УДК 517.9

Приближенное решение больших систем уравнений с многомерными теплицевыми матрицами

А.В. Козак, Д.И. Ханин

Южный федеральный университет, ул. Большая Садовая, 105/42, Ростов-на-Дону, 344006
E-mails: avkozak@bmail.ru (Козак А.В.), dihan@mail.ru (Ханин Д.И.)

Козак А.В., Ханин Д.И. Приближенное решение больших систем уравнений с многомерными теплицевыми матрицами // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2015. — Т. 18, № 1. — С. 55–64.

Известны условия обращения и вид обратного оператора к двумерным усеченным операторам свертки на множествах с пологими границами. Наличие угловых точек существенно усложняет эту задачу. В данной работе рассматриваются уравнения с многомерными операторами свертки на многогранниках. Для них предложен приближенный метод решения и получены оценки для погрешностей. Также исследована возможность приближения решения указанных уравнений с помощью многомерных циклических матриц.

Ключевые слова: *приближенное решение, теплицевы матрицы, многомерные циклические матрицы, операторы свертки на многогранниках.*

Kozak A.V., Khanin D.I. Approximate solution of large systems of equations with multi-dimensional Toeplitz matrices // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2015. — Vol. 18, № 1. — P. 55–64.

The conditions using the inverse operator and its form in the truncated two-dimensional convolution operators on sets with smooth boundaries are known. The presence of the corner points adds complexity to the task. The equations with multi-dimensional convolution operators on polyhedra is considered. The approximate method for them is proposed, and estimates for the errors are obtained. The possibility of approximation solutions of these equations with multi-dimensional cyclic matrices is also investigated.

Key words: *approximate solution, Toeplitz matrices, multi-dimensional cyclic matrices, multi-dimensional convolution operators on polyhedral.*

Операторам с теплицевыми матрицами посвящено очень много работ (см. монографии [1–5] и имеющиеся там ссылки на литературу). Исследований по многомерным теплицевым матрицам (матрицам блочной теплицевой структуры, у которых блоки также теплицевы матрицы) значительно меньше. Укажем на некоторые из них. В статье [6] предлагается метод итераций Ньютона для обращения двумерных теплицевых матриц большого размера малого тензорного ранга. Там же произведена оценка требуемого числа операций для достижений определенной точности. Интересные результаты, касающиеся PCG-метода для решения систем линейных уравнений с двумерными теплицевыми матрицами, изложены в книге [7]. В работе [8] предложен быстрый итерационный метод для двумерных положительно определенных и самосопряженных теплицевых матриц, получены оценки числа итераций для некоторых случаев, в частности для случая ленточных матриц. В работе [9] указываются различные модификации алгоритма Шура для факторизации симметричных теплицевых и блочно-теплицевых матриц. Исследуется применимость факторизации для решения систем линейных уравнений. Важность многомерных теплицевых матриц определяется приложениями к обработке многомерных сигналов.

В данной статье предлагается приближенный метод решения систем линейных алгебраических уравнений с многомерными теплицевыми матрицами, основанный на идеях проекционных методов решения многомерных уравнений типа свертки. В проекционных методах решение бесконечномерного операторного уравнения приближается решениями конечномерных уравнений. В статье, наоборот, решение конечномерной системы уравнений приближается решениями некоторых бесконечномерных уравнений. Работа опирается на конструкцию обратного оператора, изложенную в [5] (с. 454–461), и статью [10]. В работе [10] рассматривались операторы свертки на многоугольниках с углами, близкими к развернутым. Применимость аналогичных методов к произвольным многоугольникам ограничивается чрезвычайной сложностью обращения операторов свертки в углах (см. [5, 11]). В данной статье предлагается комбинация методов. Часть решения находится с помощью оператора свертки во всем пространстве и оператора свертки в полупространствах. Решение вблизи угловых точек находится численно с помощью систем уравнений, аналогичных исходным, но значительно меньшей размерности. Такой подход лежит на поверхности, однако оценка допускаемой при этом погрешности не столь очевидна. Кроме этого, в статье мы отказались от представления решения с помощью приближенного обратного оператора, так как допускаемая при этом погрешность определяется наихудшими компонентами в углах и окончательные оценки получаются очень завышенными. В статье решение усеченного уравнения собирается из решений уравнений с бесконечномерными операторами. Для каждой части решения проведены независимые оценки, которые оказались эффективными и значительно менее грубыми. В работе показано, что решение усеченного уравнения в параллелепипеде вдали от границы можно искать как с помощью оператора свертки по всему пространству, так и с помощью многомерных циклических матриц.

