для среды со средними параметрами $\langle\lambda + 2\mu\rangle$ и $\langle\rho\rangle$, т. е. для коротких волн кривая *4* всегда должна лежать ниже, чем c_l (кривая *3*).

В области применимости выполненного расчета дисперсия скорости в композите вольфрам — медь составляет $\sim 2\%$.

Поступила 3 V 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ravindra R.** Usual assumptions in the treatment of wave propagation in heterogeneous elastic media.— «Pure and Applied Geophysics», 1968, vol. 70, N 2.
2. **Keller J. B.** Accuracy and validity of the Born and Rytov approximations.— «J.Opt. Soc. Amer.», 1969, vol. 59, N 8, pt 1.
3. **Меркулова В. М.** Акустические свойства некоторых твердых гетерогенных сред на ультразвуковых частотах.— «Акуст. журн.», 1965, т. 11, вып. 1.
4. **Шуман Б. М.** Распространение упругих волн в среде со случайными неоднородностями.— ПМ, 1968, т. 4, вып. 10.
5. **Hudson J. A.** The scattering of elastic waves by granular media.— «Quart. J. Mech. and Appl. Math.», 1968, vol. 21, N 4.
6. **Усов А. А., Фокин А. Г., Шермергор Т. Д.** Дисперсия упругих волн в композиционных материалах.— В кн.: Сборник научных трудов по проблемам микроэлектроники (физ.-мат. серия). М., изд. Моск. ин-та электр. техн., 1969.
7. **Лифшиц И. М., Пархомовский Г. Д.** К теории распространения ультразвуковых волн в поликристаллах.— ЖЭТФ, 1950, т. 20, вып. 2.
8. **Усов А. А., Фокин А. Г., Шермергор Т. Д.** К теории распространения ультразвуковых волн в поликристаллах.— ПМТФ, 1972, № 2.
9. **Усов А. А., Фокин А. Г., Шермергор Т. Д.** Рассеяние и дисперсия скорости ультразвуковых волн в поликристаллах орторомбической симметрии.— ПМТФ,1976, № 3.
10. **Чернов Л. А.** Распространение волн в среде со случайными неоднородностями. М., Изд-во АН СССР, 1958.
11. **Pekeris C. L.** Note on the scattering of radiation in an inhomogeneous medium.— «Phys. Rev.», 1947, vol. 71, N 4.
12. **Перельман В. И.** Краткий справочник химика. М.— Л., «Химия», 1964,
13. **Бабичев Э. А., Коробенин В. М.** Изучение коэффициентов термического расширения некоторых композиционных материалов.— «Электрон. техника. Материалы», 1970, т. 14, вып. 3.
14. **Хантингтон Г.** Упругие постоянные кристаллов. II.— УФН, 1961, т. LXXIV, вып. 3.

УДК 534.539.3

КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО НЕОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВА, ОСЛАБЛЕННОГО КРУГЛОЙ ЩЕЛЬЮ

Г. П. Коваленко

(Сумы)

Колебания твердого упругого однородного пространства, ослабленного круглой щелью, рассматривались в работе [1]. Решение соответственной статической задачи изложено в работах [2, 3]. Для среды, параметры Ламэ и плотность которой зависят от координаты z, аналогичная задача значительно усложняется и допускает эффективное аналитическое решение только для некоторых случаев зависимости указанных функций от z и фиксированных значений коэффициента Пуассона.

В данной работе рассматриваются статическая и динамическая задачи определения смещения в неоднородном упругом пространстве, ослабленном круглой щелью.

1. Рассматривается твердая упругая среда, занимающая все пространство. Параметры Ламэ λ и μ и плотность среды ρ зависят от z

$$\mu = \mu_0(a|z| + 1)^{3-4\nu}, \quad \rho = \rho_0(a|z| + 1)^{4(1-2\nu)}, \tag{1.1}$$

где ν — коэффициент Пуассона, принятый постоянным. Как показано в работе [4], уравнения движения такой среды в случае осевой симметрии можно в цилиндрической системе координат записать в виде

$$\begin{gathered} \nabla^2\Phi - v_1^{-2}\varepsilon^{1-4\nu}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0, \\ \nabla^2\psi - v_2^{-2}\varepsilon^{1-4\nu}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0, \end{gathered} \tag{1.2}$$

где $\nabla^2 = \partial^2/\partial r^2 + \partial/r\partial r + \partial^2/\partial z^2$; v_1, v_2 — скорости волн деформаций при $z = 0$; $\varepsilon = a|z| + 1$. Функции Φ и ψ связаны с векторным смещением $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = u_r\mathbf{i}_r + u_z\mathbf{i}_z$ зависимостями

$$\mathbf{u}_1\varepsilon^{2(1-2\nu)} = \nabla\Phi, \quad \mathbf{u}_2\varepsilon^{2(1-2\nu)} = \nabla \times (\mathbf{i}_\varphi\partial\psi/\partial r), \tag{1.3}$$

где $\mathbf{i}_\varphi$ — единичный вектор.

