

этой дуги по схеме Жуковского — Рошко (с отрывом струй в концах дуги) имеет решение при любых числах кавитации, больших Q_0 .

Заметим, что совершенно такой же результат верен для обтекания по схеме Рябушинского [3].

Легко обобщить полученные теоремы на случай обтекания симметричного клина с криволинейными щеками (см. [7]).

Поступила 21 III 1964

ЛИТЕРАТУРА

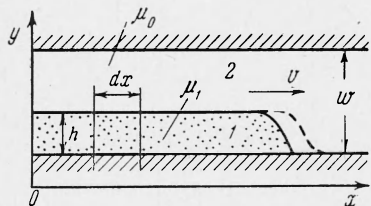
1. L e g a u J. Les problèmes de représentation conforme d'Helmholtz; théories des sillages et des pous. Comm. Math. Helv., 1935—36. vol. 8. No. 2—3.
2. Г у р е в и ч М. И. Теория струй идеальной жидкости. Физматгиз, 1961.
3. Х а й к и н М. И. Теоремы существования для одного класса обратных смешанных краевых задач теории аналитических функций. Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1961, вып. 64.
4. S e r r i n J. Existence theorems for some free boundary problems. J. Rat. Mec. and Anal., 1952, vol. 1, No. 1.
5. B i r k h o f f G., Z a n a n t o n e l l o E. H. Jets, Wakes and Cavities. New York, 1957.
6. Л е р е й Ж., Ш а у д е р Ю. Топология и функциональные уравнения. Успехи матем. наук, 1946, т. 1, № 3—4.
7. Х а й к и н М. И. О разрешимости обратной смешанной краевой задачи. Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1962, вып. 68.

О ДВИЖЕНИИ СУСПЕНЗИЙ В УЗКИХ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ЩЕЛЯХ

И. Ф. Белова, Ю. В. Желтов, Ю. П. Желтов

(Москва)

Задача о движении грубодисперсных суспензий в горизонтальных трещинах (щелях) возникла в связи с разработкой технологии гидравлического разрыва нефтяного пласта [1—3]. При осуществлении этого метода появляется необходимость закачки в трещины, образующиеся в горных породах, смеси жидкости с твердым зернистым материалом, служащим закрепляющим агентом. В качестве зернистого материала наиболее часто применяется крупнозернистый (0.6—0.8 мм) песок, а в качестве жидкой фазы — вязкие жидкости (нефть, мазут, дизельное топливо, сульфит-спиртовая барда и т. п.).



Фиг. 1

Установившееся движение таких суспензий в щелях с непроницаемыми стенками изучалось в работах [4—6]. Ниже исследуется неустановившееся движение этих смесей в горизонтальных трещинах с непроницаемыми стенками.

Изложенный метод, основанный на аналогии [7] между механизмами фильтрации несмешивающихся жидкостей в пористой среде и движения смеси песка с жидкостью в щели, дает возможность определить основные технологические параметры закрепления трещин песком при проектировании операций гидроразрыва. Задаваемыми и регулируемыми параметрами в этом процессе являются концентрация твердой фазы в смеси и расход жидкости. Расчетные схемы подобного характера можно использовать в других отраслях техники, процессы которых связаны с движением суспензий, например, в гидротранспорте, в строительстве каналов и т. д.

§ 1. Аналогия движения смеси жидкости с песком в щели и фильтрации несмешивающихся жидкостей. Рассмотрим вначале механизм заполнения песком, взвешенным в вязкой жидкости, плоской горизонтальной щели (фиг. 1). В работе [4] было показано, что механизм перемещения песка в горизонтальной трещине можно описывать схемой послойного движения двух жидкостей с различной вязкостью. Эта возможность реализуется, если считать, что вязкость основной несущей жидкости равна μ_0 , а вязкость смеси жидкости с песком μ_1 определяется соотношением

$$\mu_1 = \mu_0 e^{3.18c} \quad (1.1)$$

Здесь c — объемная концентрация твердой фазы в смеси.

Проведенные экспериментальные исследования [4] подтвердили правильность применения указанной выше схемы и, кроме того, показали, что, за исключением случаев закачки в щель очень бедной песком смеси, концентрация твердой фазы в нижнем слое всегда составляет величину около 0.5. Там же [4] было получено аналитическое решение задачи о движении в прямолинейной щели с параллельными непроницаемыми стенками двух жидкостей с различными вязкостями.

