

## ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П. Теория колебаний в инженерном деле.— М.— Л.: ГосНТИ, 1931.
2. Ден-Гартог Дж. П. Механические колебания.— М.: Физматгиз, 1960.
3. Борьба с шумом на производстве.— М.: Машиностроение, 1985.
4. Мэрвин Е. Голдстейн. Аэроакустика.— М.: Машиностроение, 1981.

г. Новосибирск

Поступила 4/VI 1989 г.,  
в окончательном варианте — 27/XI 1989 г.

УДК 532.517.4+532.526

О. А. Лихачёв

### ВОЗНИКНОВЕНИЕ КОГЕРЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ В ТУРБУЛЕНТНЫХ СПУТНЫХ ПОТОКАХ

Экспериментально установлено, что организованное движение присутствует во всех сдвиговых турбулентных потоках. Наличие в потоках когерентного движения послужило основой для создания Таунсендом [1, 2] модели турбулентности с двойной структурой, в которой процесс захвата окружающей невозмущенной жидкости в сдвиговом потоке осуществляется крупными вихрями, развивающимися на фоне мелкомасштабной турбулентности. Таунсенду также принадлежит гипотеза об универсальной автомодельности свободных сдвиговых потоков, согласно которой на достаточном удалении от источника движение определяется локальными масштабами скорости и длины. Масштабы зависят от типа течения, а также от внешних масштабов скорости и длины. Среднее движение, отнесенное к локальным масштабам, описывается универсальными функциями, зависящими только от способа его создания. Крупные вихри находятся в динамическом равновесии со средним потоком. Это дополнительное условие определяет их интенсивность и форму. Для плоского сдвигового слоя [3—6], плоского следа [7—9], осесимметричного следа [10—14], осесимметричного сдвигового слоя и плоской струи [15] подтверждена автомодельность этих течений, когда в качестве масштабов приняты характерные локальные значения скорости и длины. Однако эти масштабы существенно зависят от экспериментальных условий — малых гармонических возмущений [4—6, 8], внешней турбулентности [16], для спутных потоков — от формы тела [7—14] и любых других особенностей эксперимента. Вид воздействия, его характерная частота и масштаб отражаются на когерентных структурах, присутствующих в этих потоках. Для описания внешнего воздействия в ряде работ [6, 8] привлекается теория гидродинамической устойчивости невязких течений, с помощью которой удастся проанализировать отклик течения на малое гармоническое возмущение.

Память потока о начальных условиях — фактор общепризнанный, по крайней мере для исследованных дальностей. Однако неясно, существует или нет асимптотическая универсальная автомодельность для каждого типа свободных сдвиговых потоков. Трудно объяснить отсутствие такой автомодельности в турбулентных потоках с их интенсивным энергообменом между различными масштабами движения. Крупномасштабные когерентные структуры зарегистрированы в развитых турбулентных потоках на очень большом расстоянии от начала. Механизмом их воспроизводства может быть гидродинамическая неустойчивость среднего течения. Если моделировать турбулентный сдвиговый поток как течение с некоторой эффективной вязкостью  $\nu_T$ , то соответствующие турбулентные числа Рейнольдса ( $Re_T$ ) будут конечными, а турбулентный поток в зависимости от их величины — устойчивым или неустойчивым по отношению к длинноволновым возмущениям. При  $Re_T$ , меньших их критического значения, поток устойчив и происходит вырождение мелкомасштабной турбулентности, понижающее  $\nu_T$ , что в свою очередь увеличивает  $Re_T$ . Поток теряет устойчивость, крупномасштабное движение получает энергию от среднего течения и передает ее более мелким масштабам, увеличивая  $\nu_T$ . Критическое  $Re_T$  будет определять предельный автомодельный режим, к которому стремится данное течение.

Ниже показано, что  $Re_T$  является интегральным параметром, содержащим информацию локальных масштабов о начальных условиях. Найдено критическое значение  $Re_T$  для течения в дальней осесимметричной спутной струе. Рассмотрено также течение за телом с автономным движителем.

**1. Автомодельные турбулентные следы.** Изменение скорости  $U_\infty$  набегающего на неподвижное тело однородного потока принято называть следом. Движение сплошной среды, возникающее при прохождении тела с постоянной скоростью  $U_\infty$ , обычно называют спутным потоком. В фено-