В плоскости $z = 0$ имеется круглая щель радиуса $r = 1$ с центром в начале координат. Требуется решить систему уравнений (1.2) в предположении, что смещения и напряжения в окрестности щели такие же, как и в полубесконечном упругом теле $z \geqslant 0$, когда на свободной поверхности $z = 0$ имеют место краевые условия

$$\begin{gathered} \sigma_z = -p_s - p_0 \exp(-i\omega t), \ 0 \leqslant r < 1, \\ \tau_{rz} = 0, \ 0 \leqslant r < \infty, \ u_z = 0, \ r > 1, \end{gathered} \tag{1.4}$$

где σ_z, τ_{rz} — компоненты тензора напряжений; u_z — осевое смещение; p_s — статическое давление, устраняющее возможность смыкания щели.

Уравнение (1.2) решаем при условии, что $\nu = 1/4$. Поскольку напряжения четны по z, задача рассматривается для полупространства $z \geqslant 0$. Решение уравнений (1.2), ограниченное при $z \geqslant 0$, ищем в виде

$$\begin{gathered} \Phi = \int_0^\infty A_1(\alpha) J_0(\alpha r)\alpha e^{-\delta z} d\alpha, \\ \psi = \int_0^\infty A_2(\alpha) J_0(\alpha r)\alpha e^{-\eta z} d\alpha, \end{gathered} \tag{1.5}$$

где $\delta = \sqrt{\alpha^2 - k^2/3}$; $\eta = \sqrt{\alpha^2 k^2}$; $k^2 = \omega^2/v_2^2$; α — параметр разделения уравнений (1.2); $J_0(\alpha r)$ — функция Бесселя. Знаки радикалов выбираем, согласно условиям

$$\begin{gathered} \delta = (\alpha^2 - k^2/3)^{1/2}, \ \alpha > k/\sqrt{3}, \\ \eta = (\alpha^2 - k^2)^{1/2}, \ \alpha > k, \\ \delta = -i(k^2/3 - \alpha^2)^{1/2}, \ 0 \leqslant \alpha < k/\sqrt{3}, \ \eta = -i(k^2 - \alpha^2)^{1/2}, \\ 0 \leqslant \alpha < k. \end{gathered} \tag{1.6}$$

С помощью зависимостей (1.3) выразим напряжение и смещение через функции Φ и ψ

$$\sigma_z = \mu\left[\left(\nabla^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{3a\partial}{\varepsilon\partial z}\right)\Phi + R\left(2\frac{\partial}{\partial z} - \frac{3a}{\varepsilon}\right)\psi\right], \tag{1.7}$$

$$\tau_{rz} = \mu \frac{\partial}{\partial r}\left[\left(2\frac{\partial}{\partial z} - a\varepsilon^{-1}\right)\Phi + \left(\nabla^2 - 2\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{a\partial}{\varepsilon\partial z}\right)\psi\right],$$

$$u_z = \varepsilon^{-1}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + R\psi\right),\ u_r = \varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial r}\left(\Phi - \frac{\partial\psi}{\partial z}\right),$$

$$R = \frac{\partial}{r\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right).$$

Используя (1.4) и второе соотношение (1.7), находим

$$A_1(\alpha) = -(\alpha^2 + \eta^2 + a\eta)(2\delta + a)^{-1}A_2(\alpha). \quad (1.8)$$

Первое граничное условие берем в виде

$$\sigma_z = -p_0 e^{-i\omega t},$$

так как статическое напряжение можно учесть независимо от решения динамической задачи. Используя другие граничные условия (1.4), (1.8), получим

$$\mu\int_0^\infty [\alpha \mathrm{Ra}(\alpha) A_2(\alpha) J_0(\alpha r)](2\delta + a)^{-1} d\alpha = -p_0,\ r < 1,$$

$$\int_0^\infty \alpha[\delta k^2 + a(\alpha^2 - \eta\delta)] A_2(\alpha) J_0(\alpha r)(2\delta + a)^{-1} d\alpha = 0,\ r > 1,$$

где $\mathrm{Ra}(\alpha)$ — функция Рэлея среды со свойствами (1.1)

$$\mathrm{Ra}(\alpha) \equiv (2\alpha^2 - k^2)^2 - 4\alpha^2\delta\eta - k^2 a(3\delta + \eta) + 3a^2(\delta\eta - \alpha^2).$$

