

Из сравнения теоретических и экспериментальных зависимостей видно, что значение пористости при данном давлении, рассчитанное по (2.5), отличается от соответствующего экспериментального не более чем на 5%. Экспериментальных данных, отражающих особенности перехода включений из жесткого состояния в пластическое, для пористых материалов не имеется.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дудукаленко В. В., Минаев В. А. К расчету предела пластичности композитных материалов // ПММ.— 1970.— Т. 34, вып. 5.
2. Дудукаленко В. В., Смыслов А. Ю. К расчету предела пластичности пористых материалов // Прикл. механика.— 1980.— Т. 16, № 5.
3. Дудукаленко В. В., Смыслов А. Ю. К теории деформирования грунта с пористой структурой // ПМТФ.— 1980.— № 6.
4. Дудукаленко В. В., Лысач Н. И. О пластических свойствах материала, содержащего пластинчатые включения // Изв. АН СССР. МТТ.— 1980.— № 1.
5. Дудукаленко В. В., Мешков С. И. О пластическом деформировании композита, содержащего сферические включения // Изв. АН СССР. МТТ.— 1983.— № 5.
6. Дудукаленко В. В., Шаповалов С. П. Об установившейся ползучести огнеупорных композитов // ПМТФ.— 1984.— № 4.
7. Смыслов А. Ю. К теории пластичности пористых сред // Изв. вузов. Машиностроение.— 1980.— № 4.
8. Сараев Л. А. К теории идеальной пластичности композиционных материалов // ПМТФ.— 1981.— № 3.
9. Радомысльский И. Д., Титаренко С. В., Щербань Н. И. Влияние второго компонента на прессуемость металлических смесей // Теория и практика прессования порошков.— Киев: ОНТИ ИПМ АН УССР, 1975.
10. Третьяков А. В., Радченко К. М. Изменение механических свойств металлов и сплавов при холодной прокатке.— Свердловск: Металлургиздат, 1960.

г. Куйбышев

Поступила 30/V 1990 г.

УДК 539.378

И. С. Макарова, Л. А. Сараев

К ТЕОРИИ МАЛЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ ХАОТИЧЕСКИ АРМИРОВАННЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Методами механики случайно-неоднородных сред исследуются упругопластические свойства композиционного материала, содержащего разориентированные эллипсоидальные включения. Для композитов со сферическими включениями и матричных смесей аналогичная задача решена в [1].

1. Пусть композиционный материал, занимающий объем V , ограниченный поверхностью S , образован упругопластическими матрицей и разориентированными эллипсоидальными включениями одинаковой формы. Определяющие уравнения материалов обоих компонентов, соединенных с идеальной адгезией, задаются соотношениями

$$(1.1) \quad s_{ij} = 2\mu_m(e)e_{ij}, \quad \sigma_{pp} = 3K_m \varepsilon_{pp}, \quad s_{ij} = 2\mu_f(e)e_{ij}, \quad \sigma_{pp} = 3K_f \varepsilon_{pp}.$$

Здесь $s_{ij} = \sigma_{ij} - (1/3)\delta_{ij}\sigma_{pp}$; $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - (1/3)\delta_{ij}\varepsilon_{pp}$; σ_{ij} , ε_{ij} — компоненты тензоров напряжений и деформаций; $\mu_{m,f}(e)$ — модули пластичности сдвига; $K_{m,f}$ — объемные модули материалов компонентов ($K_{m,f} = \text{const}$); $e = \sqrt{e_{ij}e_{ij}}$; индекс m относится к материалу матрицы, а f — к материалу включений.

Структуру композита будем описывать индикаторной функцией $\kappa(\mathbf{r})$, равной нулю в объеме матрицы V_m и единице в объеме включений V_f . Кроме того, положение эллипсоидов в пространстве зададим набором индикаторных функций $\kappa_1(\mathbf{r})$, $\kappa_2(\mathbf{r})$, ..., $\kappa_n(\mathbf{r})$. Каждая функция $\kappa_s(\mathbf{r})$ равна единице в объеме V_s всех эллипсоидов s -го направления и нулю вне этого объема. Очевидно, что имеет место соотношение $\kappa(\mathbf{r}) = \sum_{s=1}^n \kappa_s(\mathbf{r})$.

С помощью индикаторной функции $\chi(\mathbf{r})$ соотношения (1.1) могут быть записаны в виде

$$(1.2) \quad \begin{aligned} s_{ij}(\mathbf{r}) &= 2(\mu_m(e) + (\mu_f(e) - \mu_m(e))\chi(\mathbf{r}))e_{ij}(\mathbf{r}), \\ \sigma_{pp}(\mathbf{r}) &= 3(K_m + (K_f - K_m)\chi(\mathbf{r}))\varepsilon_{pp}(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Все индикаторные функции, напряжения и деформации предполагаются статистически однородными и эргодическими случайными полями, и их математические ожидания заменяются средними значениями по объемам [2]:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{V} \int_V f(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad \langle f \rangle_{m,f,s} = \frac{1}{V_{m,f,s}} \int_{V_{m,f,s}} f(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (s = 1, 2, \dots, n).$$

Для нахождения макроскопических определяющих уравнений и эффективных характеристик рассматриваемого композита необходимо установить связь между макровеличинами $\langle \sigma_{ij} \rangle$ и $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$:

$$(1.3) \quad \langle \sigma_{ij} \rangle = E_{ijk1}^* \langle \varepsilon_{k1} \rangle,$$

где E_{ijk1}^* — компоненты тензора модулей пластичности, зависящие от числовых характеристик случайных полей деформаций $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})$. Здесь и далее звездочкой обозначены эффективные значения величин.