менологической теории турбулентных свободных сдвиговых течений успешно используется гипотеза Буссинеска о турбулентной вязкости [1, 17]. Предполагается, что рейнольдсовы напряжения моделируются вязкими с эффективной, постоянной в каждом сечении вязкостью  $\nu_T$ . Согласно [1], разумный метод определения среднего значения  $\nu_T$  — сравнение наблюдаемого распределения средней скорости с вычисленным по этой модели. Для автомодельного решения применяется гипотеза подобия турбулентных пульсаций, осуществляющих перенос импульса. Следовательно,  $\nu_T$  может быть представлена в виде  $\nu_T(X) \sim bu_0$ , где  $u_0(X)$ ,  $b(X)$  — локальные масштабы скорости и длины;  $X$  — координата, направленная вдоль потока. Число Рейнольдса, построенное по этой вязкости и локальным масштабам, постоянно во всей области, где поток автомодельный:

$$(1.1) \quad \text{Re}_T = u_0 b / \nu_T (\equiv \text{const}).$$

Поскольку завихренной жидкости, переносимой турбулентным потоком, приписываются свойства реальной сплошной среды, но с более высокой вязкостью, поперечный размер следа будет расти за счет диффузии завихренности со скоростью, определяемой  $\nu_T$ :

$$(1.2) \quad b = [\nu_T (X - X_0) / U_\infty]^{1/2}$$

( $X_0$  — фиктивное начало автомодельного следа). Чтобы найти  $u_0$ ,  $b$ ,  $\nu_T$ , необходимо еще одно условие. Для импульсных, плоского и осесимметричного следов это — сохранение потока количества движения

$$(1.3) \quad u_0 b = \text{const}, u_0 b^2 = \text{const}.$$

Из соотношений (1.1)–(1.3) вытекают хорошо известные законы автомодельного развития импульсных следов

$$u_0 \sim (X - X_0)^{-1/2}, \quad b \sim (X - X_0)^{1/2}, \quad \nu_T = \text{const};$$

$$u_0 \sim (X - X_0)^{-2/3}, \quad b \sim (X - X_0)^{1/3}, \quad \nu_T \sim (X - X_0)^{-1/3}.$$

Для безимпульсных следов при условии  $\nu_T = \text{const}$  в поперечном сечении интеграл сохранения получен в [18]

$$(1.4) \quad u_0 b^3 = \text{const}, u_0 b^4 = \text{const},$$

откуда имеем выражения для локальных масштабов безимпульсных следов

$$u_0 \sim (X - X_0)^{-3/4}, \quad b \sim (X - X_0)^{1/4}, \quad \nu_T \sim (X - X_0)^{-1/2};$$

$$u_0 \sim (X - X_0)^{-4/5}, \quad b \sim (X - X_0)^{1/5}, \quad \nu_T \sim (X - X_0)^{-3/5}.$$

Среднюю скорость течения в дальних автомодельных следах представим в виде

$$(1.5) \quad U = U_\infty [1 - \varepsilon \varphi_0(r)], \quad V = \varepsilon^2 U_\infty \chi_0(r)$$

( $\varepsilon = u_0 / U_\infty (\ll 1)$ ,  $r = y/b$  — безразмерная поперечная координата). Для осесимметричных течений, подставляя (1.5) в осредненные уравнения движения и ограничиваясь членами порядка  $\varepsilon$ , получим

$$(1.6) \quad \bar{\varphi}_0 \frac{d\varepsilon}{dX} - \varepsilon \frac{d \ln b}{dX} r \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} = \frac{\varepsilon}{X - X_0} \frac{\partial}{r \partial r} \left( r \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} \right).$$

Здесь использовано соотношение (1.2). Из уравнения неразрывности для радиальной компоненты средней скорости находим

$$(1.7) \quad \frac{d \ln b}{dX} r \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} - \frac{d \ln \varepsilon}{dX} \bar{\varphi}_0 = \frac{\varepsilon}{b} \frac{\partial (r \chi_0)}{r \partial r}.$$

В случае импульсного следа решение уравнений (1.6) и (1.7) имеет вид

$$(1.8) \quad \varphi_0 = \exp(-ar^2), \quad \chi_0 = r \varphi_0(r) / (3 \text{Re}_T).$$

Обычно  $a = \ln 2$ . Следовательно, за поперечный масштаб  $b$  принято расстояние от оси потока, на котором дефицит средней скорости равен половине своего значения на оси. Введем для этого масштаба обозначение  $r_0$ . Ограничиваясь, как и прежде, первым порядком по  $\varepsilon$ , выйдем соотношение между локальными масштабами  $r_0$ ,  $u_0$ , которое следует из закона сохранения потока импульса  $J$  и выражения для средней скорости (1.5), (1.8):

$$(1.9) \quad r_0^2 u_0 = \frac{\ln 2}{\pi} \frac{J}{\rho U_\infty}.$$

Используя (1.1) и (1.2), в которых поперечный масштаб определен как  $r_0$ , в сочетании с (1.9) получим для локальных масштабов автомоделного импульсного следа

$$(1.10) \quad r_0 = C[(X - X_0)/\text{Re}_T]^{1/3}, \quad u_0/U_\infty = C[(X - X_0)/\text{Re}_T]^{-2/3},$$