Обозначая

$$D(\alpha) = \frac{[\delta k^2 + a(\alpha^2 - \delta\eta)]\alpha A_2(\alpha)}{2\delta + a}; \quad (1.9)$$

$$H(\alpha) = \frac{3\mathrm{Ra}(\alpha)}{4\alpha[\delta k^2 + a(\alpha^2 - \delta\eta)]} - 1,$$

приходим к парным интегральным уравнениям

$$\int_0^\infty D(\alpha) J_0(\alpha r) d\alpha = 0,\ r > 1, \quad (1.10)$$

$$\int_0^\infty \alpha[1 + H(\alpha)] D(\alpha) J_0(\alpha r) d\alpha = -\frac{3p_0}{4\mu_0},\ r < 1.$$

Уравнения (1.10) — это специальный случай более общей системы

$$\int_0^\infty \alpha^\nu [1 + H(\alpha)] D(\alpha) J_\varkappa(\alpha r) d\alpha = f(r),\ r < d,$$

$$\int_0^\infty D(\alpha) J_\varkappa(\alpha r) d\alpha = 0,\ r > d.$$

В нашем случае $\gamma = 1$, $\varkappa = 0$, $d = 1$, $f(r) = -3p_0/4\mu_0$. Согласно работе [5], решение ищем в виде

$$D(\alpha) = (2\alpha)^{1-\frac{\gamma}{2}}\, \Gamma^{-1}\left(\frac{\gamma}{2}\right) \int_0^d \xi^{\frac{1}{2}} \theta(\xi)\, J_{\varkappa+\frac{\gamma}{2}}(\alpha\xi)\, d\xi, \tag{1.11}$$

где $\theta(\xi)$ удовлетворяет уравнению Фредгольма второго рода

$$\theta(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^d \mathrm{M}(x, \xi)\, \theta(\xi)\, d\xi = F(x); \tag{1.12}$$

$$\mathrm{M}(x, \xi) = \pi(x, \xi)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \alpha H(\alpha)\, J_{\varkappa-\frac{1}{2}\gamma}(\alpha x)\, J_{\varkappa+\frac{1}{2}\gamma}(\alpha\xi)\, d\alpha, \tag{1.13}$$

$\Gamma(\gamma)$ — гамма-функция.

Если $0 < \gamma < 2$, то

$$F(x) = x^{-\varkappa-\frac{1}{2}\gamma+\frac{1}{2}} \int_0^d f(r)\, r^{\varkappa+1} (x^2 - r^2)^{-1+\frac{1}{2}\gamma}\, dr. \tag{1.14}$$

Учитывая значения γ, $\varkappa$, d, из (1.11)—(1.14) находим

$$D(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \theta(\xi) \sin(\alpha\xi)\, d\xi, \quad F(x) = -\frac{3p_0 x}{4\mu_0}; \tag{1.15}$$

$$\mathrm{M}(x, \xi) = \pi(x\xi)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \alpha H(\alpha)\, J_{\frac{1}{2}}(\alpha x)\, J_{\frac{1}{2}}(\alpha\xi)\, d\alpha. \tag{1.16}$$

Чтобы перейти к статической задаче, найдем предел $H(\alpha, \omega)$, когда ω стремится к нулю

$$\lim_{\omega\to 0} H(\alpha, \varphi) = \frac{3(2\alpha + 3a)^2}{4\alpha(3\alpha + 2a)} - 1.$$

Тогда ядро (1.16) можно представить в виде

$$\mathrm{M}(x, \xi) = \int_0^\infty \frac{(10\alpha + 27a)a}{4\alpha(3\alpha + 2a)} \sin(\alpha\xi) \sin(\alpha x)\, d\alpha = \frac{a}{48}\left[81 \ln\frac{\xi + x}{\xi - x} + \right. \tag{1.17}$$

$$\left. + 61(\sin\theta_1\, \mathrm{si}\,\theta_1 + \cos\theta_1\, \mathrm{ci}\,\theta_1 - \sin\theta_2\, \mathrm{si}\,\theta_2 - \cos\theta_2\, \mathrm{ci}\,\theta_2)\right],$$

$$\theta_1 = \frac{2}{3} a(\xi - x), \quad \theta_2 = \frac{2}{3} a(\xi + x).$$

Итак, статическая задача сводится к решению интегрального уравнения (1.12) с ядром (1.17), в котором $\mathrm{si}\,\theta$ и $\mathrm{ci}\,\theta$ — интегральный синус и косинус. Как видно из (1.17), на диагонали $\xi = x$ ядро имеет логарифмическую особенность. К уравнениям с такими ядрами применимы все теоремы Фредгольма [6]. Поскольку логарифмическая особенность имеет порядок $<1/2$, то ядро (1.17) удовлетворяет условию

$$\int_0^1 |\mathrm{M}(x, \xi)|^2\, d\xi \leqslant A, \tag{1.18}$$

где A — некоторая конечная постоянная. Так как промежуток интегрирования конечный, то из (1.18) вытекает выполнение второго условия

$$\int_0^1\int_0^1 |\mathrm{M}(x,\ \xi)|^2\,dx\,d\xi = B^2 \leqslant A. \tag{1.19}$$

