № 5, стр. 55—66.

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ЭНЕРГИИ ПРИ ЭЛЕКТРОДУГОВОМ ПОДОГРЕВЕ ГАЗА

И. И. Суксов

(Новосибирск)

Известны различные подходы к решению уравнения энергии и расчету на этой основе характеристик электродугового подогрева газов для цилиндрической дуги [1-3]. Метод, изложенный в [3], позволяет получать численно точные результаты путем последовательных приближений.

В настоящей работе предлагается иной подход к решению упомянутой задачи, при котором функция теплопроводности становится независимой переменной, а текущий радиус — искомой функцией. На основе указанного с использованием аппроксимации полиномом второй степени получено приближенное решение в конечной форме. На примерах расчета для воздуха и аргона показано, что это решение приемлемо для инженерных расчетов.

1. Для случая электродугового подогрева газа в цилиндрической трубке круглого поперечного сечения, когда энтальпия h и удельный расход ρv_z не зависят от продольной координаты z, уравнение энергии записывается в виде

$$r\frac{\partial s}{\partial r} = -E^2\int_0^r \sigma r\,dr, \qquad s = \int_0^T \lambda dT \tag{1.1}$$

где λ — коэффициент теплопроводности; остальные обозначения — обычные. В проводящей области ($s_d^0 \leqslant s^0 \leqslant 1$) уравнение (1.1) представляется в форме

$$A\eta^2 = -t\int_1^{s^\circ} \sigma^\circ t\,ds^\circ \tag{1.2}$$

$$\eta = \frac{r}{r_w}, \quad \sigma^\circ = \frac{\sigma}{\sigma_0}, \quad s^\circ = \frac{s}{s_0}, \quad A = \frac{s_0}{\sigma_0 (Er_w)^2}, \quad t = \eta\frac{d\eta}{ds^\circ} \tag{1.3}$$

Значения нижних индексов: w — стенка, 0 — ось трубки.

В непроводящей области ($s_w^\circ \leqslant s^\circ \leqslant s_d^\circ$) уравнение (1.1) принимает вид

$$\eta ds^\circ / d\eta = -1/B \tag{1.4}$$