где константа  $C = [(J \ln 2)/(\pi \rho U_\infty^2)]^{1/3}$  зависит только от силы сопротивления тела. Входящее в (1.10)  $\text{Re}_T$  характеризует индивидуальные особенности потока за телами с одинаковым профильным сопротивлением;  $\text{Re}_T$  может быть найдено экспериментально с помощью (1.10):

$$(1.11) \quad \text{Re}_T = (X - X_0)u_0/(r_0 U_\infty).$$

Обратная величина  $\text{Re}_T^{-1}$  совпадает с величиной  $S_0$ , введенной в [14]. Нами использованы локальные масштабы типа (1.10), что позволило обобщить многочисленный экспериментальный материал по средним характеристикам осесимметричных импульсных следов. Эмпирически найденные выражения для локальных масштабов отличаются от (1.10) на  $[\pi/(4 \ln 2)]^{1/3}$ , т. е.  $\sim 4\%$ . Для иллюстрации приведем несколько значений  $\text{Re}_T$ , рассчитанных с помощью (1.11) по известным экспериментальным данным: диск [10],  $\text{Re}_T = 0,5$ ; сфера [13], 0,8; эллипсоид [11], 6,5; пористый диск [13], 7,0. Увеличение  $\text{Re}_T$  отражает уровень напряжений Рейнольдса в следе за телами, взятыми в качестве примера.

В случае безимпульсного следа решение уравнений (1.6) и (1.7) запишем в форме

$$(1.12) \quad \varphi_0 = (1 - kr^2) \exp(-kr^2), \quad \chi_0 = (r/5)(2 - kr^2) \exp(-kr^2).$$

За поперечный масштаб  $b$  примем расстояние, на котором скорость в приосевой струе равна половине своего максимального значения, чему соответствует  $k = 0,31492$ . Для этого масштаба сохраним  $r_0$ . Обозначив константу в (1.4) как  $N$ , перепишем локальные масштабы безимпульсного осесимметричного следа:

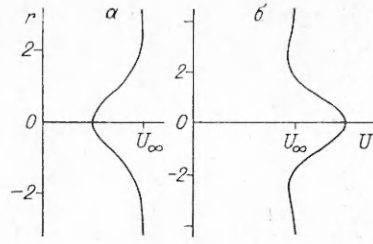
$$(1.13) \quad r_0 = C_1[(X - X_0)/\text{Re}_T]^{1/5}, \quad u_0/U_\infty = C_1[(X - X_0)/\text{Re}_T]^{-4/5}, \\ C_1 = (N/U_\infty)^{1/5}.$$

Величина  $\text{Re}_T$  определена соотношением (1.11). Различные варианты безимпульсного осесимметричного следа реализованы в [14, 19—22]. В эксперименте трудно создать полностью безимпульсный поток. На некотором расстоянии от источника небаланс потока импульса приводит к формированию течения типа (1.10). Тем не менее в промежуточной области, где среднее течение носит ярко выраженный безимпульсный характер, справедливы зависимости (1.13) (см. [14]).

Введение понятия  $\text{Re}_T$  позволило обобщить экспериментальные данные по среднему течению. Однако пульсационные характеристики турбулентного течения в следах не удается описать в тех же автомоделных переменных. В соответствии с гипотезой, положенной в основу настоящей работы, на динамику следа существенное влияние оказывают крупномасштабные возмущения. Благодаря гидродинамической неустойчивости амплитуда возмущений меняется вниз по потоку отлично от автомоделного закона, характерного для среднего течения. Закон изменения амплитуды и формы возмущений, как показано ниже, зависит от их масштаба и  $\text{Re}_T$ .

## 2. Постановка задачи устойчивости турбулентных следов.

Исследование отклика турбулентных потоков на внешнее крупномасштабное волновое возмущение может быть выполнено с помощью линейной теории гидродинамической устойчивости вязких потоков [23]. Поле скорости в цилиндрической системе координат  $(X, R, \varphi)$  имеет компоненты  $(u, v, w)$ . Согласно [23], поля скорости и давления представляются в виде  $\mathbf{u} = \mathbf{U} +$



Р и с. 1

$+ \mathbf{u}' + \tilde{\mathbf{u}}$ , где наряду со средним потоком  $\mathbf{U}$  и турбулентным пульсационным движением  $\mathbf{u}'$  содержится регулярное волновое движение  $\tilde{\mathbf{u}}$ . Распределение средней скорости двух рассматриваемых типов течений представлено формулами (1.5), (1.8) и (1.12). На рис. 1 изображены продольные составляющие средней скорости этих потоков. Уравнения движения и неразрывности для волнового движения записываются как

$$(2.1) \quad \frac{D\tilde{u}_i}{Dt} + (\tilde{u}_j \nabla_j) U_i = -\frac{1}{\rho} \nabla_i \tilde{p} + \nabla_j (2\nu_T \tilde{e}_{ij}), \quad \nabla_j \tilde{u}_j = 0$$

( $\tilde{e}_{ij}$  — тензор скоростей деформации, связанный с волновым движением). Молекулярной вязкостью пренебрегается по сравнению с турбулентной  $\nu_T$ . В силу предполагаемой автомодельности среднего течения возмущения будем искать также в автомодельном виде