Можно доказать, что параметр уравнения (1.12) с ядром (1.17) $\chi = 61a/48\pi$ не является собственным значением уравнения. Тогда на основании альтернативы Фредгольма оно имеет единственное решение. Поскольку правая часть уравнения (1.12) является ограниченной функцией, решение уравнения обладает тем же свойством.

Для приближенного отыскания решения воспользуемся методом последовательных приближений

$$\theta(x) = \theta_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \chi^n \theta_n(x) = F(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \chi^n \int_0^1 K_n(x,\ \xi) F(\xi)\, d\xi, \tag{1.20}$$

где $K_n(x,\ \xi)$— итерированное ядро n-го порядка.

Как известно [6], если ядро уравнения (1.12) удовлетворяет условиям (1.18), (1.19) и

$$\chi < B^{-1}, \tag{1.21}$$

то ряд (1.20) сходится абсолютно и равномерно. Можно показать, что для слабонеоднородных сред условие (1.21) выполняется. Нулевое приближение решения (1.20) отвечает случаю однородной среды ($a = 0$)

$$\theta_0 = -\frac{3}{4\mu_0} p_0 x. \tag{1.22}$$

Выполнив необходимые вычисления, найдем следующее слагаемое решения (1.20):

$$\theta_1(x) = \frac{a}{24\pi}\Big\{81(x\ln x - x) + \frac{61}{2}\Big[(\cos\varphi_1\,\mathrm{si}\,\varphi_1 - \cos\varphi_2\,\mathrm{si}\,\varphi_2 + \sin\varphi_2\,\mathrm{ci}\,\varphi_2 -$$
$$- \sin\varphi_1\,\mathrm{ci}\,\varphi_1)\frac{3}{2a} - (\sin\varphi_1\,\mathrm{si}\,\varphi_1 - \sin\varphi_2\,\mathrm{si}\,\varphi_2 - \cos\varphi_2\,\mathrm{ci}\,\varphi_2 + \ln\varphi_2 + \cos\varphi_1\,\mathrm{ci}\,\varphi_1 -$$
$$- \ln\varphi_1)\frac{9}{4a^2}\Big]\Big\}\frac{3p_0}{4\mu_0}, \tag{1.23}$$
$$\varphi_1 = (x+1)\frac{2}{3}a,\ \varphi_2 = (x-1)\frac{2}{3}a.$$

Действуя аналогично, можно найти и другие слагаемые. Все они ограничены в интервале (0.1) и в случае однородной среды ($a = 0$) обращаются в нуль.

2. Вычислим осевое и радиальное смещения в упругом полупространстве $z \geqslant 0$. С помощью соотношений (1.5), (1.7)—(1.9) и (1.15) получим

$$u_z = \int_0^{\infty} \frac{\left[\delta(2\alpha^2 - k^2 + a\eta)\,e^{-\delta z} - \alpha^2(2\delta + a)\,e^{-z\eta}\right] D(\alpha) J_0(\alpha r)\, d\alpha}{\delta k^2 + a(\alpha^2 - \eta\delta)}. \tag{2.1}$$

Устремив ω к нулю и используя правило Лопиталя, приходим к выражению для статического осевого смещения

$$u_{zs} = \frac{3(p_s + p_0)}{2\mu_0\pi}\int_0^{\infty}\int_0^1 \theta'(\xi,\ a)\sin(\alpha\xi)\left(1 + \frac{2z\alpha}{3} - \frac{az\alpha}{3(3\alpha + 2a)}\right)e^{-z\alpha} J_0(\alpha r)\, d\alpha.$$

Беря в качестве $\theta = (3p_0/4\mu_0)\theta'$ сумму двух слагаемых (1.22) и (1.23), получим первое приближение для осевого смещения в неоднородной среде

$$(2.2)\quad u_{zs} = \frac{3(p_0 + p_s)}{2\pi\mu_0}\int_0^\infty \left[\frac{\sin\alpha}{\alpha^2} - \frac{\cos\alpha}{\alpha} + \int_0^1 \theta_1'(\xi, a)\sin(\alpha\xi)\,d\xi\right]\left[1 + \frac{2z\alpha}{3} - \right.$$

$$\left. - \frac{az\alpha}{3(3\alpha + 2a)}\right] e^{-z\alpha} J_0(\alpha r)\,d\alpha.$$