Из полученных в работе оценок погрешности вытекает эффективность предложенного метода для систем большой размерности.

1. Вспомогательные утверждения

Пусть Z — множество целых чисел. Для подмножества $u \subset Z^m$ через P_u обозначим проектор, действующий в пространстве $l_p(Z^m)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ по формуле

$$(P_u\psi)_i = \begin{cases} \psi_i, & i \in u, \\ 0, & i \notin u. \end{cases}$$

Каждому линейному ограниченному оператору A, действующему в $l_p(Z^m)$, сопоставим функцию $\varphi_A : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$, определенную правилом

$$\varphi_A(t) = \sup_{\rho(u,v)>t} \|P_u A P_v\|, \tag{1}$$

где $u, v \subset Z^m$ и $\rho(u, v)$ — расстояние между множествами u и v. Свойства функции $\varphi_A(t)$ подробно изучены в работе [10]. Там же доказано, что если оператор A обратим и $\varphi_A(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, то и $\varphi_{A^{-1}}(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Определение. Оператор, действующий в пространстве $l_p(Z^m)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ по формуле

$$(Ax)_i = \sum_{j \in Z^m} a_{i-j} x_j,$$

где $i \in Z^m$, $a \in l_1(Z^m)$, называется оператором канонической свертки.

В данной работе мы будем рассматривать только канонические свертки, поэтому слово “каноническая” в дальнейшем будем опускать.

Если $a_i = 0$ при $|i| > r$ ($|i|$ — норма вектора i) для некоторого r, то оператор свертки A называется финитным.

Известно, что $\|A\| \leqslant \|a\|$ и

$$\varphi_A(t) \leqslant \sum_{|i|>t} |a_i|. \tag{2}$$

Отсюда следует, что для оператора свертки $\varphi_A(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, а для финитного оператора $\varphi_A(t) = 0$ при $t \geqslant r$.

2. Приближенное решение систем уравнений с двумерными операторами свертки в прямоугольниках

В этом пункте для краткости изложения рассмотрим двумерные операторы свертки на прямоугольных множествах. Это ограничение не является существенным. Полученные здесь результаты легко перенести на системы уравнений с многомерными операторами свертки в многогранниках.

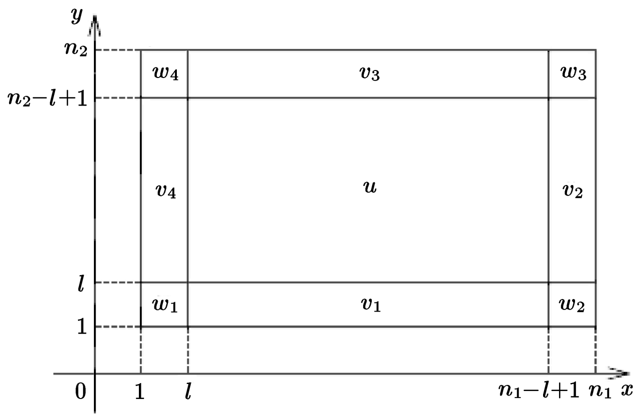
Пусть $n = (n_1, n_2) \in N^2$. На дискретной плоскости Z^2 рассмотрим прямоугольник $M = [1, n_1] \times [1, n_2]$, где $[1, m] = \{1, 2, \ldots, m\}$ — отрезок целых чисел. Основной целью данной работы является решение уравнения

$$P_M A P_M x = \boldsymbol{b}, \tag{3}$$

где A — оператор свертки, $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im} P_M$. Оператор $P_M A P_M$ будем рассматривать как оператор, действующий в пространстве $\mathrm{Im} P_M$.

Дискретный прямоугольник M разобъем на части (см. рисунок):

$$\begin{aligned}
u &= [l+1, n_1 - l] \times [l+1, n_2 - l],\\
v_1 &= [l+1, n_1 - l] \times [1, l],\\
v_2 &= [n_1 - l + 1, n_1] \times [l+1, n_2 - l],\\
v_3 &= [l+1, n_1 - l] \times [n_2 - l + 1, n_2],\\
v_4 &= [1, l] \times [l+1, n_2 - l],\\
w_1 &= [1, l] \times [1, l],\\
w_2 &= [n_1 - l + 1, n_1] \times [1, l],\\
w_3 &= [n_1 - l + 1, n_1] \times [n_2 - l + 1, n_2],\\
w_4 &= [1, l] \times [n_2 - l + 1, n_2].
\end{aligned}$$



На число l накладываются естественные ограничения: $2\,l < n_1$, $2\,l < n_2$.