Используя аналогию двуслойного движения вязких жидкостей и движения смеси жидкости и песка в щели, можно написать выражения для скоростей движения жидкости v_0 и смеси жидкости с песком v_1 , отнесенных ко всей ширине щели w

$$v_0 = \frac{w^2}{12\mu_0} \frac{\Delta p_c}{l} k_0(\sigma, \varepsilon), \quad v_1 = \frac{w^2}{12\mu_1} \frac{\Delta p_c}{l} k_1(\sigma, \varepsilon),$$

$$\sigma = e^{3.18\varphi}, \quad \varepsilon = \frac{h}{w} \quad (1.2)$$

Здесь Δp_c — перепад давления на длине щели l , φ — объемная концентрация песка в нижнем слое.

Фактически рассматриваемая жидкость движется в верхнем слое, но расход ее в каждом сечении относится ко всему сечению. Используя результаты [4], получаем выражения относительных проводимостей для жидкости и смеси в щели [7]

$$k_0 = \frac{2(2 - 3\varepsilon + \varepsilon^3)(\sigma - \varepsilon\sigma + \varepsilon) + 3(\varepsilon^2 + \sigma - \varepsilon^2\sigma)(2\varepsilon - \varepsilon^2 - 1)}{(1 - \varepsilon)\sigma + \varepsilon}$$

$$k_1 = \varepsilon^2 \frac{\varepsilon^2 - \sigma(\varepsilon^2 + 2\varepsilon - 3)}{\sigma(1 - \varepsilon) + \varepsilon} \quad (1.3)$$

Заменяя $\Delta p_c/l$ в формуле (1.2) дифференциальной формой, получаем

$$v_0 = -\frac{w^2}{12\mu_0} k_0(\sigma, \varepsilon) \frac{\partial p}{\partial x}, \quad v_1 = -\frac{w^2}{12\mu_1} k_1(\sigma, \varepsilon) \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.4)$$

Легко видеть, что формулы (1.4) аналогичны закону фильтрации несмешивающихся жидкостей в пористой среде (например, нефти и воды). Входящие в эти выражения величины $k_0(\sigma, \varepsilon)$, $k_1(\sigma, \varepsilon)$ представляют собой аналоги относительных проницаемостей; $\varepsilon = hw^{-1}$ — относительная толщина слоя движущегося в щели песка — является аналогом насыщенности, а σ — дополнительный параметр, учитывающий кажущуюся вязкость смеси.

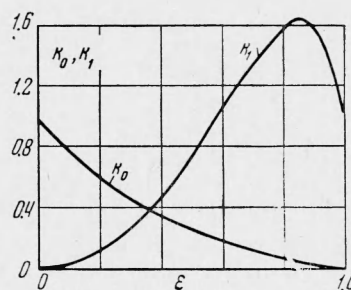
Если, согласно [4], принять, что в нижнем слое $\varphi \approx 0.5$, то $\sigma = e^{3.18 \cdot 0.5} \approx 4.9$. Зависимости $k_0 = k_0(\sigma, \varepsilon)$ и $k_1 = k_1(\sigma, \varepsilon)$, вычисленные для $\sigma = 4.9$, показаны на фиг. 2.

Эти зависимости отличаются от кривых относительной проницаемости для пористых сред тем, что при определенных $\varepsilon < 1$ относительная проницаемость для смеси k_1 оказывается большей, чем при $\varepsilon = 1$. Это поведение кривой $k_1 = k_1(\sigma, \varepsilon)$ имеет объяснение. Для этого рассмотрим, например, профили скоростей в щели, построенные при $\varepsilon = 0.8$ и $\varepsilon = 1$ на фиг. 3 в виде зависимости

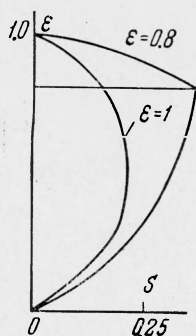
$$\varepsilon = \varepsilon(S), \quad S = \frac{2v_x \mu_0 \sigma}{w \Delta p_c / l}$$

Здесь v_x — истинная скорость в направлении оси абсцисс x (фиг. 1). Хотя при $\varepsilon = 1$ смесь полностью заполняет щель, т. е. сечение щели, занятое смесью жидкости с песком, в этом случае больше, чем при $\varepsilon = 0.8$, расход смеси в щели будет все же меньше, чем при $\varepsilon = 0.8$: вверху, вместо неподвижной верхней стенки, имеется слой движущейся жидкости, поэтому площадь эпюры скорости потока смеси при $\varepsilon = 0.8$ будет больше, чем при $\varepsilon = 1$ (фиг. 3). Этот эффект аналогичен так называемому «эффекту смазки», известному в трубной гидравлике.