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) \\ \tilde{p} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon U_\infty [u(r), v(r), w(r)] \\ \varepsilon^2 U_\infty^2 q(r)/\text{Re}_T \end{array} \right\} \exp(i\Theta),$$

где  $\partial\Theta/\partial X = \alpha^0 + (\varepsilon/\text{Re}_T) \alpha_1^0(X)$ ;  $\partial\Theta/\partial\varphi = m$ ;  $\partial\Theta/\partial t = -\omega^0$ ;  $r = R/r_0$ ;  $\omega^0$  — угловая частота линейных колебаний;  $m$  — азимутальное волновое число;  $\alpha^0 = \omega^0/U_\infty$  — продольное волновое число возмущений, распространяющихся с фазовой скоростью  $U_\infty$ . Последнее соотношение справедливо при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , так как изменение фазовой скорости не может превышать дефицит внешней скорости. Второе слагаемое, содержащее комплексное число  $\alpha_1^0$ , представляет поправку на движение в следе. Реальная часть  $\alpha_1^0$  отражает дрейф фазы возмущений в системе координат, движущейся со скоростью  $U_\infty$ , т. е. в спутном потоке. С мнимой частью  $\alpha_1^0$  связано изменение амплитуды возмущений, характеризующее их устойчивость или неустойчивость в зависимости от ее знака. После подстановки (2.2) в (2.1) и перехода к новым переменным  $(\Theta, X, r, \varphi)$  имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от координаты  $X$ . При экспериментальных исследованиях получено, что длина волны наиболее опасных крупномасштабных возмущений меняется пропорционально локальному масштабу длины [24]. Значит,

$$(2.3) \quad (\alpha^0, \alpha_1^0) = (\alpha, \alpha_1)/r_0, \quad (\alpha, \alpha_1) = \text{const.}$$

Для дальних следов  $\varepsilon \ll 1$ , поэтому ограничимся в полученной системе членами низшего порядка по  $\varepsilon$ . С учетом (2.3) и соотношения  $\alpha^0 = \omega^0/U_\infty$  члены порядка  $O(\varepsilon^2)$  составляют систему уравнений

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \beta^2 u - \tau u' + i\alpha q - \text{Re}_T \varphi_0 v - (ru)'/r &= 0, \\ \beta^2 v - \tau v' + q' + v/r^2 + i2mw/r^2 - (rv)'/r &= 0, \\ \beta^2 w - \tau w' + imq/r + w/r^2 - i2mw/r^2 - (rw)'/r &= 0, \\ i\alpha u + (rv)'/r + imw/r = 0, \quad \beta^2 = i(\alpha_1 - \alpha \text{Re}_T \varphi_0) + \alpha^2 + m^2/r^2 - \\ &\quad - (1 - \tau)\mu \end{aligned}$$

( $\tau = 1/3$  для импульсного следа и  $\tau = 1/5$  для безимпульсного,  $\mu = 1$ ). Если ввести  $U_S = -\varphi_0$ ,  $c = -\alpha_1/(\alpha \text{Re}_T)$ , то при  $\tau = 0$ ,  $\mu = 0$  система

(2.4) примет вид, рассмотренный в [25]. Штрих обозначает производную по  $r$ . Граничные условия на возмущения определяются соотношениями

$$(2.5) \quad u, v, w, q \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty, \\ u(0) = q(0) = 0, m \neq 0, v(0) = w(0) = 0, m \neq 1, v(0) + iw(0) = 0, \\ m = 1.$$

Решение вопроса об устойчивости течения состоит в нахождении собственных значений  $\alpha_1$  и соответствующих собственных функций  $(u, v, w, q)$  краевой задачи (2.4), (2.5). Задача на собственные значения решалась численно методом дифференциальной прогонки со стыковкой в критическом слое [26]. Определенные трудности возникают при решении уравнений для прогоночных коэффициентов из-за наличия особенности на оси. Уравнения (2.4) имеют при  $r = 0$  регулярную особенность, в окрестности которой может быть получено решение системы в виде ряда по степеням  $r$ :

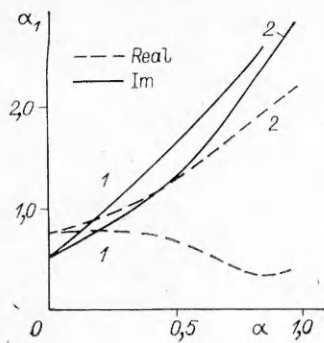
$$(2.6) \quad (v, w) = r^\nu (a_i + b_i r^2 + \dots), i = 1, 2, \\ (u, q) = r^{\nu-1} (a_i + b_i r^2 + \dots), i = 3, 4.$$

Подставляя (2.6) в (2.4) и собирая члены при одинаковых степенях  $r$ , получим характеристическое уравнение на  $\nu$  и рекуррентные соотношения, связывающие константы в разложении (2.6). Корни характеристического уравнения равны  $(m + 1)$ ,  $(1 - m)$ ,  $-(m + 1)$ ,  $(m - 1)$ , первые два кратные. Выпишем три линейно независимых решения для  $m \neq 0$ , ограниченных при  $r = 0$ :