Решение системы (3) будем искать на каждой части u, v_i, w_i отдельно.

Введем полупространства:

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= Z \times [1, +\infty), \\
\Pi_2 &= (-\infty, n_1] \times Z, \\
\Pi_3 &= Z \times (-\infty, n_2], \\
\Pi_4 &= [1, +\infty) \times Z
\end{aligned}$$

и углы:

$$\begin{aligned}
K_1 &= [1, +\infty) \times [1, +\infty), \\
K_2 &= (-\infty, n_1] \times [1, +\infty), \\
K_3 &= (-\infty, n_1] \times (-\infty, n_2], \\
K_4 &= [1, +\infty) \times (-\infty, n_2].
\end{aligned}$$

В работе [12] доказано, что для того, чтобы операторы $P_M A P_M$ были обратимы на достаточно больших прямоугольниках ($n \geqslant n_0$) и нормы обратных операторов $(P_M A P_M)^{-1}$ были равномерно ограничены, необходимо и достаточно, чтобы были обратимы операторы $P_{K_i} A P_{K_i}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Формально операторы $P_{K_i} A P_{K_i}$ $(i = 2, 3, 4)$ зависят от прямоугольника M. Но так как оператор A инвариантен относительно сдвига, то эти операторы изометрически подобны операторам в углах с фиксированной вершиной.

В дальнейшем будем считать, что операторы $P_{K_i} A P_{K_i}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ обратимы и $n \geqslant n_0$. Отсюда уже следует (см. [13]), что операторы A и $P_{\Pi_i} A P_{\Pi_i}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ будут также обратимы.

Введем константу

$$C = \sup_{n \geqslant n_0} \left\| (P_M A P_M)^{-1} \right\|.$$

Обозначим через $x_0 = (P_M A P_M)^{-1} \boldsymbol{b}$ точное решение системы (3).

Теорема 1. *Приближенное решение $\tilde{x}$ системы уравнений* (3) *на множестве и можно искать в виде*

$$P_u \tilde{x} = P_u A^{-1} \boldsymbol{b}.$$

При этом справедлива оценка

$$\left\| P_u x_0 - P_u \tilde{x} \right\| \leqslant \varphi_{A^{-1}}(l) \, \|A\| \, C \, \|\boldsymbol{b}\|.$$

Доказательство. Рассмотрим разность между точным и приближенным решениями на множестве u. Имеем

$$\begin{aligned}
P_u x_0 - P_u \tilde{x} &= P_u \big(P_M A P_M\big)^{-1} \boldsymbol{b} - P_u A^{-1} \boldsymbol{b} \\
&= \Big(P_u - P_u A^{-1} P_M \big(P_M A P_M\big)\Big) \big(P_M A P_M\big)^{-1} \boldsymbol{b} \\
&= \Big(P_u - P_u A^{-1} P_M A P_M\Big) \big(P_M A P_M\big)^{-1} \boldsymbol{b} \\
&= \Big(P_u - P_u A^{-1} \big(I - P_{M'}\big) A P_M\Big) \big(P_M A P_M\big)^{-1} \boldsymbol{b} \\
&= \Big(P_u - P_u A^{-1} A P_M + P_u A^{-1} P_{M'} A P_M\Big) \big(P_M A P_M\big)^{-1} \boldsymbol{b} \\
&= P_u A^{-1} P_{M'} A P_M \big(P_M A P_M\big)^{-1} \boldsymbol{b},
\end{aligned}$$

здесь $M' = Z^2 \setminus M$. Отсюда

$$\left\|P_u x_0 - P_u \tilde{x}\right\| \leqslant \left\|P_u A^{-1} P_{M'}\right\| \|A\| \left\|(P_M A P_M)^{-1}\right\| \|\boldsymbol{b}\| \leqslant \varphi_{A^{-1}}(l) \|A\|\, C\, \|\boldsymbol{b}\|,$$

так как $\rho(u, M') > l$ и, следовательно, $\left\|P_u A^{-1} P_{M'}\right\| \leqslant \varphi_{A^{-1}}(l)$. □

Замечание 1. В следующем пункте мы покажем, что приближенное решение системы (3) на множестве u можно искать с помощью циклической матрицы.

