УДК 519.626.1

Метод вычисления в реальном времени оптимального управления линейной системой с запаздывающим управлением*

В.М. Александров

Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. В.А. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090

E-mails: vladalex@math.nsc.ru, alexhome@yandex.ru

Александров В.М. Метод вычисления в реальном времени оптимального управления линейной системой с запаздывающим управлением // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2014. — Т. 17, № 1. — С. 17–30.

Разработан новый метод решения задачи оптимального по быстродействию управления в реальном времени. Он основан на аппроксимации множеств достижимости семейством гиперплоскостей, разделении вычислительных затрат на предварительные вычисления и вычисления в процессе управления, на интегрировании дифференциальных уравнений лишь на интервалах перемещений конечного момента и моментов переключений управления. Дана оценка вычислительной трудоемкости метода. Рассмотрены особенности вычисления в реальном времени оптимального управления линейной системой с запаздывающим управлением. Приведены результаты моделирования и численных расчетов.

Ключевые слова: *оптимальное управление, быстродействие, момент переключения, запаздывание, сопряженная система, фазовая траектория.*

Aleksandrov V.M. A method of optimal real-time computation of a linear system with retarded control // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2014. — Vol. 17, № 1. — P. 17–30.

A new method of solving time-optimal control problems in real time has been developed. The method is based on the following: 1) approximating the attainability sets with a family of hyperplanes; 2) subdividing the whole computational process into the computations performed beforehand and those that are carried out while the control takes place; 3) integrating differential equations only over the displacement intervals of the control completion moment and the switching moments. The labor-intensive characteristic of the method is evaluated. Characteristics of calculating the optimal control of a linear system with retarded control in real time are considered. The results of modeling and numerical estimations are presented.

Key words: *optimal control, speed, switching moment, retardation, adjoint system, phase trajectory.*

1. Введение

Оптимальное управление представляет значительный теоретический и практический интерес [1, 2]. Особое место занимает задача оптимального быстродействия с запаздывающим управлением. Интерес к этой задаче вызван следующими обстоятельствами. Системы высокого порядка могут быть приближенно аппроксимированы системами малой размерности, но с запаздыванием. Уменьшение размерности описания управляемой

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00329) и Сибирского отделения РАН (междисциплинарный проект № 80).

системы позволяет обойти практические трудности с определением значений всех фазовых координат системы высокого порядка. Во-вторых, задача вычисления оптимального управления в общем случае при наличии ограничений аналитически неразрешима, а численные итерационные методы ее решения требуют значительных затрат времени, что порождает запаздывание при реализации оптимального управления в реальном времени. Основные вычислительные затраты любого итерационного метода нахождения оптимального управления вызваны интегрированием дифференциальных уравнений на всем интервале управления, что ведет к большим затратам времени и делает невозможным их применение для оптимального управления в реальном времени. Это приводит к необходимости разработки новых численных методов, учитывающих специфику решаемой задачи и обладающих в процессе управления малой вычислительной трудоемкостью. Используя линейное программирование и вариации Макшейна, в минской школе оптимального управления (Р. Габасов, Ф.М. Кириллова) разработаны конструктивные методы решения задач оптимального управления в реальном времени [3–6].

В настоящей работе развивается альтернативный подход к решению задач оптимального управления в реальном времени [7–9]. Он основан: 1) на аппроксимации множеств достижимости семейством гиперплоскостей; 2) на разделении вычислительных затрат на предварительные вычисления и вычисления в процессе управления; 3) на использовании вариаций Лагранжа для интегрирования дифференциальных уравнений на каждой итерации не на всем интервале управления, а лишь на интервалах перемещений конечного момента и моментов переключений управления.

Резкое снижение вычислительных затрат в процессе управления позволяет реализовать оптимальное управление в реальном времени. В настоящей работе предлагается реализация такого подхода для задачи оптимального быстродействия с запаздывающим управлением.

2. Постановка задачи

Пусть управляемый объект описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t-\tau), \quad x(t_0) = x_0,\ x_0 \in D,\ D \subset V, \tag{2.1}$$

где x — n-мерный вектор фазового состояния; $A(t)$ и $B(t)$ — непрерывные матрицы размера $n \times n$ и $n \times m$ соответственно; u — m-мерный вектор управления, компоненты которого принадлежат классу кусочно-непрерывных функций и подчинены ограничениям:

$$|u_j| \leqslant M_j, \quad M_j > 0,\ j = \overline{1, m}; \tag{2.2}$$

τ — запаздывание. Предполагается, что система (2.1) без запаздывания полностью управляема, т. е.

$$\operatorname{rank}\left[\int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) B(\tau) B^*(\tau) \Phi^*(t_k, \tau)\, d\tau\right] = n, \tag{2.3}$$

и переводима в начало координат из ограниченной области начальных условий D; V — область управляемости; $\Phi(t, t_0)$ — фундаментальная матрица решений однородного дифференциального уравнения; $*$ — знак транспонирования.

Наряду с системой (2.1) будем рассматривать систему без запаздывания:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_0) = x_0,\ x_0 \in D,\ D \subset V. \tag{2.4}$$

Задача. *Найти в реальном времени допустимое управление* $u^0(t-\tau)$, *переводящее за минимальное время* $T = t_k - t_0$ *систему* (2.1) *из начального состояния* $x(t_0) = x_0$ *в конечное состояние* $x(t_k) = 0$.

Замечание 1. Операция интегрирования является в вычислительном отношении наиболее затратной по времени в сравнении с другими операциями. Поэтому трудоемкость любого итерационного метода вычисления оптимального управления принято оценивать по числу решений задачи Коши [10]. Вычисление оптимального управления в *реальном времени* требует введения нового класса ограничений — ограничения на время вычисления оптимального управления:

$$\min_{j\in[1,m]} \frac{(\nu_j^1 - t_0)}{T} \geqslant \frac{\alpha}{T}. \tag{2.5}$$

Здесь ν_j^1 — первый момент переключения j компоненты вектора управления; α — время, затрачиваемое на вычисление оптимального управления; T — время оптимального управления. Нарушение ограничения (2.5) не ведет к потере работоспособности метода, но приводит к увеличению времени перевода и к изменению структуры управления.