Аналогия движения песка в горизонтальных щелях и фильтрации неоднородной жидкости [7] позволяет использовать для расчета заполнения щели песком теорию Бакли — Леверетта [8-10]. Однако нужно помнить следующее обстоятельство. Используемая выше схема пригодна для описания движения смеси жидкости с песком лишь в достаточно узкой щели. Если же ширина трещины велика (более



Фиг. 2



Фиг. 3

десяти диаметров частицы твердой фазы), то в нижней ее части образуется «мертвая зона», состоящая из осевшего неподвижного песка. Для описания этого случая потребуется иная схема.

§ 2. Заполнение прямолинейной плоской щели песком. Выведем сначала уравнение неразрывности потока жидкости и смеси жидкости с песком в щели. Будем считать, что ширина щели $w = w(x)$ слабо изменяется с изменением координаты x . Тогда, рассматривая баланс смеси в щели переменного сечения, получаем уравнение неразрывности для смеси

$$v_1 \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial v_1}{\partial x} + w \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0 \quad (2.1)$$

и соответственно для чистой жидкости

$$v_0 \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial v_0}{\partial x} - w \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0 \quad (t - \text{время}) \quad (2.2)$$

Группируя члены в (2.1), (2.2) и складывая их, получим $w(v_0 + v_1) = \text{const}$. Подставляя (1.4) в (2.1) и (2.2), получим уравнения движения смеси в щели. Далее, следуя методу Бакли — Леверетта [8-10], можно получить соотношение

$$F(\sigma, \varepsilon) = \frac{k_1}{k_1 + (\mu_1/\mu_0)k_0} \quad (2.3)$$

График этой функции при $\sigma = 4.9$ приведен на фиг. 4. Имеем

$$-Fq = wv_1, \quad q = -w(v_1 + v_0) = \text{const} \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в (2.1), получим

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon} q \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + w \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0 \quad (2.5)$$

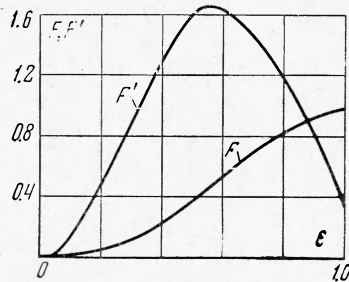
Решение уравнения (2.5) при $w = \text{const}$ имеет вид [8-10]

$$x = F'qt + \text{const}, \quad F = dF/d\varepsilon \quad (2.6)$$

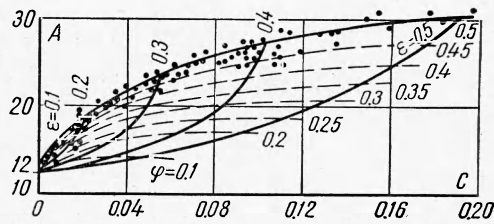
Если считать, что все ε равны нулю при $t = 0$, то

$$x = F'qt, \quad \text{или} \quad \xi = x/qt = F'(\varepsilon) \quad (2.7)$$

Как следует из (2.7), относительная высота слоя песка ε изменяется вдоль координаты x или безразмерной координаты ξ . Пусть безразмерная координата пе-



Фиг. 4



Фиг. 5

реднего края (фронта) песка равна ξ_* . Тогда, на основе баланса закачанного в щель песка, можно записать

$$v = qt = \int_0^{\xi_*} w\varepsilon dx \quad \text{или} \quad \int_0^{\xi_*} \varepsilon(\xi) d\xi = 1 \quad (2.8)$$

Можно показать, что, как и в случае движения несмешивающихся жидкостей [8-10], имеет место соотношение для определения ε_*

$$F'(\varepsilon_*) = F(\varepsilon_*)\varepsilon_*^{-1} \quad (2.9)$$

Точка ε_* есть точка касания прямой [8], проведенной из начала координат к кривой $F = F(\varepsilon)$.

Однако в рассматриваемой задаче о распространении песка в щели могут существовать иные граничные условия, чем в случае [8]. В данном случае на границе $x = 0$ задается расход смеси жидкости с песком и расход чистой жидкости Q , или, другими словами, полный расход жидкости и концентрация песка c в жидкости.