Замечание 2. Если ядро a оператора свертки A финитное (или экспоненциально убывающее), то и функция $\varphi_{A^{-1}}(t)$ экспоненциально убывает.

Теорема 2. *Приближенное решение $\tilde{x}$ системы уравнений* (3) *на множествах v_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ можно искать в виде*

$$P_{v_i} \tilde{x} = P_{v_i} \big(P_{\Pi_i} A P_{\Pi_i}\big)^{-1} \boldsymbol{b}.$$

При этом справедлива оценка

$$\left\|P_{v_i} x_0 - P_{v_i} \tilde{x}\right\| \leqslant \varphi_{\left(P_{\Pi_i} A P_{\Pi_i}\right)^{-1}}(l) \|A\|\, C\, \|\boldsymbol{b}\|.$$

Доказательство. Так же, как и при доказательстве теоремы 1, рассмотрим разность

$$\begin{aligned}
P_{v_i} x_0 - P_{v_i} \tilde{x} &= P_{v_i} \big(P_M A P_M\big)^{-1} \boldsymbol{b} - P_{v_i} \big(P_{\Pi_i} A P_{\Pi_i}\big)^{-1} \boldsymbol{b} \\
&= \Big(P_{v_i} - P_{v_i} \big(P_{\Pi_i} A P_{\Pi_i}\big)^{-1} P_M \big(P_M A P_M\big)\Big) \big(P_M A P_M\big)^{-1} \boldsymbol{b} \\
&= \Big(P_{v_i} - P_{v_i} \big(P_{\Pi_i} A P_{\Pi_i}\big)^{-1} P_M A P_M\Big) \big(P_M A P_M\big)^{-1} \boldsymbol{b} \\
&= \Big(P_{v_i} - P_{v_i} \big(P_{\Pi_i} A P_{\Pi_i}\big)^{-1} \big(P_{\Pi_i} - P_{M'}\big) A P_M\Big) \big(P_M A P_M\big)^{-1} \boldsymbol{b} \\
&= \Big(P_{v_i} - P_{v_i} \big(P_{\Pi_i} A P_{\Pi_i}\big)^{-1} \big(P_{\Pi_i} A P_{\Pi_i}\big) P_M + P_{v_i} \big(P_{\Pi_i} A P_{\Pi_i}\big)^{-1} P_{M'} A P_M\Big) \big(P_M A P_M\big)^{-1} \boldsymbol{b} \\
&= P_{v_i} \big(P_{\Pi_i} A P_{\Pi_i}\big)^{-1} P_{M'} A P_M \big(P_M A P_M\big)^{-1} \boldsymbol{b},
\end{aligned}$$

здесь $M' = \Pi_i \setminus M$. Отсюда

$$\left\|P_{v_i} x_0 - P_{v_i} \tilde{x}\right\| \leqslant \left\|P_{v_i} \big(P_{\Pi_i} A P_{\Pi_i}\big)^{-1} P_{M'}\right\| \|A\| \left\|\big(P_M A P_M\big)^{-1}\right\| \|\boldsymbol{b}\| \leqslant \varphi_{\left(P_{\Pi_i} A P_{\Pi_i}\right)^{-1}}(l) \|A\| C \|\boldsymbol{b}\|,$$

так как $\rho\big(v_i, M'\big) > l$ и, следовательно, $\left\|P_{v_i} \big(P_{\Pi_i} A P_{\Pi_i}\big)^{-1} P_{M'}\right\| \leqslant \varphi_{\left(P_{\Pi_i} A P_{\Pi_i}\right)^{-1}}(l)$. □

Замечание 3. Если ядро a оператора свертки A финитное (или экспоненциально убывающее), то и функция $\varphi_{(P_{\Pi_i} A P_{\Pi_i})^{-1}}(t)$ экспоненциально убывает.

Теорема 3. *Приближенное решение $\tilde{x}$ системы уравнений* (3) *на множествах w_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ можно искать в виде*

$$P_{w_i} \tilde{x} = P_{w_i} \big(P_{K_i} A P_{K_i}\big)^{-1} \boldsymbol{b}.$$

При этом справедлива оценка

$$\left\|P_{w_i} x_0 - P_{w_i} \tilde{x}\right\| \leqslant \varphi_{\left(P_{K_i} A P_{K_i}\right)^{-1}}\big(\min\{n_1, n_2\} - l\big) \|A\|\, C\, \|\boldsymbol{b}\|.$$

Доказательство теоремы 3 полностью аналогично доказательству теоремы 2. Мы его приводить не будем.