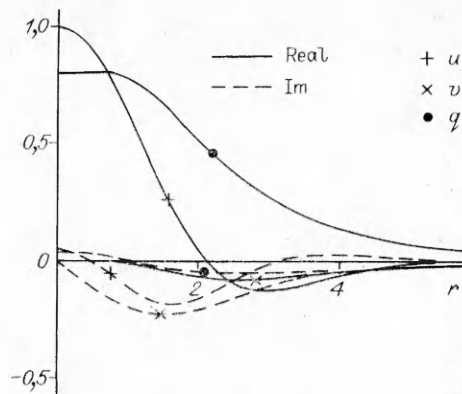
$$(2.7) \quad \{-r^m, [i\alpha/(m + 1)/2]r^{m+1}, [\alpha/(m + 1)/2]r^{m+1}, 0\}, \\ \{0, [m/(m + 1)/4]r^{m+1}, [i(m + 2)/(m + 1)/4]r^{m+1}, r^m\}, \\ \{0, r^{m-1}, ir^{m-1}, 0\}.$$

Выражения (2.7) используются для нахождения прогоночной матрицы и ее первой производной при  $r = 0$ , которые необходимы при решении уравнений для прогоночных коэффициентов. В случае  $m = 0$  порядок системы (2.4) может быть понижен до четырех. Используя вид граничных условий при  $r = 0$ , нетрудно выписать два линейно независимых решения в окрестности оси. При численных расчетах условие затухания возмущений на бесконечности заменялось условием прилипания на некотором, достаточно большом расстоянии от оси  $R_0$ . Для малых  $\alpha$  приходится увеличивать  $R_0$ , так как длинноволновые возмущения весьма чувствительны к условиям на внешней границе. Это проиллюстрировано на рис. 4, где треугольными метками нанесен расчет нейтральной кривой с  $R_0 = 12$ . Чтобы избежать влияния граничных условий на результаты, интервал интегрирования менялся по закону  $R_0 = c_0/\alpha$ . Было найдено, что при  $c_0 = 8$  дальнейшее увеличение  $R_0$  при фиксированном  $\alpha$  не влияет на результаты расчета собственных значений. Уравнения для прогоночных коэффициентов решались методом Рунге — Кутты с постоянным шагом. Для повышения точности расчетов в окрестности критического слоя осуществлялось дробление шага интегрирования. Численный алгоритм проверялся на данных из [25].

**3. Устойчивость импульсного осесимметричного следа.** Азимутальное волновое число меняется дискретно и представляется счетной последовательностью целых чисел  $m = 0; 1; 2; \dots$ . Для каждого  $m$  спектр также счетный. Интерес представляют спектральные моды, соответствующие наиболее опасным возмущениям для  $\text{Re}_T$  из диапазона, определенного экспериментально при обтекании тел различной формы ( $\text{Re}_T [0,5 \div 7,0]$ , см. выше). Сложность возмущенного движения возрастает с увеличением азимутального волнового числа. Как правило, более сложное движение затухает быстрее. Поэтому были рассмотрены только  $m = 0; 1; 2$ . Принцип аргумента позволяет найти наиболее опасные моды при фиксированных  $m, \alpha, \text{Re}_T$ . Собственные значения для осесимметричных возмущений