Замечание 2. Для вычисления оптимального управления в реальном времени важны только вычислительные затраты в процессе управления. Поэтому трудоемкость метода оценивается по затратам в процессе управления, который начинается с *момента* задания *конкретного* начального условия из области D.

Замечание 3. Перевод системы в ненулевое конечное состояние преобразованием координат сводится, без потери общности, к переводу системы из нового начального состояния в начало координат и рассматривается в п. 4.

Вычисление оптимального управления линейной системой с запаздывающим управлением состоит из трех этапов:

1) свободное движение системы в течение времени запаздывания;
2) вычисление оптимального управления $u(t)$ без запаздывания, переводящего систему (2.4) из начального состояния $x(t_0+\tau) = x_0'$ в конечное состояние $x(t_k) = 0$;
3) сдвиг моментов переключений и конечного момента на время запаздывания.

3. Вычислительный метод решения задачи

3.1. Свободное движение системы с нулевым управлением

Вычислим фазовое состояние, в которое перейдет система (2.1) с нулевым управлением в течение времени $t \in [t_0, t_0+\tau]$:

$$x(t_0+\tau) = \Phi(t_0+\tau, t_0)x(t_0).$$

Это фазовое состояние принимаем за новое начальное условие в момент времени $t_0' = t_0 + \tau$ при вычислении оптимального управления системой с запаздывающим управлением: $x\big(t_0'\big) = x(t_0+\tau) = x_0'$.

3.2. Отклонение фазовых координат при вариации моментов переключений управления

Выпишем отклонение от начала координат решения уравнения (2.4) в конечный момент времени $t = t_k$ в случае приближенного задания оптимального управления [7]. Для кусочно-постоянного управления $u(t)$, компоненты которого переключаются в моменты времени ν_j^p, $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, r_j}$, и принимают значения $u_j(t) = u_j^p$, $t \in [\nu_j^{p-1}, \nu_j^p]$, где $\nu_j^0 = t_0'$, $\nu_j^{r_j} = t_k$, имеем

$$\Delta\widetilde{x}(t_k) = \Phi\bigl(t_k, t_0'\bigr)x\bigl(t_0'\bigr) + \sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{r_j}\int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p}\Phi(t_k, \tau)B_j(\tau)u_j^p\,d\tau. \tag{3.1}$$

Необходимо так изменить конечный момент времени $t = t_k$ и моменты переключений ν_j^p, чтобы вызванное этим изменением отклонение фазовых координат $\Delta\hat{x}(t_k)$ компенсировало отклонение $\Delta\widetilde{x}(t_k)$, вызванное неточным (приближенным) заданием оптимального управления (3.1). Должно выполняться уравнение баланса отклонений

$$\Delta\hat{x}(t_k) + \Delta\widetilde{x}(t_k) = 0. \tag{3.2}$$

Изменим моменты переключений ν_j^p на $\Delta\nu_j^p$, $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, r_j - 1}$, а конечный момент t_k на Δt_k. Для отклонения фазовых координат $\Delta\hat{x}(t_k)$ получим выражение

$$\Delta\hat{x}(t_k) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{r_j-1}\int\limits_{\nu_j^p}^{\nu_j^p+\Delta\nu_j^p}\Phi(t_k, \tau)B_j(\tau)\bigl[u_j^p - u_j^{p+1}\bigr]\,d\tau + \sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t_k}^{t_k+\Delta t_k}\Phi(t_k, \tau)B_j(\tau)u_j^{r_j}\,d\tau. \tag{3.3}$$

Если $\Delta\nu_j^p$ и Δt_k достаточно малы (а это, как показано ниже, достигается выбором начального приближения), то можно записать следующее приближенное соотношение, которое тем точнее, чем меньше по модулю $\Delta\nu_j^p$ и Δt_k:

$$\Delta\hat{x}(t_k) \approx \sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{r_j-1}\Phi\bigl(t_k, \nu_j^p\bigr)B_j\bigl(\nu_j^p\bigr)\bigl[u_j^p - u_j^{p+1}\bigr]\Delta\nu_j^p + \sum_{j=1}^{m}B_j(t_k)u_j^{r_j}\Delta t_k. \tag{3.4}$$

Для линейной системы (2.4) оптимальное по быстродействию управление задается выражением

$$u_j^0(t) = M_j\,\mathrm{sign}\bigl[B_j(t)\bigr]^*\psi(t), \quad j = \overline{1, m}, \tag{3.5}$$

где $\bigl[B_j(t)\bigr]^*$ — транспонированный j-й столбец матрицы $B(t)$; $\psi(t)$ — решение сопряженной системы:

$$\dot{\psi} = -A^*(t)\psi, \quad \psi\bigl(t_0'\bigr) = \psi_0, \tag{3.6}$$

имеющее следующий вид:

$$\psi(t) = \hat{\Phi}\bigl(t, t_0'\bigr)\psi\bigl(t_0'\bigr). \tag{3.7}$$

Здесь $\hat{\Phi}\bigl(t, t_0'\bigr)$ — фундаментальная матрица решений линейного однородного дифференциального уравнения (3.6), которая находится из решения матричного дифференциального уравнения

$$\frac{d\hat{\Phi}\bigl(t, t_0'\bigr)}{dt} = -A^*(t)\hat{\Phi}\bigl(t, t_0'\bigr), \quad \hat{\Phi}\bigl(t_0', t_0'\bigr) = I. \tag{3.8}$$

Матрица $\hat{\Phi}(t, t'_0)$ выражается через фундаментальную матрицу решений прямой системы (2.4) следующим образом: $\hat{\Phi}(t, t'_0) = \left[\Phi^{-1}(t, t'_0)\right]^*$. Отсюда $\Phi^{-1}(t, t'_0) = \left[\hat{\Phi}(t, t'_0)\right]^*$.