В случае однородной среды $\theta_1'(\xi, a) = a = 0$ и выражение (2.2) совпадает с результатом, полученным в работе [2]. Используя (1.7) и другие необходимые зависимости, находим радиальное смещение

$$(2.3)\quad u_r = -\int_0^\infty \frac{\alpha D(\alpha)\left[-(\alpha^2 + \eta^2 + a\eta)e^{-\delta z} + \eta(2\delta + a)e^{-z\eta}\right]}{\delta k^2 + a(\alpha^2 - \eta\delta)} J_1(\alpha r)\,d\alpha.$$

Соответствующее статическое смещение приводится к виду

$$(2.4)\quad u_{rs} = \frac{3(p_s + p_0)}{2\pi\mu_0}\int_0^\infty \left[\frac{\sin\alpha}{\alpha^2} - \frac{\cos\alpha}{\alpha} + \int_0^1 \theta_1'(\xi, a)\sin(\alpha\xi)\,d\xi\right]\left[\frac{-1 + 2z\alpha}{3} + \right.$$

$$\left. + \frac{a(1 - 7z\alpha - 3z)}{3(6\alpha + 4a)}\right] e^{-z\alpha} J_1(\alpha r)\,d\alpha.$$

В случае однородной среды (2.4) также совпадает с результатом, полученным Снеддоном [2]. Формулы (2.2), (2.4) позволяют вычислить первую поправку к известному решению для однородной среды, вызванную неоднородностью последней.

Для приближенного решения динамической задачи полезно представить ядро (1.16) в другом виде. Соответствующая процедура вычислений изложена в работе [1], поэтому здесь приведем только окончательный результат. Интегрируя в комплексной плоскости и выбирая знаки радикалов δ и η, согласно (1.6), получим

$$M(x, \xi) = k\sum_{q=1}^{2}\int_{a_q}^{b_q} \Phi_q(\zeta, \beta)\, e^{i\omega\zeta} \sin(\xi_k\zeta)\,d\zeta,$$

где

$$(2.5)\quad \Phi_1 = \frac{\delta_1[(2\zeta^2 - 1)^2 + 4\zeta^2\delta_1\eta_1] + \beta^2(\zeta^2 + \delta_1\eta_1)\eta_1}{\delta_1^2 + \beta^2(\zeta^2 + \delta_1\eta_1)^2};$$

$$(2.6)\quad \Phi_2 = \frac{\left[4\delta_2^2 + \beta(4\delta_2 + \beta)\right]\zeta^2}{(\delta_2 + \beta\zeta^2)^2 + \beta^2\delta_2^2\eta_1^2},$$

$$a_1 = 0,\quad a_2 = b_1 = 1/\sqrt{3},\quad b_2 = 1,$$

$$\zeta = \alpha/k,\quad \delta_1 = \sqrt{1/3 - \zeta^2},\quad \eta_1 = \sqrt{1 - \zeta^2},\quad \delta_2 = \sqrt{\zeta^2 - 1/3},\quad \beta = a/k.$$

Предполагая, что $0 \leqslant a < k < 1$, разложим ядро (2.5) в ряд Лорана и ряд Маклорена по степеням параметров k и a

$$(2.7)\quad M(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} \frac{k^{m+1}\, i^{m-1}\, \beta^{n-m}}{m!\,(n-m)!} M_m(x, \xi)\, E_{m,n-m},$$

$$E_{m,n-m} = \frac{1}{(n-m)!}\sum_{q=1}^{2}\int_{a_q}^{b_q}\left[\left(\frac{\partial^{n-m}\Phi_q}{\partial\beta^{n-m}}\right)_{\beta=0}\right]\zeta^m\,d\zeta;$$

$$\text{(2.8)}\qquad \mathrm{M}_m = \frac{1}{2}\left[(x+\xi)^m + (|x-\xi|)^m\right].$$

Возможность разложения функций (2.6) по параметру β вытекает из следующих соображений. Будем допускать для параметра β не только действительные, но и комплексные значения (среда с поглощением энергии). Тогда при фиксированном значении ζ функции Φ_q можно рассматривать как аналитические функции переменной β, каждая из которых имеет по два полюса. Нулевое значение параметра β является обыкновенной точкой. А потому в малом круге с центром в точке $\beta = 0$ обе функции представляются рядом Тэйлора. Поскольку коэффициенты этого ряда являются интегрируемыми функциями переменной ζ, после их интегрирования получим сходящийся ряд с коэффициентами (2.8). Отсюда вытекает и сходимость ряда по степеням действительного параметра β.