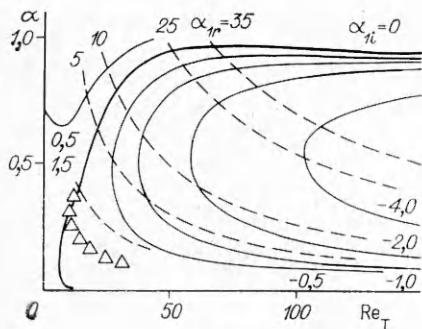


Р и с. 2

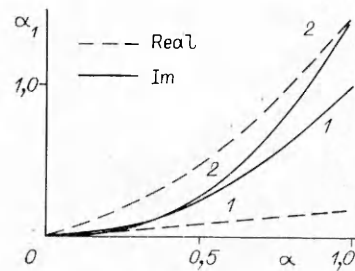


Р и с. 3

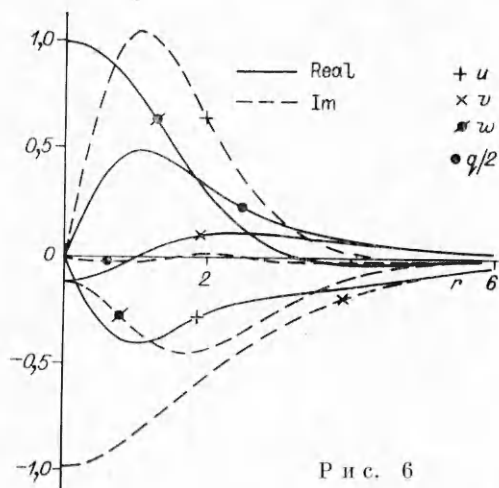
( $m = 0$ ) в зависимости от  $\alpha$  представлены на рис. 2 кривыми 1, 2, которые соответствуют  $Re_T = 2,0; 5,0$ . При  $\alpha = 0$  собственные значения краевой задачи (2.4), (2.5) не зависят от  $Re_T$ . На рис. 3 изображены собственные функции осесимметричных возмущений при  $Re_T = 5,0$ ,  $\alpha = 0,5$ . Аксиальная составляющая скорости возмущенного движения имеет максимум на оси следа. Наиболее опасны во всем диапазоне изменения  $Re_T$  спиральные возмущения ( $m = 1$ ). Если возмущения с  $m = 0; 2$  абсолютно устойчивы, то спиральные имеют область параметров, для которых такое движение неустойчиво. Области существования устойчивых и неустойчивых возмущений с  $m = 1$  показаны на рис. 4. Критические значения параметров нейтральных возмущений  $Re_{T*} = 6,78$ ,  $\alpha_* = 0,098$ ,  $\alpha_{1r} = 0,079$ . В согласии с невязким анализом [25]  $\alpha \rightarrow 0,99$  при  $Re_T \rightarrow \infty$ . Расчеты, выполненные в [25] для вязкого осесимметричного следа с аналогичным дефицитом скорости, дают критические значения параметров нейтральных возмущений  $Re_* = 23,05$ ,  $\alpha_* = 0,41$ ,  $\alpha_{1r} = 2,93$ . Эти исследования проведены в предположении параллельности исходного потока. Как показывают настоящие расчеты, учет эффектов, связанных с непараллельностью течения в следе, ведет к значительному расширению области параметров, для которых данное течение неустойчиво. На рис. 5 приведены собственные значения спиральных возмущений в зависимости от  $\alpha$  для  $Re_T = 1,0$  и  $5,0$  (кривые 1, 2), которые отвечают наиболее опасной спектральной моде. С уменьшением  $Re_T$  собственные значения даются асимптотическим выражением  $\alpha_1 = i\alpha^2$ . Для  $Re_T = 5,0$ ,  $\alpha = 0,5$  на рис. 6 представлены распределения давления и скорости спиральных возмущений. Максимум аксиальной скорости расположен на некотором расстоянии от оси следа. Признак спиральности возмущений получен во всех без исключения экспериментах по изучению осесимметричных турбулентных следов (см., например, [13]). По мере развития следа максимум вырождается, что характерно для затухания спиральных возмущений. Этот факт находится в соответствии с результатами настоящих исследований,



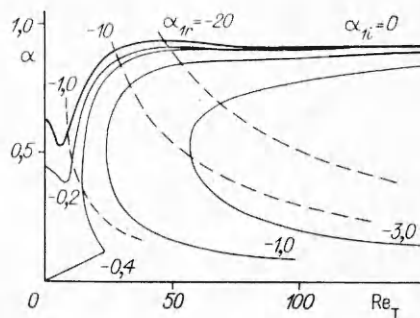
Р и с. 4



Р и с. 5



Р и с. 6



Р и с. 7

поскольку для большей части экспериментально изученных осесимметричных следов  $Re_T \leq Re_{T*}$ . Возникновение и развитие крупномасштабных спиральных неустойчивостей наблюдались при визуализации спутного потока, созданного продергиванием фала [14]. С увеличением азимутального волнового числа структура спектра при небольших  $Re_T$  сильно усложняется. Для  $m = 2$  при  $Re_T \rightarrow 0$  наименее устойчивой спектральной моде, имеющей невязкую асимптотику, отвечает выражение  $\alpha_1 = i(\alpha^2 + 1,72)$ .

Из определения  $\varepsilon$  и соотношений (1.11), (2.2), (2.3) следует, что множитель, связанный с неавтомоделным изменением амплитуды возмущений, имеет вид

$$(3.1) \quad (u', v', w') \sim \varepsilon U_\infty (X - X_0)^{i\alpha_1}.$$

Согласно проведенному анализу, декременты некоторых длинноволновых возмущений для значений  $Re_T$  из диапазона, найденного экспериментально при обтекании тел различной формы, имеют небольшие значения. Это обстоятельство в сочетании с (3.1) подтверждает весьма медленное развитие возмущений в импульсных осесимметричных следах.

**4. Устойчивость безимпульсного следа.** На рис. 7 в плоскости  $(Re_T, \alpha)$  представлены области существования устойчивых и неустойчивых спиральных возмущений рассматриваемого течения. Из-за наличия точки перегиба и эффектов непараллельности течение в безимпульсном турбулентном следе абсолютно неустойчиво относительно длинноволновых возмущений с  $m = 1$ . При  $Re_T \rightarrow 0$  собственные значения даются асимптотическим выражением  $\alpha_1 = i(\alpha^2 - 0,4)$ . Вдоль оси абсцисс инкремент сохраняет постоянное значение  $\alpha_1 = -i0,4$ . Как и для импульсного следа, возмущения с  $m = 0; 2$  абсолютно устойчивы. Распределения давления и скорости возмущений в общих чертах подобны аналогичным для течения в импульсном следе. Как уже упоминалось, изучать экспериментально этот тип течения очень сложно из-за трудности точного выполнения условия безимпульсности следа. Отсутствие достоверных данных не позволяет провести сравнение экспериментальных и теоретических результатов по развитию возмущений в потоках этого типа.