Моменты переключений ν_j^p компонент вектора оптимального управления и их число r_j на интервале $[t'_0, t_k]$ однозначно определяются функциями переключений $\left[B_j(t)\right]^*\psi(t)$, $j = \overline{1,m}$, если известно решение $\psi(t)$, т.е. известны начальные условия $\psi_i(t'_0)$, $i = \overline{1,n}$, сопряженной системы. Тогда на p интервале знакопостоянства оптимального управления (3.5) можно записать $u_j^p(t) = M_j S_j(p)$, где $S_j(p) = \operatorname{sign}\left[B_j(t)\right]^*\psi(t)$, $t \in \left[\nu_j^{p-1}, \nu_j^p\right]$. Так как $S_j(p+1) = -S_j(p)$, то $(u_j^p - u_j^{p+1}) = 2M_j S_j(p)$, и выражение (3.4) принимает вид

$$\Delta\hat{x}(t_k) \approx 2\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{r_j-1}\Phi\left(t_k, \nu_j^p\right)B_j\left(\nu_j^p\right)M_j S_j(p)\Delta\nu_j^p + \sum_{j=1}^{m}B_j(t_k)M_j S_j(r_j)\Delta t_k. \tag{3.9}$$

Подставим (3.9) в (3.2). Получим систему из n *линейных неоднородных алгебраических* уравнений, связывающих отклонения $\Delta\nu_j^p$ моментов переключений ν_j^p и отклонение Δt_k конечного момента времени t_k с отклонениями фазовых координат $\Delta\widetilde{x}(t_k)$, порожденными приближенным заданием искомого оптимального управления:

$$2\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{r_j-1}\Phi\left(t_k, \nu_j^p\right)B_j\left(\nu_j^p\right)M_j S_j(p)\Delta\nu_j^p + \sum_{j=1}^{m}B_j(t_k)M_j S_j(r_j)\Delta t_k + \Delta\widetilde{x}(t_k) = 0. \tag{3.10}$$

В (3.10) число неизвестных $\Delta\nu_j^p$, $j = \overline{1,m}$; $p = \overline{1, r_j - 1}$, и Δt_k может не быть равным числу линейных алгебраических уравнений. Моменты переключений *не являются независимыми* переменными, а однозначно определяются начальным условием сопряженной системы. Необходимо выразить отклонения $\Delta\nu_j^p$ через отклонения начальных условий нормированной сопряженной системы $\Delta\hat{\psi}(t'_0)$. Число последних всегда $(n-1)$. Вместе с Δt_k они образуют n неизвестных, которые и находим, решая систему из n линейных алгебраических уравнений.

3.3. Связь между отклонениями моментов переключений и отклонениями начальных условий нормированной сопряженной системы

В моменты переключений функция переключения равна нулю, т.е.

$$\left[B_j\left(\nu_j^p\right)\right]^*\hat{\Phi}\left(\nu_j^p, t'_0\right)\hat{\psi}\left(t'_0\right) = 0, \quad j = \overline{1,m};\ p = \overline{1, r_j - 1}.$$

Система связывает моменты переключений ν_j^p, $j = \overline{1,m}$; $p = \overline{1, r_j - 1}$, с начальным условием нормированной сопряженной системы $\hat{\psi}(t'_0)$.

Изменим $\hat{\psi}(t'_0)$ на $\Delta\hat{\psi}(t'_0)$. Это порождает изменение ν_j^p на $\Delta\nu_j^p$:

$$\left[B_j\left(\nu_j^p + \Delta\nu_j^p\right)\right]^*\hat{\Phi}\left(\nu_j^p + \Delta\nu_j^p, t'_0\right)\left[\hat{\psi}(t'_0) + \Delta\hat{\psi}(t'_0)\right] = 0, \quad j = \overline{1,m};\ p = \overline{1, r_j - 1}.$$

Разложим полученное выражение в ряд Тейлора и ограничимся лишь линейными членами. Получим следующее приближенное выражение, связывающее отклонения $\Delta\nu_j^p$ моментов переключений с отклонением $\Delta\hat{\psi}(t'_0)$ начального условия нормированной сопряженной системы [11]:

$$\Delta\nu_j^p \approx \Big\{\Big\{\big[B_j(\nu_j^p)\big]^* A^*(\nu_j^p) - \big[\dot{B}_j(\nu_j^p)\big]^*\Big\}\hat{\Phi}(\nu_j^p, t_0')\hat{\psi}(t_0')\Big\}^{-1}\big[B_j(\nu_j^p)\big]^*\hat{\Phi}(\nu_j^p, t_0')\Delta\hat{\psi}(t_0'),$$
$$j = \overline{1,m};\ p = \overline{1, r_j - 1}. \qquad (3.11)$$

Для краткости записи (3.11) используем выражение

$$\Delta\nu_j^p \approx \mathfrak{L}(\nu_{\mathrm{j}}^{\mathfrak{p}})\Delta\hat{\psi}(t_0'), \quad j = \overline{1,m};\ p = \overline{1, r_j - 1}. \qquad (3.11)'$$

Важно подчеркнуть, что, несмотря на кажущуюся сложность, выражение (3.11) имеет простой вид, благодаря матрицам размера $(n \times 1)$ и $(1 \times n)$, входящим в (3.11).

Следует также отметить, что выражение (3.11) позволяет определять отклонения не только для существующих моментов переключений управления, но и для *новых* моментов переключений, которые могут появится в системе при ее движении в фазовом пространстве.