Согласно разложению (2.7), ищем решение уравнения (1.12) в виде

$$\text{(2.9)}\qquad \theta(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\theta_{m,n-m}(x)\,k^m\beta^{n-m} = \theta_{00}(x) + k\theta_{10}(x) + \beta\theta_{01}(x) + {}$$
$$+ k^2\theta_{20}(x) + \cdots$$

Подставив (2.7), (2.9) в (1.12) и приравняв члены с одинаковыми степенями параметров, получим

$$\text{(2.10)}\qquad \theta_{m+1,\,n-m} = -\frac{1}{\pi}\sum_{\gamma=0}^{n-m}\sum_{q=0}^{m-1}\frac{i^{m-q}E_{m-q,\,n-m-\gamma}}{(m-q)!\,(n-m-\gamma)!}\times$$
$$\times\int_0^1\theta_{q,\gamma}(\xi)\,\mathrm{M}_{m-q}(x,\xi)\,d\xi.$$

Для θ_{00} непосредственно получаем значение, равное $-\,3p_0x/4\mu_0$. При составлении формулы (2.10) учтено, что, как следует из (1.12), все $\theta_{0\gamma}$ и $\theta_{1\gamma}$ ($\gamma = 1, 2, 3, \ldots$) равны нулю. Запишем в явном виде несколько слагаемых искомого решения

$$\theta(x) = \frac{3}{4\mu_0}p_0\left\{-x + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)k^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_{1n}}{n!}\beta^n + \frac{2x}{3\pi}k^3 i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_{2n}}{n!}\beta^n + \right.$$
$$+ k^4\left[\frac{x}{4\pi}\left(3E_{30} - \frac{5E_{10}^2}{6\pi}\right) + \frac{x^3}{2\pi}\left(E_{30} + \frac{E_{10}^2}{6\pi} - \frac{x^5}{20\pi}\left(E_{30} + \frac{E_{10}^2}{6\pi}\right)\right] + $$
$$+ k^4\beta\left[\frac{x}{4\pi}\left(3E_{31} - \frac{5E_{10}E_{11}}{6\pi}\right) + \frac{x^3}{2\pi}\left(1 - \frac{x^2}{10}\right)\left(E_{31} + \frac{E_{10}E_{11}}{\pi}\right) + \cdots\right.$$
$$+ k^5 i\left[\frac{x}{5\pi}\left(4E_{40} - \frac{3E_{10}E_{20}}{\pi}\right) + \frac{x^3}{3\pi}\left(4E_{40} + \frac{E_{10}E_{20}}{3\pi}\right)\right] + k^5\beta i\left[\frac{x}{5\pi}\left(4E_{41} - \right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - \frac{3}{\pi}(E_{11}E_{20} + E_{10}E_{21})\right) + \frac{x^3}{3\pi}\left(4E_{41} + \frac{1}{3\pi}(E_{11}E_{20} + E_{10}E_{21})\right)\right] + \cdots\right\}.$$

В случае однородной среды ($\beta = 0$) полученное решение совпадает с решением работы [1].

Осевое и радиальное смещения в полупространстве определяются формулами (2.1), (2.3). Найдем осевое смещение в плоскости щели $z = 0$. Положив в (2.1) $z = 0$ и заменив $D(\alpha)$ его значением из (1.16), получим

$$u_{z0} = -\frac{3}{2\pi\mu_0}\int_0^\infty\left\{\int_0^1 \theta'(\xi)\sin(\alpha\xi)\,d\xi\right\}J_0(\alpha r)\,d\alpha = \frac{3}{2\pi\mu_0}\int_r^1\frac{\theta'(\xi, a)\,d\xi}{(\xi^2-r^2)^{1/2}}.$$

Если записать

$$\int_r^1\frac{\theta'(\xi)\,d\xi}{(\xi^2-r^2)^{1/2}} = (1-r^2)^{1/2}(f_1 - if_2),$$

то осевое смещение примет вид

$$u_{z0} = 3(1-r^2)^{1/2}(2\pi\mu_0)^{-1}[p_s + p_0\exp(-i\omega t)](f_1 - if_2).$$

Выделяя действительную часть, получим

(2.11) $$\operatorname{Re}u_{z0} = 3(1-r^2)^{1/2}(2\pi\mu_0)^{-1}[p_s + p_0\Omega\cos(\omega t - \omega_0)],$$