**5. Выводы.** Гипотеза Буссинеска о турбулентной вязкости и предположение о подобии турбулентных пульсаций, осуществляющих обмен импульсом, позволяют найти вид локальных масштабов скорости и длины, которые содержат эмпирический параметр, определяющий их зависимость от начальных условий формирования спутного потока. Этим параметром является  $Re_T$ . Каскад крупномасштабных неустойчивостей мог бы служить механизмом потери потоком информации о начальных условиях. В то же время хорошо известен экспериментальный факт, что для исследованных дальностей практически все свободные сдвиговые потоки обладают «памятью» о начальных условиях. Крупные когерентные структуры, возникшие в начале течения, слабо меняют свою форму при движе-

нии вниз по потоку и наблюдаются на очень больших удалениях от начала. Такой консерватизм когерентных структур может быть объяснен их слабым взаимодействием со средним течением. Для того чтобы найти отклик потока на внешнее малое возмущение, в настоящей работе проведен линейный анализ устойчивости турбулентных осесимметричных следов. Анализ показал, что амплитуда возмущений меняется по степенному закону. Наряду с соответствующей автомодельной частью показатель степени содержит число, характеризующее затухание или нарастание возмущений. Оно зависит от  $Re_T$  и для исследованных осесимметричных импульсных следов является величиной по модулю порядка и меньше единицы. Согласно этому результату, можно сделать вывод, что «память» о начальных условиях обусловлена слабым взаимодействием крупномасштабных возмущений со средним течением. Время формирования универсальной автомодельности течения в спутных потоках определяется характерным временем развития крупномасштабных возмущений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Таунсенд А. А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом.— М.: ИЛ, 1959.
2. Townsend A. A. Entrainment and the structure of turbulent flow // J. Fluid Mech.— 1970.— V. 41, N 1.
3. Brown G. L., Roshko A. On density effects and large structure in turbulent mixing layers // J. Fluid Mech.— 1974.— V. 64, N 4.
4. Oster D., Wygnanski I., Dziomba B., Fiedler H. On the effect of initial conditions on the two dimensional turbulent mixing layer // Lect. Not. in Phys.— 1978.— V. 75.— P. 48.
5. Oster D., Wygnanski I. The forced mixing layer between parallel streams // J. Fluid Mech.— 1982.— V. 123.— P. 91.
6. Gaster M., Kit E., Wygnanski I. Large-scale structures in a forced turbulent mixing layer // J. Fluid Mech.— 1985.— V. 150.— P. 23.
7. Papailiou D. D., Lykoudis P. S. Turbulent vortex streets and the entrainment mechanism of the turbulent wake // J. Fluid Mech.— 1974.— V. 62, N 1.
8. Wygnanski I., Champagne F., Marashi B. On the large-scale structures in two-dimensional, small-deficit, turbulent wakes // J. Fluid Mech.— 1986.— V. 168.— P. 31.
9. Черепанов П. Я., Дмитриенко Ю. М. О влиянии формы тела на характеристики автомодельного плоского следа // ИФЖ.— 1988.— Т. 54, № 6.
10. Кармоди Т. Развитие следа за диском // Тр. Америк. о-ва инж.-мех. Сер. Д. Теор. основы инж. расчетов.— 1964.— Т. 86, № 4.
11. Чеврей Р. Турбулентный след за телом вращения // Тр. Америк. о-ва инж.-мех. Сер. Д. Теор. основы инж. расчетов.— 1968.— Т. 90, № 3.
12. Букреев В. И., Васильев О. Ф., Лыткин Ю. М. О влиянии формы тела на характеристики автомодельного осесимметричного следа // ДАН СССР.— 1972.— Т. 207, № 4.
13. Bevilacqua P. M., Lykoudis P. S. Turbulence memory in self-preserving wakes // J. Fluid Mech.— 1978.— V. 89, N 3.
14. Kutateladze S. S., Mironov B. P., Novikov B. G., Fedosienko W. D. Stereophotometry of unsteady turbulent free flows // Arch. Mech.— 1986.— V. 38, N 5—6.
15. Hussain A. K. M. F. Initial condition effect on free turbulent shear flows // Lect. Not. in Phys.— 1978.— V. 75.— P. 103.
16. Symes C. B., Fink L. E. Effects of external turbulence upon the flow past cylinders // Lect. Not. in Phys.— 1978.— V. 75.— P. 86.
17. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя.— М.: ИЛ, 1956.
18. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны.— М.: Мир, 1964.
19. Дмитриенко Ю. М., Ковалев И. И., Лучко П. И., Черепанов П. Я. Исследование плоского турбулентного следа с нулевым избыточным импульсом // ИФЖ.— 1987.— Т. 52, № 5.
20. Naudascher E. Flow in the wake of self-propelled bodies and related sources of turbulence // J. Fluid Mech.— 1965.— V. 22, N 4.
21. Schetz J. A., Jakubowski A. K. Experimental studies of the turbulent wake behind self-propelled slender bodies // AIAA J.— 1975.— V. 3, N 12.
22. Алексенко Н. В., Костомача В. А. Экспериментальное исследование осесимметричного безимпульсного турбулентного струйного течения // ПМТФ.— 1987.— № 1.
23. Beynolds W. C., Hussain A. K. M. F. The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow. Pt 3. Theoretical models and comparisons with experiments // J. Fluid Mech.— 1972.— V. 54, N 2.
24. Antonia B. A., Browne L. W. B., Fulachier L. Average wavelength of organised structures in the turbulent far wake of a cylinder // Exp. Fluids.— 1987.— V. 5, N 5.