При этом условии, согласно балансу, имеем

$$v_1 \varphi = Qc \quad (2.10)$$

Определим теперь величину v_0 . Выше упоминалось, что в верхнем слое щели движется чистая жидкость, а в нижнем — суспензия с примерно постоянной концентрацией $\varphi \approx 0.5$. Однако относительные скорости частиц песка и жидкости в нижнем слое различны, так как сквозь «песчаную решетку» движется жидкость. Теоретически трудно определить, сколько проходит жидкости через песок — «песчаную решетку» — в единицу времени. Однако имеются экспериментальные данные [4], согласно которым имеем для прямоугольной щели

$$A(c) = \frac{\Delta p_c}{l} \frac{w^3}{\mu_0 Q} \quad (2.11)$$

Зависимость $A = A(c)$ показана на фиг. 5. В дифференциальной форме это соотношение можно написать в виде

$$A(c) = - \frac{dp}{dx} \frac{w^3}{\mu_0 Q}, \quad \text{или} \quad - \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{A(c) \mu_0 Q}{w^3} \quad (2.12)$$

В то же время¹

$$(v_0)_z = - \frac{w^3}{12\mu_0} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_z k_0(\varphi, \varepsilon_z), \quad (v_1)_z = - \left(\frac{w^3}{12\mu_1} \right)_z k_1(\varphi, \varepsilon_z) \quad (2.13)$$

Отсюда, используя (2.11), получаем

$$(v_0)_z = 1/12 A(c) Q k_0(\varphi, \varepsilon_z) \quad (2.14)$$

В формуле (2.14) неизвестны v_0 и ε_z . Для их определения воспользуемся соотношением (2.13) для смеси. Из (2.13) и (2.10) при $\varphi = 0.5$ получаем

$$v_1 = \frac{A(c) \mu_0}{12\mu_1} k_1(\varphi, \varepsilon_z) \approx 2c \quad (2.15)$$

Учитывая (1.1), будем иметь

$$A(c) k_1(\varphi, \varepsilon_z) = 24ce^{3.18\varphi} \quad (2.16)$$

Отсюда, зная c и полагая, что $\varphi \approx 0.5$, определяем ε_z . Затем, зная ε_z , по формуле (2.14) вычисляем $(v_0)_z$.

Итак, задано: $(v_0)_z = \text{const}$, $(v_1)_z = \text{const}$, $\varphi = 0.5$. Следовательно, согласно формуле (2.3), $\varepsilon_z = \text{const}$. При этом ε_z может принимать любое значение, в отличие от задачи Бакли — Леверетта [8], где сразу же $\rho_s = 1$ при $t \geq 0$.

Функция $F = F(\varepsilon)$ отражает долю скорости потока смеси песка с жидкостью в полном потоке вдоль щели. Типичный вид функции $F(\varepsilon)$ при $\sigma = 3.18c = 4.9$ изображен на фиг. 4. Там же изображена зависимость $F' = F'(\varepsilon)$. Если перестроить график этой зависимости, поменяв координаты, то, согласно (2.8), положение ξ_* на графике фиг. 6 будет определяться из условия, что площадь, очерчиваемая кривой распределения слоя смеси песка с жидкостью, равна единице, т. е. должно иметь место равенство заштрихованных на фиг. 6 площадей M и N . Пример на фиг. 6 показан для случая $\varepsilon_z = 0.95$.

По предложенному способу были произведены расчеты заполнения прямолинейной плоской щели песком при различных C и Q для случаев, когда ширина щели w равна 0.8 и 0.3 см. Результаты расчетов показали, что распределение слоя песка, в соответствии с теорией Бакли — Леверетта, происходит при $\varepsilon \geq 0.76$, а при меньших значениях ε слой песка имеет практически одинаковую высоту по всей длине щели.

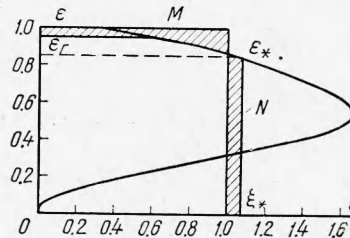
§ 3. Заполнение песком радиальной горизонтальной трещины. Используя те же соображения, которые были изложены в § 2, можно получить уравнение неразрывности для радиальной горизонтальной щели переменного сечения. Уравнения для каждой из фаз имеют вид

$$w \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{v_1 w}{r} + w \frac{\partial v_1}{\partial r} + v_1 \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad (3.1)$$

$$- w \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{v_0 w}{r} + w \frac{\partial v_0}{\partial r} + v_0 \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad (3.2)$$

При $w = \text{const}$ из этих уравнений получаются соотношения, аналогичные уравнениям Бакли — Леверетта.