где

(2.12) $$\Omega = \sqrt{f_1^2+f_2^2},\quad \omega_0 = \operatorname{arctg}\frac{f_2}{f_1};$$

(2.13) $$f_1 = 1 - \frac{4-r^2}{9\pi}k^2\sum_{n=0}^\infty\frac{E_{1n}}{n!}\beta^n - \frac{k^4}{75\pi}\left[-\frac{41}{3\pi}E_{10}^2 + 68\,E_{30} + \right.$$
$$+\,4r^2\left(\frac{E_{10}^2}{\pi} + 6E_{30}\right) - r^4\left.\left(\frac{E_{10}^2}{3\pi} + 2E_{30}\right)\right] + \frac{k^4\beta}{75\pi}\left[-\frac{41}{3\pi}E_{10}E_{11} + 68E_{31} + \right.$$
$$\left. +\,4r^2\left(\frac{E_{10}E_{11}}{\pi} + 6E_{31}\right) - \frac{r^4}{\pi}\left(\frac{E_{10}E_{11}}{3} + 2\pi E_{31}\right)\right] + \cdots;$$

(2.14) $$f_2 = \frac{2k^3}{3\pi}\sum_{n=0}^\infty\frac{E^{2n}}{n!}\beta^n + k^5\left[\frac{8}{45\pi}\left(7E_{40} - \frac{22}{3\pi}E_{10}E_{20}\right) + \frac{4r^2}{9\pi}\times\right.$$
$$\left.\times\left(2E_{40} + \frac{E_{10}E_{20}}{6\pi}\right)\right] + k^5\beta\left[\frac{8}{45\pi}\left(7E_{41} - \frac{22}{3\pi}(E_{11}E_{20} + E_{10}E_{21})\right) + \right.$$
$$\left. +\,2r^2(9\pi)^{-1}\left(4E_{41} + \frac{E_{11}E_{20} + E_{10}E_{21}}{3\pi}\right)\right] + \cdots$$

Итак, смещение в плоскости щели дается формулой (2.11). Слагаемые в (2.13), (2.14), содержащие множитель β, учитывают влияние неоднородности среды.

Представив начальную фазу колебаний ω_0 в виде суммы

$$\omega_0 = \omega_{01} + \omega_{02},$$

где $\omega_{01} = \operatorname{arctg}[(f_1/f_2)_{\beta=0}]$, из (2.12) получим формулу для приближенного определения возмущения начальной фазы колебаний под влиянием неоднородности среды при низкочастотных колебаниях

(2.15) $$\omega_{02} = \operatorname{arctg}\frac{f_2 f_{10} - f_{20}f_1}{f_1 f_{10} + f_2 f_{20}},$$

где f_{10} и f_{20} равны соответственно f_1 и f_2 при $\beta = 0$. Из (2.15) вытекает, что при вышеупомянутых условиях в среде со свойствами (1.1) возмущение начальной фазы колебаний не превосходит угла $\pi/4$.

В работе [7] получена формула для определения поперечного сечения препятствия, рассеивающего упругие волны в твердой среде. Поперечное сечение S определяется отношением

$$S = W_1/W_0,$$

где W_0 — энергия падающей волны, отнесенная к единице площади препятствия, расположенного нормально к направлению распространения волны; W_1 — энергия рассеянной волны, отнесенная к единице площади сферы большого радиуса R, окружающей препятствие. В случае продольной волны, распространяющейся параллельно оси $0z$,

$$S = 4\pi \frac{k}{\sqrt{3}} \operatorname{Im} g(0), \tag{2.16}$$

где $g(0)$ выражается через амплитуду продольной рассеянной волны в далекой точке поля. Нашей целью является вывод формулы для поперечного сечения круглой щели в рассматриваемой неоднородной среде. Для этого запишем выражение для осевого смещения (2.5) при $r = 0$ несколько иначе

$$u_z = \int_0^\infty \left[-\delta e^{-\delta |z|} + \frac{\alpha^2 (2\delta + a) e^{-\eta |z|}}{2\alpha^2 - k^2 + a\eta} \right] A_1(\alpha)\, \alpha d\alpha. \tag{2.17}$$

Первое слагаемое перепишем в виде

$$3\sqrt{3} N_1 = -k^3 i \int_0^1 A_1\left(k \sqrt{\frac{1 - v^2}{3}}\right) e^{\frac{kv|z|}{\sqrt{3}}} v^2 dv + k^3 \int_0^\infty A_1\left(k \sqrt{\frac{1 + u^2}{3}}\right) e^{\frac{-ku|z|}{\sqrt{3}}} \times$$

$$\times u^2 du,$$

где $v = \sqrt{1 - \zeta^2}$; $\zeta = \alpha\sqrt{3}/k$; $u = \sqrt{\zeta^2 - 1}$.