25. Lessen M., Sing P. J. The stability of axisymmetric free shear layers // J. Fluid Mech. — 1973. — V. 60, N 3.  
 26. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. — Новосибирск: Наука, 1977.

г. Новосибирск

Поступила 14/IV 1989 г.,  
 в окончательном варианте — 27/IX 1989 г.

УДК 532.517.4

Г. А. Кузьмин

## ЭВОЛЮЦИЯ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ВИХРЕВЫХ СГУСТКОВ

**Модель турбулентного течения — набор малых вихрей.** Вследствие гидродинамических неустойчивостей в турбулентных течениях образуются сгустки завихренности. Их эволюция во времени определяется нелинейной динамикой завихренности внутри вихрей, а также их взаимодействием между собой.

Возможность раздельного рассмотрения внутренних и внешних степеней свободы зависит от коэффициента перемежаемости  $\kappa = \lambda/l$  ( $\lambda$  — характерный размер вихрей,  $l$  — расстояние между ними). Если  $\kappa \rightarrow 0$ , то вихри взаимодействуют лишь через посредство импульсов, а другие внутренние степени свободы несущественны [1, 2].

При  $\kappa \neq 0$  во взаимодействии вихрей участвуют другие мультипольные моменты. В свою очередь, их эволюция определяется не только воздействием окружения на каждый конкретный вихрь, но и нелинейной динамикой всех внутренних степеней свободы, набор которых не исчерпывается мультипольными моментами [2, 3].

Влияние окружения вихря на его внутренние степени свободы при  $\kappa \ll 1$  аналогично воздействию некоторого неоднородного внешнего поля скорости. Следовательно, полная система уравнений для набора малых вихревых сгустков разбивается на подсистемы. Каждая из подсистем описывает какой-либо из вихрей во внешнем поле, которое индуцируется другими вихрями. Цель настоящей работы — вывод такой подсистемы уравнений и анализ ее решений.

**Вихревой сгусток во внешнем поле в безграничной несжимаемой жидкости.** Поле завихренности удовлетворяет уравнению

$$(1) \quad \partial\omega/\partial t - \nu\Delta\omega = (\omega\nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u}\nabla)\omega.$$

Для приближенного решения (1) используется метод Галеркина. Выбор базиса разложения основан на следующих соображениях.

Вихревые сгустки в турбулентных течениях представляют собой некоторые нерегулярные диффузные образования. Если число Рейнольдса  $Re$ , найденное по параметрам сгустка, мало, то эволюция вихря определяется в основном вязкостью. Поэтому естественным базисом разложения служит набор решений линеаризованного уравнения (1).

При больших  $Re$  внутри вихрей разовьются турбулентные пульсации широкого спектра масштабов. Для их детального описания потребовалось бы учесть большое число членов разложения, какую бы систему функций ни выбрать за базис. Для целей настоящей работы наиболее существенны крупномасштабные деформации вихрей, которые влияют на их взаимодействие. Мелкомасштабные пульсации играют роль резервуара, куда стекает энергия. Их влияние можно учесть с помощью коэффициента эффективной вязкости  $\nu_{эф}$ . Значение  $Re_{эф}$ , построенное по эффективной вязкости, уже не столь велико, как  $Re$ , и за базис разложения можно выбрать решения линеаризованного уравнения (1), в котором выполнена замена  $\nu$  на  $\nu_{эф}$ .

Мультипольные моменты вихрей и такие важные физические характеристики, как вихревой импульс и момент импульса, простыми равенствами связаны с коэффициентами разложения по базису. Это служит дополнительным аргументом в пользу выбранной базисной системы функций.

Некоторые частные решения линеаризованного уравнения (1) (в специальной системе координат) исследованы в [4]. Эти решения выражаются через ортогональные полиномы Эрмита. Общее решение линеаризован-