3.4. Связь между отклонениями прямой и сопряженной систем

Подставим $(3.11)'$ в (3.10) и получим систему из n *линейных алгебраических* уравнений с n неизвестными:

$$2\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{r_j-1}\Phi(t_k, \nu_j^p)B_j(\nu_j^p)M_jS_j(p)\mathfrak{L}(\nu_{\mathrm{j}}^{\mathfrak{p}})\Delta\hat{\psi}(t_0') + \sum_{j=1}^{m}B_j(t_k)M_jS_j(r_j)\Delta t_k + \Delta\widetilde{x}(t_k) = 0. \quad (3.12)$$

Неизвестными в (3.12) являются $(n-1)$ отклонений $\Delta\hat{\psi}_i(t_0')$ и отклонение Δt_k конечного момента времени t_k. Система (3.12) разрешима при выполнении следующих необходимых условий: начальное условие принадлежит области управляемости V; система (2.4) полностью управляема. В постановке задачи предполагается выполнение этих необходимых условий (см. (2.3) и $D \subset V$).

3.5. Итерационный вычислительный процесс

Каждой гиперплоскости соответствует свой вектор $\hat{\psi}(t_0')$ начальных условий нормированной сопряженной системы и, следовательно, свои значения моментов переключений управления, которые вычисляются *предварительно* до начала процесса управления [7]. В результате вычисление оптимального управления сводится к *уточнению* приближенно заданных моментов $\nu_j^{p,0}$ переключений управления и к *уточнению* конечного момента t_k^0.

Операция интегрирования является в вычислительном отношении наиболее затратной по времени в сравнении с другими операциями, в частности по сравнению с решением системы линейных алгебраических уравнений, которая является основной в рассматриваемом методе вычисления оптимального по быстродействию управления. Поэтому трудоемкость любого итерационного метода вычисления оптимального управления принято оценивать по числу решений задачи Коши [10]. Как правило, число интегрирований дифференциальных уравнений на всем интервале управления $[t_0, t_k]$ достигает нескольких десятков, что делает невозможным применение таких итерационных методов для вычисления оптимального управления в реальном времени. Для вычисления и реализации оптимального управления в реальном времени необходимы алгоритмы, требующие малых вычислительных затрат. Малая трудоемкость итерационного вычислительного процесса в предлагаемом методе достигается благодаря: 1) построению аппроксимирующей конструкции, позволяющей получить начальное приближение, которое близко к искомому оптимальному управлению; 2) процедуре интегрирования дифференциальных уравнений на каждой итерации не на всем интервале управления, а лишь на интервалах перемещений конечного момента и моментов переключений управления.

1) область начальных условий $x_0 \in D$ делится на области достижимости за различные времена [7]. Каждая область достижимости аппроксимируется семейством гиперплоскостей. Каждая гиперплоскость является опорной для некоторого подмножества начальных условий. Нормальный вектор к опорной гиперплоскости (направленный внутрь области) является нормированным вектором начального условия сопряженной системы. Он определяет моменты переключений оптимального управления. Построение аппроксимирующей конструкции не зависит от *конкретного начального условия*, что позволяет провести необходимые вычисления *предварительно* до начала процесса управления и получить хорошее начальное приближение искомого оптимального управления. Задание хорошего начального приближения значительно сокращает число необходимых итераций.

2) на каждой итерации нет необходимости в интегрировании уравнения (2.4) на всем интервале $\left[t_0', t_k\right]$, так как достаточно проинтегрировать уравнение (2.4) на интервале $\left[t_0', t_k^0\right]$ *предварительно один раз*, "*прикрепить*" *значение интегрального выражения к опорной гиперплоскости, запомнить только фундаментальную матрицу решений прямой системы и затем интегрировать дифференциальные уравнения лишь на интервалах перемещений конечного момента и моментов переключений управления.*

Покажем, как конкретно это осуществляется. Выпишем отклонение от начала координат решения уравнения (2.4) в момент $t = t_k^0$ при приближенном *начальном* задании моментов переключений $\nu_j^{p,0}$, $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, r_j}$, и приближенном задании конечного момента t_k^0, полученных с помощью аппроксимирующей конструкции [7]:

$$\Delta\widetilde{x}\left(t_k^0\right) = \Phi\left(t_k^0, t_0'\right)x\left(t_0'\right) + \sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{r_j}\int_{\nu_j^{p-1,0}}^{\nu_j^{p,0}} \Phi\left(t_k^0, \tau\right)B_j(\tau)M_jS_j(p)\,d\tau. \tag{3.13}$$

Представим (3.13) в следующем компактном виде:

$$\Delta\widetilde{x}\left(t_k^0\right) = \Phi\left(t_k^0, t_0'\right)x\left(t_0'\right) + R_0\left(t_k^0\right). \tag{3.14}$$

Здесь $R(t_k^0)$ — интегральные выражения в (3.13), которые не зависят от начального условия $x\left(t_0'\right)$ и поэтому вычисляются *предварительно* при построении аппроксимирующей конструкции и "прикрепляются" к опорной гиперплоскости. Для компенсации отклонения $\Delta\widetilde{x}\left(t_k^0\right)$ необходимо изменить моменты переключений ν_j^p и конечный момент t_k.