При $z \to \infty$ получим асимптотическое представление для $N_1(k, z)$ [8]

$$N_1 = -A_1(0) \frac{k^2 \exp\left(\frac{ik|z|}{\sqrt{3}}\right)}{3|z|}. \tag{2.18}$$

Второе слагаемое в (2.17) преобразуем аналогично

$$N_2 = -k \int_0^1 A_1(k\sqrt{1 - v^2})\, e^{-ivk|z|} G(v)\, v (1 - v^2)\, dv + k \int_0^\infty A_1(k\sqrt{1 + u^2}) \times$$

$$\times e^{-ku|z|} G(u)\, u (1 + u^2)\, du,$$

где

$$G(\alpha) = \frac{2\delta + a}{2\alpha^2 - k^2 + a\eta}, \quad \alpha = k\zeta; \quad \zeta = \begin{cases} \sqrt{1 - v^2}, & \zeta < 1, \\ \sqrt{1 + u^2}, & \zeta > 1. \end{cases}$$

Снова используя результаты [8], находим, что при $z \to \infty$ $N_2 = 0$. Тогда из (2.18) находим, что $g(0) = -(k^2/3)A_1(0)$ и (2.16) приводится к виду

$$S = -\frac{4\pi k}{\sqrt{3}} \operatorname{Im} A_1(0).$$

Исходя из (1.8), (1.9), (1.15), получим

$$A_1(0) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{2\alpha^2 - k^2 + \alpha\eta}{\alpha\pi\,[\delta k^2 + a(\alpha^2 - \eta\delta)]} \int_0^1 \theta(\xi) \sin(\alpha\xi)\, d\xi = \frac{2\sqrt{3}\,i}{k\pi} \int_0^1 \xi\theta(\xi)\, d\xi.$$

Итак, окончательно находим

$$S = -8\,\mathrm{Re} \int_0^1 \xi\theta(\xi)\, d\xi.$$

Подставляя сюда значения $\theta(\xi)$ из (1.23) и ограничиваясь несколькими слагаемыми, выразим поперечное сечение в функции двух параметров k и β

$$S = 8\left\{1 + \frac{2k^2}{5\pi}\left(-E_{20} + \beta E_{21} - \frac{\beta^2}{2} E_{22} + \ldots\right) + \frac{k^4}{105\pi^2}\left[17E_{20}^2 + 108E_{40} - \right.\right.$$
$$- \beta(34E_{21}E_{20} + 108\pi E_{41}) + \beta^2(17E_{22}E_{20} + 54\pi E_{42}) - \beta^3(17E_{22}E_{21} +$$
$$\left.\left. + 18\pi E_{43}) + \frac{\beta^4}{2}\left(17E_{22}^2 + 18\pi E_{44}\right) + \ldots\right] + \ldots\right\}.$$

Поступила 7 IV 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. **Robertson J. A.** Diffraction of a plane longitudinal wave by a penny-shaped crack.— «Proc. Cambr. Phil. Soc.», 1967, vol. 63, p. 229—238.
2. **Снеддон И. Н.** Преобразование Фурье. М., ИЛ, 1957, с. 542—557.
3. **Уфлянд Я. С.** Интегральные преобразования в теории упругости. Л., «Наука», 1967, с. 266—268.
4. **Hook J. F.** Separation of the vector wave equation of elasticity for certain types of inhomogeneous isotropic media.—«J. Acoust. Soc. Amer.», 1961, vol. 33, N 3, p. 302—313.
5. **Noble B.** The solution of Bessel function dual integral equations by a multiplying-factor method.— «Proc. Cambr. Phil. Soc.», 1963, vol. 59, p. 351—362.
6. **Михлин С. Г.** Лекции по линейным интегральным уравнениям. М., Физматгиз, 1959.
7. **Barrat P. G., Collins W. D.** The scattering cross-section of an obstacle in an elastic solid for plane harmonic waves.— «Proc. Cambr. Phil. Soc.», 1965, vol. 61, p. 969—981.
8. **Эрдейи А.** Асимптотические разложения. М., Физматгиз, 1962.

УДК 539.3.01

ДЕФОРМИРОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОГО ТЕЛА С ОТВЕРСТИЕМ

Н. Б. Ромалис

(Воронеж)

В настоящее время имеется очень большое количество решений о деформировании неограниченных стохастически неоднородных тел. В этих решениях определяются эффективные упругие модули, т. е. осредненные по пространственной области механические характеристики материала в зависимости от параметров, характеризующих структурную неоднородность среды. Однако в силу нелокальности связи между средними напряжениями и средними деформациями