В отличие от операторов A и $P_{\Pi_i}AP_{\Pi_i}$ для операторов $P_{K_i}AP_{K_i}$ эффективные методы обращения неизвестны. Даже для финитных операторов свертки неизвестно, будет ли функция $\varphi_{(P_{K_i}AP_{K_i})^{-1}}(t)$ экспоненциально стремиться к нулю. Поэтому теорема 3 имеет лишь теоретическое значение. Практическое применение возможно лишь в тех случаях, когда известны операторы $(P_{K_i}AP_{K_i})^{-1}$. Обойти эту трудность можно численно. Допустим, что приближенное решение $\tilde{x}$ уже найдено для множеств $u,\ v_i$ $(i = 1,2,3,4)$. Необходимо найти недостающую часть решения на множествах w_i $(i = 1,2,3,4)$. Для упрощения записи введем обозначения:

$$W = \bigcup_{i=1}^{4} w_i, \quad V = u \cup v_1 \cup v_2 \cup v_3 \cup v_4.$$

Приближенное решение $\tilde{x}$ на множестве W найдем из системы уравнений:

$$P_W A(P_W\tilde{x} + P_V\tilde{x}) = P_W\boldsymbol{b} \tag{4}$$

или, что то же самое,

$$P_W AP_W\tilde{x} = P_W\boldsymbol{b} - P_W AP_V\tilde{x}. \tag{5}$$

При сделанных ограничениях на оператор свертки A эта система является определенной при достаточно больших l $(l \geqslant l_0)$. Для финитного оператора свертки при больших l система (5) распадается на 4 системы уравнений с одинаковыми матрицами, аналогичными исходной, но меньшей размерности.

Теорема 4. *Пусть $P_W\tilde{x}$ — точное решение системы уравнений* (5), *а x_0 — точное решение системы уравнений* (3). *Тогда*

$$\|P_W x_0 - P_W\tilde{x}\| \leqslant C\,\|A\|\,\|P_V(x_0 - \tilde{x})\|.$$

Доказательство. Так как x_0 — точное решение системы (3), то

$$P_M AP_M(P_W x_0 + P_V x_0) = \boldsymbol{b}.$$

Пусть

$$P_M AP_M(P_W x_0 + P_V\tilde{x}) = \tilde{\boldsymbol{b}}. \tag{6}$$

Вычитая из предпоследнего равенства последнее, получим

$$P_M AP_M(P_V(x_0 - \tilde{x})) = \boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}.$$

Отсюда

$$\left\|\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}\right\| \leqslant \|A\|\,\|P_V(x_0 - \tilde{x})\|. \tag{7}$$

Так как $P_W\tilde{x}$ — точное решение системы уравнений (5), то

$$P_W A(P_W\tilde{x} + P_V\tilde{x}) = P_W\boldsymbol{b}. \tag{8}$$

Подействуем на равенство (6) проектором P_W слева. Получим

$$P_W A(P_W x_0 + P_v\tilde{x}) = P_W\tilde{\boldsymbol{b}}. \tag{9}$$

Вычитая из равенства (9) равенство (8), будем иметь

$$P_W A P_W (x_0 - \tilde{x}) = P_W (\tilde{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{b}).$$

Следовательно,

$$P_W (x_0 - \tilde{x}) = (P_W A P_W)^{-1} P_W (\tilde{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{b}).$$

Таким образом,

$$\big\| P_W (x_0 - \tilde{x}) \big\| \leqslant \big\| (P_W A P_W)^{-1} \big\| \, \big\| \tilde{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{b} \big\| \leqslant C \big\| \tilde{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{b} \big\|.$$

Учитывая оценку (7), окончательно получим

$$\big\| P_W (x_0 - \tilde{x}) \big\| \leqslant C \, \|A\| \, \big\| P_V (x_0 - \tilde{x}) \big\|. \qquad \square$$

Следствие. *Если система уравнений* (5) *решается приближенно и* $P_W \hat{x}$ *— ее приближенное решение, то*

$$\|P_W x_0 - P_W \hat{x}\| \leqslant C \, \|A\| \, \|P_V (x_0 - \tilde{x})\| + \|P_W \hat{x} - P_W \tilde{x}\|.$$

Замечание 4. Предложенный метод применим к многомерным операторам свертки любой размерности. При этом в одномерном случае приближенное решение получается только с помощью теорем 1 и 2. Если же размерность пространства $m > 2$, то эффективные приближенные решения получаются для части параллелепипеда, отделенной от границы, и частей, примыкающих к граням размерности $m - 1$. Для остальных граней и вершин решение придется находить численно.