1-я итерация. Решаем систему из n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными, которыми являются $(n-1)$ отклонение компонент $\Delta\hat{\psi}^1\left(t_0'\right)$ и отклонение Δt_k^1:

$$\begin{gathered} 2\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi\left(t_k^0, \nu_j^{p,0}\right)B_j\left(\nu_j^{p,0}\right)M_jS_j(p)\mathfrak{L}^0\left(\nu_j^{p,\,0}\right)\Delta\hat{\psi}^1\left(t_0'\right) + \\ \sum_{j=1}^{m} B_j\left(t_k^0\right)M_jS_j(r_j)\Delta t_k^1 + \Delta\widetilde{x}\left(t_k^0\right) = 0. \end{gathered} \tag{3.15}$$

Вычисляем отклонения моментов переключений, используя соотношение (3.11):

$$\Delta\nu_j^{p,1} \approx \mathfrak{L}^0\big(\nu_j^{p,0}\big)\Delta\hat{\psi}^1\big(t'_0\big). \tag{3.16}$$

Находим уточненные значения конечного момента и $(n-1)$ *произвольно выбранных* моментов переключений управления:

$$t_k^1 = t_k^0 + \Delta t_k^1; \qquad \nu_j^{p,1} = \nu_j^{p,0} + \Delta\nu_j^{p,1}; \quad j=\overline{1,m};\ p=\overline{1,q_j};\ \sum_{j=1}^m q_j = n-1. \tag{3.17}$$

Уточняем начальное условие нормированной сопряженной системы, которое соответствует $(n-1)$ *произвольно выбранным* значениям моментов переключений управления. Для этого решаем систему из $(n-1)$ линейных алгебраических уравнений с $(n-1)$ неизвестными компонентами вектора $\hat{\psi}\big(t'_0\big)$:

$$\big[B_j\big(\nu_j^{p,1}\big)\big]^*\,\hat{\Phi}\big(\nu_j^{p,1},t'_0\big)\,\hat{\psi}^1\big(t'_0\big)=0, \quad j=\overline{1,m};\ p=\overline{1,q_j};\ \sum_{j=1}^m q_j = n-1.$$

Фундаментальная матрица $\hat{\Phi}\big(t,t'_0\big)$ решений сопряженной системы (3.6) связана с фундаментальной матрицей $\Phi\big(t,t'_0\big)$ решений прямой системы (2.4) соотношением $\hat{\Phi}\big(t,t'_0\big) = \big[\Phi^{-1}\big(t,t'_0\big)\big]^*$, что позволяет ограничиться знанием фундаментальной матрицы только прямой системы. Вычисляем остальные моменты переключений управления $\nu_j^{p,1}$, $j=\overline{1,m}$; $p=\overline{q_j+1,r_j-1}$, *соответствующие* $(n-1)$ выбранным (принятым) значениям моментов переключений. Моменты переключений уточняем в окрестности значений $\nu_j^{p,1}=\nu_j^{p,0}+\Delta\nu_j^{p,1}$, $j=\overline{1,m}$; $p=\overline{q_j+1,r_j-1}$.

Вычисляем уточненное значение отклонения от начала координат решения уравнения (2.4) в момент $t=t_k^1$:

$$\Delta\widetilde{x}\big(t_k^1\big)=\Phi\big(t_k^1,t'_0\big)x\big(t'_0\big)+R\big(t_k^0\big)+2\sum_{j=1}^m\sum_{p=1}^{r_j-1}\int_{\nu_j^{p,0}}^{\nu_j^{p,0}+\Delta\nu_j^{p,1}}\Phi\big(t_k^0,\tau\big)B_j(\tau)M_jS_j(p)\,d\tau+ \\ \sum_{j=1}^m\int_{t_k^0}^{t_k^0+\Delta t_k^1}\Phi\big(t_k^0,\tau\big)B_j(\tau)M_jS_j(r_j)\,d\tau. \tag{3.18}$$

Запишем (3.18) в следующем компактном виде:

$$\Delta\widetilde{x}\big(t_k^1\big)=\Phi\big(t_k^1,t'_0\big)x\big(t'_0\big)+R_0\big(t_k^0\big)+\Delta R_1\big(\Delta\nu_j^{p,1},\Delta t_k^1\big), \tag*{(3.18)$'$}$$

где через $\Delta R_1\big(\Delta\nu_j^{p,1},\Delta t_k^1\big)$ обозначены интегральные выражения в (3.18).

....

s-я итерация. Решаем систему линейных алгебраических уравнений с полученными на $(s-1)$ итерации значениями: вычисленного отклонения от начала координат $\Delta\widetilde{x}\big(t_k^{s-1}\big)$; конечного момента t_k^{s-1}; моментов переключений $\nu_j^{p,s-1}$, $j=\overline{1,m}$; $p=\overline{1,q_j}$; $\sum_{j=1}^m q_j=n-1$; нормированного начального условия сопряженной системы $\hat{\psi}^{(s-1)}\big(t'_0\big)$:

$$2\sum_{j=1}^m\sum_{p=1}^{r_j-1}\Phi\big(t_k^{s-1},\nu_j^{p,s-1}\big)B_j\big(\nu_j^{p,s-1}\big)M_jS_j(p)\mathfrak{L}^{s-1}\big(\nu_j^{p,s-1}\big)\Delta\hat{\psi}^s\big(t'_0\big)+ \\ \sum_{j=1}^m B_j\big(t_k^{s-1}\big)M_jS_j(r_j)\Delta t_k^s+\Delta\widetilde{x}\big(t_k^{s-1}\big)=0. \tag{3.19}$$

Вычисляем $(n-1)$ значение компонент отклонений $\Delta\hat{\psi}^s\big(t'_0\big)$ вектора начального условия нормированной сопряженной системы и отклонение Δt_k^s конечного момента. По формуле (3.11) вычисляем отклонения моментов переключений:

$$\Delta\nu_j^{p,s} \approx \mathfrak{L}^{s-1}\big(\nu_j^{p,s-1}\big)\Delta\hat{\psi}^s\big(t'_0\big). \tag{3.20}$$

Снова выбираем и уточняем $(n-1)$ значений моментов переключений и уточняем конечный момент

$$\nu_j^{p,s} = \nu_j^{p,s-1} + \Delta\nu_j^{p,s}, \quad j=\overline{1,m};\ p=\overline{1,q_j};\ \sum_{j=1}^m q_j = n-1;\ t_k^s = t_k^{s-1} + \Delta t_k^s. \tag{3.21}$$