¹ Индексом z обозначены соответствующие величины на границе щели.



Фиг. 6

Выражения (3.1) и (3.2) можно записать в виде

$$w \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{v_1 w}{r} + \frac{\partial (v_1 w)}{\partial r} = 0, \quad -w \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{v_0 w}{r} + \frac{\partial (v_0 w)}{\partial r} = 0 \quad (3.3)$$

Складывая два последних уравнения, получим

$$\frac{\partial}{\partial r} [(v_1 + v_0) w r] = 0, \quad \text{или } (v_1 + v_0) w r = \text{const} \quad (3.4)$$

Далее, согласно методу Бакли — Леверетта, по аналогии с § 2 получаем

$$F = \frac{v_1 r w}{(v_1 + v_0) r w} \quad (3.5)$$

Так как $(v_1 + v_0) r w = \text{const} = q$, то

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (v_1 w r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (F q), \quad \text{или } w \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (F q) = 0 \quad (3.6)$$

Уравнение (3.6) при $\varepsilon = \text{const}$ принимает вид

$$\frac{dr}{dt} = \frac{F' q}{w r} \quad (3.7)$$

Решение этого уравнения будет

$$\lambda(R) - \lambda(r_c) = F' \left(\lambda = \frac{1}{v} \int_{r_c}^R w r dr \right) \quad (3.8)$$

Здесь R — текущий радиус, r_c — радиус скважины (трубы), через которую суспензия закачивается в радиальную трещину. Рассмотрим теперь выражение

$$\int_{r_c}^{r_*} 2\pi r w \varepsilon dr = v$$

где r_* — координата переднего края (фронта) песка в щели.

Из (3.8) имеем $v^{-1} w r dr = d\lambda$ и, следовательно, можно записать

$$\int_{\lambda(r_c)}^{\lambda(r_*)} 2\pi \varepsilon(\lambda) d\lambda = 1 \quad (3.9)$$

Так как $\lambda(r_c) = \text{const}$, то из (3.8) будем иметь

$$d\xi = d[\lambda(R) - \lambda(r_c)], \quad \text{или } 2\pi \int_0^{\xi(r_*)} \varepsilon(\xi) d\xi = 1 \quad (3.10)$$

Таким образом, для случая радиальной трещины получим соотношение, аналогичное соотношению для прямолинейной щели, но площадь, очерчиваемая кривой распределения слоя смеси песка с жидкостью в щели, должна быть равна $1/2\pi$.

Поступила 18 VI 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Желтов Ю. П. Гидравлический разрыв пласта. Гостоптехиздат, М., 1957.
2. Максимович Г. К. Гидравлический разрыв нефтяных пластов. Гостоптехиздат, М., 1957.
3. Теория и практика гидравлического разрыва пласта. Материалы Всесоюзного совещания. Гостоптехиздат, 1957.
4. Дорожкин В. С., Желтов Ю. В., Желтов Ю. П. О движении смеси жидкости с песком в скважине и трещине. Изв. АН СССР. ОН, 1958, № 11.
5. Васильев Ю. Н. О движении песчано-жидкостных смесей по щелям. Нефт. х-во, 1958, № 10.
6. Шаньгин Н. Н., Изюмова А. М. Движение песка в горизонтальной трещине, образовавшейся при гидроразрыве пласта. Нефт. х-во, 1958, № 4.
7. Желтов Ю. П. Исследования процессов деформации и фильтрации в нефтяных пластах при их разработке. Автореф. докт. дис., ВНИИ, М., 1962.
8. Buckley J., Leverett M. Mechanism of fluid displacement in sands. Trans. AIME, 1942, vol. 146.
9. Эфрос Д. А. Определение относительных проницаемостей и функций распределения при вытеснении нефти водой. Докл. АН СССР, 1956, т. 100, № 5.
10. Рыжик В. М. Обзор работ по взаимному вытеснению несмешивающихся жидкостей из пористой среды. Изв. АН СССР. ОН, Механика и машиностроение, 1961, № 2.