Замечание 5. Без существенных изменений предложенный метод может быть перенесен с параллелепипедов на произвольные многогранники.

3. Приближенное решение многомерных уравнений с теплицевыми матрицами с помощью циклических матриц

Пусть A — оператор свертки с ядром $a \in l_1(Z^m)$, действующий в пространстве $l_p(Z^m)$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ и $n = (n_1, n_2, \ldots, n_m) \in N^m$. Рассмотрим дискретный параллелепипед

$$M = [1, n_1] \times [1, n_2] \times \cdots \times [1, n_m].$$

Решение уравнения

$$P_M A P_M x = \boldsymbol{b} \quad (\boldsymbol{b} \in Im P_M) \tag{10}$$

будем искать на множестве $u = [2\,l + 1, n_1 - 2\,l] \times [2\,l + 1, n_2 - 2\,l] \times \cdots \times [2\,l + 1, n_m - 2\,l]$, где $l \geqslant 1$, $4l < n_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$.

Сопоставим оператору A и параллелепипеду M циклическую матрицу

$$C_M = (c_{i \ominus j})_{i,j \in M}, \tag{11}$$

где $i \ominus j$ — вычитание по модулю $n = (n_1, n_2, \ldots, n_m)$ для мультииндексов $i = (i_1, i_2, \ldots, i_m)$, $j = (j_1, j_2, \ldots, j_m)$ и

$$c_i = \sum_{j=i (\operatorname{mod} n)} a_j, \tag{12}$$

где $0 \le i_k < n_k$, $|j_k| < n_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Справедлива лемма.

Лемма. *Если оператор свертки A обратим, то для достаточно больших параллелепипедов ($n \geqslant n_0$) матрицы C_M обратимы и*

$$\sup_{n \geqslant n_0} \left\| C_M^{-1} \right\| < +\infty,$$

где под нормой матрицы понимается норма оператора, действующего в $l_p(M)$.

Доказательство. Для положительного числа $r > 0$ введем вектор $a_r \in l_1(Z^m)$ формулой

$$(a_r)_i = \begin{cases} a_i, & |\, i \,| \leqslant r, \\ 0, & |\, i \,| > r, \end{cases}$$

где $i \in Z^m$. Тогда $\|a - a_r\| = \sum_{|\, i \,| > r} |a_i| \to 0$ при $r \to +\infty$. Вектору a_r сопоставим финитный оператор свертки A_r. Пусть $B = A^{-1}$ и $b \in l_1(Z^m)$ — ядро оператора B. Аналогично выше изложенному введем вектор b_r и оператор свертки B_r. Так как $\|a - a_r\| \to 0$ при $r \to +\infty$, то существует такое r_1, что для $r \geqslant r_1$

$$\|a - a_r\| \leqslant \frac{1}{4\|b\,\|}. \tag{13}$$

Рассмотрим оператор свертки

$$\Delta^{(r)} = A_r\, B_r - I.$$

Пусть $\delta^{(r)}$ — ядро этого оператора. Тогда $\left\|\delta^{(r)}\right\| \to 0$ при $r \to +\infty$. Следовательно, существует такое r_2, что для $r \geqslant r_2$

$$\left\|\delta^{(r)}\right\| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Положим $r = \max\{r_1, r_2\}$. Для этого r будет выполнена оценка (13) и равенство

$$A_r\, B_r = I + \Delta^{(r)}, \tag{14}$$

где $\left\|\delta^{(r)}\right\| \leqslant \frac{1}{2}$. Операторам A_r, B_r, $\Delta^{(r)}$ и параллелепипеду M по формулам (11) и (12) сопоставим циклические матрицы $C_M^{(r)}$, $D_M^{(r)}$ и $F_M^{(r)}$ соответственно. Будем считать параллелепипед M настолько большим, что $n_k > 4r$ ($k = 1, 2, \ldots, m$). При этих условиях равенство (14) для сверток перейдет в равенство

$$C_M^{(r)}\, D_M^{(r)} = I_M + F_M^{(r)}$$

для циклических матриц, где $\left\|F_M^{(r)}\right\| \leqslant \left\|\delta^{(r)}\right\| \leqslant \frac{1}{2}$.