Затем уточняем нормированное начальное условие $\hat{\psi}^s\big(t'_0\big)$ сопряженной системы, решая систему из $(n-1)$ линейных алгебраических уравнений с $(n-1)$ неизвестными, которыми являются компоненты вектора $\hat{\psi}^s\big(t'_0\big)$:

$$\Big[B_j\big(\nu_j^{p,s}\big)\Big]^*\hat{\Phi}\big(\nu_j^{p,s},t'_0\big)\hat{\psi}^s\big(t'_0\big) = 0, \quad j=\overline{1,m};\ p=\overline{1,q_j};\ \sum_{j=1}^m q_j = n-1.$$

Далее уточняем остальные моменты переключений $\nu_j^{p,s}$, $j=\overline{1,m}; p=\overline{q_j+1,r_j-1}$, *соответствующие* $(n-1)$ выбранным (принятым) значениям моментов переключений $\nu_j^{p,s}$, $j=\overline{1,m};\ p=\overline{1,q_j};\ \sum_{j=1}^m q_j = n-1$. Моменты переключений уточняем в окрестности значений $\nu_j^{p,s} = \nu_j^{p,s-1} + \Delta\nu_j^{p,s}$, $j=\overline{1,m}; p=\overline{q_j+1,r_j-1}$.

Вычисляем уточненное значение отклонения от начала координат фазовой траектории движения системы (2.4) в конечный момент $t=t_k^s$:

$$\begin{aligned}\Delta\widetilde{x}\big(t_k^s\big) = \Phi\big(t_k^s,t'_0\big)x\big(t'_0\big) + R_0\big(t_k^0\big) + \Delta R_1\big(\Delta\nu_j^{p,1},\Delta t_k^1\big) + \Delta R_2\big(\Delta\nu_j^{p,2},\Delta t_k^{(2)}\big) + \ldots +\\ 2\sum_{j=1}^m\sum_{p=1}^{r_j-1}\int_{\nu_j^{p,s-1}}^{\nu_j^{p,s-1}+\Delta\nu_j^{p,s}} \Phi\big(t_k^{s-1},\tau\big)B_j(\tau)M_jS_j(p)\,d\tau +\\ \sum_{j=1}^m\int_{t_k^{s-1}}^{t_k^{s-1}+\Delta t_k^s}\Phi\big(t_k^{s-1},\tau\big)B_j(\tau)M_jS_j(r_j)\,d\tau.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Представляем (3.22) в компактном виде

$$\Delta\widetilde{x}\big(t_k^s\big) = \Phi\big(t_k^s,t'_0\big)x\big(t'_0\big) + R_0\big(t_k^0\big) + \Delta R_1\big(\Delta\nu_j^{p,1},\Delta t_k^1\big) + \ldots + \Delta R_s\big(\Delta\nu_j^{p,s},\Delta t_k^s\big). \tag*{(3.22)$'$}$$

В $(3.22)'$ через $\Delta R_s\big(\Delta\nu_j^{p,s},\Delta t_k^s\big)$ обозначены интегральные составляющие выражения (3.22).

Итерационный процесс вычисления продолжается аналогичным образом до тех пор пока на h итерации

$$\big\|\Delta\widetilde{x}\big(t_k^h\big)\big\| \leqslant \epsilon_0, \tag{3.23}$$

где $0 < \epsilon_0 \ll 1$ задано и характеризует необходимую точность вычисления оптимального управления.

Сходимость итерационного вычислительного процесса доказывается аналогично [12].

Таким образом, достаточно интегрировать систему дифференциальных уравнений *лишь на интервалах перемещений* конечного момента и моментов переключений управления. *Это резко снижает вычислительные затраты и делает возможным вычисление оптимального управления в реальном времени.*

3.6. Вычисление оптимального по быстродействию управления с запаздыванием

Для вычисления оптимального по быстродействию управления с запаздыванием достаточно сдвинуть на $-\tau$ моменты переключений ν_j^p, $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, r_j - 1}$, и конечный момент t_k, найденного оптимального по быстродействию управления без запаздывания. В результате получим следующие значения конечного момента и моментов переключений оптимального по быстродействию управления с запаздыванием:

$$\hat{t}_k = t_k - \tau, \qquad \hat{\nu}_j^p = \nu_j^p - \tau, \quad j = \overline{1, m};\ p = \overline{1, r_j - 1}.$$

4. Перевод системы в ненулевое конечное состояние

Рассмотренный метод позволяет находить оптимальное по быстродействию управление при переводе системы в ненулевое конечное состояние $x(t_k) = x_k$ путем эквивалентного преобразования начального и конечного условий.

Выпишем решение системы (2.4) в конечный момент t_k при переводе системы в ненулевое конечное состояние $x(t_k) = x_k$ для кусочно-постоянного управления $u(t)$, компоненты которого переключаются в моменты времени ν_j^p, $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, r_j}$, и принимают значения $u_j(t) = u_j^p$, $t \in \left[\nu_j^{p-1}, \nu_j^p\right]$, где $\nu_j^0 = t_0'$, $\nu_j^{r_j} = t_k$:

$$x(t_k) = \Phi\big(t_k, t_0'\big) x\big(t_0'\big) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{p=1}^{r_j} \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) u_j^p \, d\tau. \tag{4.1}$$

Представим (4.1) в следующем виде:

$$0 = \Phi\big(t_k, t_0'\big)\left[x\big(t_0'\big) - \Phi^{-1}\big(t_k, t_0'\big)x(t_k)\right] + \sum_{j=1}^{m} \sum_{p=1}^{r_j} \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) u_j^p \, d\tau, \tag{4.2}$$

где $\hat{x}_0' = \left[x\big(t_0'\big) - \Phi^{-1}\big(t_k, t_0'\big)x(t_k)\right]$ — новое (преобразованное) начальное условие. В результате приходим к задаче перевода системы:

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)u, \quad y\big(t_0'\big) = \hat{x}_0', \quad y(t_k) = 0, \tag{4.3}$$

из начального состояния $y\big(t_0'\big) = \hat{x}_0'$ в начало координат $y(t_k) = 0$. Перевод системы (4.3) в начало координат эквивалентен переводу системы (2.4) в заданное ненулевое конечное состояние $x(t_k) = x_k$. Другими словами, *найденное оптимальное по быстродействию управление* $u^0(t)$, *переводящее систему* (4.3) *из начального состояния* $y\big(t_0'\big) = \hat{x}_0'$ *в начало координат* $y(t_k) = 0$, *переводит систему* (2.4) *из начального состояния* $x\big(t_0'\big) = x_0'$ *в заданное ненулевое конечное состояние* $x(t_k) = x_k$.