Отсюда следует, что матрица $I_M + F_M^{(r)}$ обратима и $\left\|\left(I_M + F_M^{(r)}\right)^{-1}\right\| \leqslant 2$. Но тогда обратима и матрица $C_M^{(r)}$. При этом $\left(C_M^{(r)}\right)^{-1} = D_M^{(r)}\left(I_M + F_M^{(r)}\right)^{-1}$. Следовательно,

$$\left\|\left(C_M^{(r)}\right)^{-1}\right\| \leqslant 2\left\|D_M^{(r)}\right\| \leqslant 2\left\|b^{(r)}\right\| \leqslant 2\|b\|.$$

В силу (13)

$$\left\|C_M - C_M^{(r)}\right\| \leqslant \|a - a_r\| \leqslant \frac{1}{4\,\|b\,\|} \leqslant \frac{1}{2\left\|\left(C_M^{(r)}\right)^{-1}\right\|}.$$

Из этого равенства следует, что матрица C_M обратима и

$$\left\|C_M^{-1}\right\| \leqslant 2\left\|\left(C_M^{(r)}\right)^{-1}\right\| \leqslant 4\,\|b\,\|. \qquad \square$$

Введем константу

$$K = \sup_M \left\|C_M^{-1}\right\|.$$

Теорема 5. *Пусть операторы $P_{K_i}AP_{K_i}$ обратимы во всех углах K_i, соответствующих углам параллелепипеда M. Приближенное решение $\overline{x}$ системы* (10) *на множестве u можно искать в виде*

$$P_u\overline{x} = P_u C_M^{-1}\boldsymbol{b}.$$

При этом справедлива оценка

$$\left\|P_u x_0 - P_u\overline{x}\right\| \leqslant \left\|A^{-1}\right\|\left(\sum_{|i|>l}|a_i|\right)K\,\|\boldsymbol{b}\,\| + 2\varphi_{A^{-1}}(l)\|a\|\,K\,\|\boldsymbol{b}\,\| + \varphi_{A^{-1}}(2\,l)\|a\|\,C\,\|\boldsymbol{b}\,\|,$$

где x_0 — точное решение.

Доказательство. В теореме 1 было доказано, что

$$\left\|P_u x_0 - P_u\tilde{x}\right\| \leqslant \varphi_{A^{-1}}(2\,l)\,\|A\|\,C\,\|\boldsymbol{b}\,\|, \tag{15}$$

где $P_u\tilde{x} = P_u A^{-1}\boldsymbol{b}$. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} P_u\overline{x} - P_u\tilde{x} &= P_u C_M^{-1}\boldsymbol{b} - P_u A^{-1}\boldsymbol{b} = P_u A^{-1}(AP_M - C_M)C_M^{-1}\boldsymbol{b} \\ &= P_u A^{-1}(P_{\tilde{u}} + P_{\tilde{v}})(AP_M - C_M)C_M^{-1}\boldsymbol{b} \\ &= P_u A^{-1}P_{\tilde{u}}(AP_M - C_M)C_M^{-1}\boldsymbol{b} + P_u A^{-1}P_{\tilde{v}}(AP_M - C_M)C_M^{-1}\boldsymbol{b}, \end{aligned}$$

где $\tilde{u} = [l+1, n_1 - l] \times [l+1, n_2 - l] \times \cdots \times [l+1, n_m - l]$, $\tilde{v} = Z^m \setminus \tilde{u}$.
Отсюда

$$\begin{aligned} \|P_u\overline{x} - P_u\tilde{x}\| &\leqslant \left\|P_u A^{-1}P_{\tilde{u}}(AP_M - C_M)C_M^{-1}\boldsymbol{b}\,\right\| + \left\|P_u A^{-1}P_{\tilde{v}}(AP_M - C_M)C_M^{-1}\boldsymbol{b}\,\right\| \\ &\leqslant \left\|A^{-1}\right\|\,\left\|P_{\tilde{u}}(AP_M - C_M)\right\|\,\left\|C_M^{-1}\right\|\,\|\boldsymbol{b}\,\| + \left\|P_u A^{-1}P_{\tilde{v}}\right\|\,\left\|AP_M - C_M\right\|\,\left\|C_M^{-1}\right\|\,\|\boldsymbol{b}\,\| \\ &\leqslant \left\|A^{-1}\right\|\left(\sum_{|i|>l}|a_i|\right)K\,\|\boldsymbol{b}\,\| + \varphi_{A^{-1}}(l)\,2\,\|a\|\,K\,\|\boldsymbol{b}\,\|. \end{aligned}$$