5. Вычислительная трудоемкость метода

Трудоемкость вычислительного метода принято выражать суммарными затратами времени на вычисления. Основные вычислительные затраты любого метода нахождения оптимального управления вызваны интегрированием дифференциальных уравнений прямой и сопряженной систем на всем интервале $[t_0, t_k]$ управления, что ведет к большим затратам времени и делает невозможным их применение при оптимальном управлении в реальном времени. Поэтому трудоемкость любого метода нахождения оптимального управления принято выражать через число решений задачи Коши [10]. В предлагаемом методе нет необходимости в интегрировании систем дифференциальных уравнений на каждой итерации h на интервале $t \in \left[t'_0, t^h_k\right]$. Достаточно *предварительно на этапе построения аппроксимирующей конструкции* провести интегрирование на интервале $t \in \left[t'_0, t^0_k\right]$, запомнить значения интегральных выражений и затем проводить интегрирование лишь на интервалах отклонений $\Delta\nu^{p,h}_j$ и Δt^h_k, на которые изменяются моменты переключений и конечный момент на каждой итерации. Разбиение гиперплоскостями области начальных условий на подобласти со своими значениями моментов переключений и времени перевода позволяет проинтегрировать *предварительно* до начала процесса управления систему дифференциальных уравнений, запомнить интегральные выражения и присвоить каждой гиперплоскости соответствующие значения. Предварительные вычисления не входят в оценку трудоемкости вычислительного метода, так как для оптимального управления в *реальном времени* важны лишь те вычислительные операции, которые производятся в *процессе управления* системой. В результате суммарное время интегрирования определяется выражением

$$T_* = \sum_{h=1}^{N} \left[\sum_{j=1}^{m} \sum_{p=1}^{r_j - 1} \left|\Delta\nu^{p,h}_j\right| + \left|\Delta t^h_k\right| \right]. \tag{5.1}$$

Определение. Трудоемкость R вычислительного метода — это отношение затрат времени на интегрирование при вычислении оптимального управления к времени оптимального процесса $T_{\text{opt}} = t_k - t'_0$.

Трудоемкость рассматриваемого метода равна $R = T_*/T_{\text{opt}}$.

Вычислительная трудоемкость метода определяется суммарным перемещением моментов переключений и конечного момента и *в случае монотонной сходимости не зависит от числа перемещений, т. е. не зависит от числа итераций*. Более того, чем *точнее начальное приближение, тем более монотонно сходится вычислительный процесс и, следовательно, тем меньше величина суммарного перемещения* T_*. В качестве нижней оценки затрат времени на вычисления можно принять

$$T_{*\min} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{p=1}^{r_j - 1} \left|\nu^p_j - \nu^{p,0}_j\right| + \left|t_k - t^0_k\right|, \qquad R_{\min} = \frac{T_{*\min}}{T_{\text{opt}}}. \tag{5.2}$$

Здесь $\nu^{p,0}_j$, t^0_k — начальные значения моментов переключений управления и конечного момента времени (начальное приближение); ν^p_j, t_k — значения оптимального процесса.

Таким образом, близость параметра R к параметру $R_{\min}$ свидетельствует о близости сходимости вычислительного процесса к монотонной сходимости.

6. Моделирование и результаты вычислений

В качестве тестового примера рассмотрим систему третьего порядка:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2, && x_1(t_0) = x_{10}, \\ &\dot{x}_2 = x_3, && x_2(t_0) = x_{20}, \\ &\dot{x}_3 = bu(t-\tau), && x_3(t_0) = x_{30}, \quad |u| \leqslant M. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Принимаем следующими численные значения коэффициентов и ограничений: $b = 4$; $M = 5$; $\tau = 0.1$. В [8] изложен метод построения аппроксимирующей конструкции, и в качестве тестовой рассмотрена система (6.1), для которой проведены необходимые вычисления. Ограниченная область начальных условий $x(t_0) \in D$ разделена гиперплоскостями на подобласти достижимости с различными временами перевода системы (6.1) в начало координат.

Пусть задано начальное условие $x(t_0) = (8.075; -11.5; 15)$. За время запаздывания $\tau = 0.1$ система (6.1) перейдет в состояние $x\bigl(t'_0\bigr) = (7; -10; 15)$, которое принимаем за новое начальное условие в момент $t = t'_0$. Начальное условие $x\bigl(t'_0\bigr) = (7; -10; 15)$ принадлежит подобласти, для всех точек которой получено *единое начальное приближение* $\hat{\psi}\bigl(t'_0\bigr) = (-1; -0.817835; -0.308690)$. Этому значению $\hat{\psi}\bigl(t'_0\bigr)$ соответствуют следующие моменты переключений: $\nu^{1,0} = 0.690957$, $\nu^{2,0} = 1.144713$. Приближенное время перевода системы $t_k^0 \approx 1.79$. Оптимальное управление имеет последовательность $(-M; +M; -M)$. В таблице приведены результаты вычислений на каждой итерации h оптимального управления без запаздывания.