С учетом оценки (15) окончательно получаем

$$\|P_u x_0 - P_u\overline{x}\| \leqslant \left\|A^{-1}\right\|\left(\sum_{|i|>l}|a_i|\right)K\,\|\boldsymbol{b}\,\| + 2\varphi_{A^{-1}}(l)\,\|a\|\,K\,\|\boldsymbol{b}\,\| + \varphi_{A^{-1}}(2\,l)\,\|a\|\,C\,\|\boldsymbol{b}\,\|. \quad \square$$

Замечание 6. Из полученной оценки следует, что если ядро a оператора свертки A финитное (или экспоненциально убывающее), то погрешность экспоненциально убывает при увеличении l и не зависит от n.

Литература

1. **Воеводин В.В., Тыртышников Е.Е.** Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами. — М.: Наука, 1987.
2. **Тыртышников Е.Е.** Теплицевы матрицы, некоторые их аналоги и приложения. — М.: ОВМ АН СССР, 1989.
3. **Bottcher A., Silbermann B.** Introduction to Large Truncated Toeplitz Matrices. — USA, New York: Springer-Verlag, 1999.
4. **Bottcher A., Grudsky S.M.** Spectral Properties of Banded Toeplitz Matrices. — USA, PA, Philadelphia: SIAM, 2005.
5. **Bottcher A., Silbermann B.** Analysis of Toeplitz Operators. 2nd ed. // Springer Monographs in Mathematics. — Berlin: Springer-Verlag, 2006.
6. **Olshevsky V., Oseledets I.V., and Tyrtyshnikov E.E.** Superfast inversion of two-level Toeplitz matrices using Newton iteration and tensor-displacement structure // Operator Theory: Advances and Applications. — 2008. — Vol. 179. — P. 229–240.
7. **Chan R.H.-F., Jin X.-Q.** An Introduction to Iterative Toeplitz Solvers. — USA, PA, Philadelphia: SIAM, 2007.
8. **Fiorentino G., Serra S.** Multigrid methods for symmetric positive definite block Toeplitz matrices with nonnegative generating functions // SIAM J. Sci. Comp. — 1996. — Vol. 17, iss 5. — P. 1068–1081.
9. **Gallivan K.A., Thirumalai S., Van Dooren P., and Vermaut V.** High performance algorithms for Toeplitz and block Toeplitz matrices // Linear Algebra Appl. — 1996. — Vol. 241-243. — P. 343–388.
10. **Козак А.В., Симоненко И.Б.** Проекционные методы решения многомерных дискретных уравнений в свертках // Сибирский математический журнал. — 1980. — Т. 21, № 2. — С. 119–127.
11. **Малышев В.А.** Случайные блуждания. Уравнения Винера–Хопфа в четверти плоскости. Автоморфизмы Галуа. —М.: Изд-во МГУ, 1970.
12. **Козак А.В.** Локальный принцип в теории проекционных методов // Докл. АН СССР. — 1973. — Т. 212, № 6. — С. 1287–1289.
13. **Симоненко И.Б.** О многомерных дискретных свертках // Матем. исслед. — Кишинев, 1968. — Т. 3, № 1(7). — С. 108–122.
14. **Grudsky S.M., Kozak A.V.** On the convergence speed of the norms of the inverses of truncated Toeplitz operators // Integra-Differential Equations Applications. — Rostov-on-Don: Rostov-on-Don University Press, 1995. — P. 45–55.
15. **Bottcher A., Grudsky S., Kozak A., and Silbermann B.** Norms of large Toeplitz band matrices // SIAM J. Matrix Anal. Appl. — 1999. — Vol. 21, iss 2. — P. 547–561.
16. **Bottcher A., Grudsky S., Kozak A., and Silbermann B.** Convergence speed estimates for the norms of the inverses of large truncated Toeplitz matrices // Calcolo. — 1999. — Vol. 36, iss 2. — P. 103–122.
17. **Bottcher A., Grudsky S., and Kozak A.** On the distance of a large Toeplitz band matrix to the nearest singular matrix // Oper. Theory: Adv. Appl. — 2002. — Vol. 135. — P. 101–106.

Поступила в редакцию 9 сентября 2013 г.,
в окончательном варианте 20 февраля 2014 г.