Таблица

h	ν^1	ν^2	t_k	$\hat{\psi}_1(t'_0)$	$\hat{\psi}_2(t'_0)$	$\hat{\psi}_3(t'_0)$	$\|x(t_k)\|$
0	0.690957	1.144713	1.790000	−1	−0.817835	−0.308690	3.552596
1	0.856298	1.325418	1.788239	−1	−0.990858	−0.463390	0.210288
2	0.880367	1.378838	1.846941	−1	−1.029603	−0.498982	0.019449
3	0.878973	1.376547	1.845149	−1	−1.027760	−0.497198	0.000036
4	0.878972	1.376548	1.845152	−1	−1.027760	−0.497198	0.000000

Получаем следующие значения моментов переключений оптимального по быстродействию управления системой (6.1) с запаздыванием $\tau = 0.1$: $\hat{\nu}^1 = 0.778972$, $\hat{\nu}^2 = 1.276548$, $\hat{t}_k = 1.745152$. Вычислительная трудоемкость $R = 0.280$, $R_{\min} = 0.272$. Сходимость вычислительного процесса близка к монотонной. Время, затраченное на интегрирование на интервалах $\Delta\nu^{p,h}$ и Δt_k^h, составляет 28 % от времени перевода системы, а первый момент переключения — 47.6 %, т. е. условие (2.5) выполняется.

7. Заключение

Разработан новый подход к решению задач оптимального управления в реальном времени. Он основан на: 1) аппроксимации множеств достижимости семейством гиперплоскостей; 2) разделении вычислительных затрат на предварительные вычисления и вычисления в процессе управления; 3) использовании вариаций Лагранжа для интегрирования дифференциальных уравнений на каждой итерации не на всем интервале управления, а лишь на интервалах перемещений конечного момента и моментов переключений управления.

Разделение области начальных условий на области достижимости за различные времена и аппроксимация каждой области достижимости совокупностью гиперплоскостей позволяет разделить область начальных условий на конечное число подобластей. Каждая подобласть начальных условий имеет свою опорную гиперплоскость, нормальный вектор к которой (направленный внутрь области) является нормированным вектором начальных условий сопряженной системы. Моменты переключений оптимального управления задаются решением сопряженной системы. В результате для любого начального условия, принадлежащего данной подобласти начальных условий, получаем одинаковые *приближенные* значения моментов переключений и времени перевода искомого оптимального управления. Они "прикрепляются" к опорной гиперплоскости. Знание приближенных значений моментов переключений и времени процесса управления позволяет вычислить интегральные выражения в задаче Коши и "прикрепить" их также к опорной гиперплоскости. Самое существенное заключается в том, что такое разделение области начальных условий на подобласти не зависит от конкретного начального условия и поэтому осуществляется *предварительно*, т. е. до начала процесса управления. Для процесса управления в реальном времени важны только вычислительные затраты в процессе управления и не важны затраты времени на предварительные вычисления.

Процесс управления начинается с задания *конкретного* начального условия. Процесс нахождения соответствующей опорной гиперплоскости для конкретного начального условия осуществляется уже в процессе управления и заключается в проверке простых неравенств, т. е. является малотрудоемкой операцией. Задание хорошего начального приближения существенно уменьшает число необходимых итераций и обеспечивает более близкую к монотонной сходимость итерационного вычислительного процесса. Вычисления в процессе управления заключаются в уточнении приближенно найденных значений времени и моментов переключений управления. Разработана итерационная процедура, не требующая на каждой итерации интегрирования прямой и сопряженной систем на всем интервале управления. Достаточно запомнить фундаментальную матрицу решений прямой системы и интегрировать дифференциальные уравнения лишь на интервалах перемещений конечного момента и моментов переключений управления, что резко снижает вычислительные затраты и делает возможным вычисление и реализацию оптимального управления в реальном времени.

Нарушение ограничения (2.5) не ведет к потере работоспособности метода, но приводит к увеличению времени перевода и к изменению структуры управления. Важно также отметить, что аппроксимирующая конструкция строится для перевода системы в начало координат, но преобразование начального и конечного условий позволяют ее использовать и для случая перевода системы в ненулевое конечное состояние.

Литература

1. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1976.

2. **Болтянский В.Г.** Математические методы оптимального управления. — М.: Наука, 1969.

3. **Габасов Р., Кириллова Ф.М., Тятюшкин А.И.** Конструктивные методы оптимизации. Ч.1. Линейные задачи. — Минск: Изд-во "Университетское", 1984.

4. **Балашевич Н.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М.** Численные методы программной и позиционной оптимизации линейных систем управления // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2000. — Т. 40, № 6. — С. 838–859.

5. **Габасов Р., Кириллова Ф.М.** Оптимальное управление в режиме реального времени // II Межд. конф. по проблемам управления. — М.: Изд-во Института проблем управления, 2003. — С. 20–47. — (Пленарные доклады).
6. **Габасов Р., Кириллова Ф.М.** Оптимальное управление и наблюдение в реальном времени // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2006. — № 3. — С. 90–111.
7. **Александров В.М.** Вычисление оптимального управления в реальном времени // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2012. — Т. 52, № 10. — С. 1778–1800.
8. **Александров В.М.** Построение аппроксимирующей конструкции для вычисления и реализации оптимального управления в реальном времени // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2012. — Т. 15, № 1. — С. 1–19.
9. **Александров В.М.** Приближенное решение задачи линейного быстродействия // Автоматика и телемеханика. — 1998. — № 12. — С. 3–13.
10. **Федоренко Р.П.** Приближенное решение задач оптимального управления. — М.: Наука, 1978.
11. **Александров В.М.** Последовательный синтез оптимального по быстродействию управления // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1999. — Т. 39, № 9. — С. 1464–1478.
12. **Александров В.М.** Сходимость метода последовательного синтеза оптимального по быстродействию управления // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1999. — Т. 39, № 10. — С. 1650–1661.

Поступила в редакцию 1 апреля 2013 г.,
в окончательном варианте 8 апреля 2013 г.