Получение соотношений (1.3) достигается статистическим осреднением системы уравнений упругопластического деформирования композиционного материала, состоящей из (1.2), уравнений равновесия

$$(1.4) \quad \sigma_{ip,p}(\mathbf{r}) = 0$$

и формул Коши

$$(1.5) \quad 2\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) = u_{i,j}(\mathbf{r}) + u_{j,i}(\mathbf{r}),$$

выражающих компоненты тензора малых упругопластических деформаций через компоненты вектора перемещений $u_i(\mathbf{r})$. Граничными условиями для системы (1.2), (1.4), (1.5) являются условия однородности флуктуаций величин на поверхности S объема V : $f(\mathbf{r}) = \langle f \rangle$, $\mathbf{r} \in S$.

Для того чтобы воспользоваться методами теории упругости микро-неоднородных сред установления эффективных соотношений, уравнения (1.2) необходимо линеаризовать. Следуя [1], заменим под знаком модуля пластичности в пределах каждого компонента деформации их математическими ожиданиями

$$\mu_{m,f}(e) = \mu_{m,f}(e_{m,f}), \quad e_{m,f} = \sqrt{\langle e_{ij} \rangle_{m,f} \langle e_{ij} \rangle_{m,f}}.$$

Соотношения (1.2) принимают вид

$$(1.6) \quad s_{ij}(\mathbf{r}) = 2(\mu_m + [\mu]\chi(\mathbf{r}))e_{ij}(\mathbf{r}), \quad \sigma_{pp}(\mathbf{r}) = 3(K_m + [K]\chi(\mathbf{r}))\varepsilon_{pp}(\mathbf{r}).$$

Здесь $[\mu] = \mu_f(e_f) - \mu_m(e_m)$; $[K] = K_f - K_m$. Отметим, что линейные относительно локальных полей $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$, $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})$ формулы (1.6) остаются физически нелинейными, поскольку в их правые части входят нелинейным образом числовые характеристики случайных полей $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})$.

С помощью тензора Грина

$$G_{ik}(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi\mu_m(e_m)} \left(\delta_{ik} r_{,pp} - \frac{3K_m + \mu_m(e_m)}{3K_m + 4\mu_m(e_m)} r_{,ik} \right), \quad r = |\mathbf{r}|$$

уравнения (1.4)–(1.6) сводятся к системе интегральных уравнений

$$(1.7) \quad \varepsilon'_{ij}(\mathbf{r}) = \int_V G_{ikh,lj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \tau'_{kl}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1,$$

где $\tau_{kl}(\mathbf{r}) = -(2[\mu]e_{kl}(\mathbf{r}) + \delta_{kl}[K]\varepsilon_{pp}(\mathbf{r}))\chi(\mathbf{r})$; штрихами обозначены флуктуации величин в объеме V .

Вычислим макроскопические напряжения $\langle \sigma_{ij} \rangle$. Для этого осредним по объему V соотношения (1.6) и применим правило механического смешивания к объемам эллипсоидов V_s :

$$(1.8) \quad \langle s_{ij} \rangle = 2\mu_m \langle e_{ij} \rangle + 2[\mu] \sum_{s=1}^n c_s \langle e_{ij} \rangle_s,$$

$$\langle \sigma_{pp} \rangle = 3K_m \langle \varepsilon_{pp} \rangle + 3[K] \sum_{s=1}^n c_s \langle \varepsilon_{pp} \rangle_s$$

($c_s = V_s V^{-1}$ — объемные содержания эллипсоидов s -го направления). Формулы (1.8) показывают, что для установления макроскопических определяющих уравнений рассматриваемого композита средние по объемам V_s деформации $\langle \varepsilon_{ij} \rangle_s$ находятся из известного соотношения [1]

$$(1.9) \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle_s = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + c_s^{-1} \langle \varkappa'_s \varepsilon'_{ij} \rangle$$

после определения момента $\langle \varkappa'_s \varepsilon'_{ij} \rangle$. Вычислим эту величину с помощью уравнений (1.7). Умножая их на $\varkappa'_s(\mathbf{r})$ и осредняя по объему V , получим

$$\langle \varkappa'_s \varepsilon'_{ij} \rangle = \int_V G_{ik,lj}(\mathbf{r}_1) \langle \varkappa'_s(\mathbf{r}) \tau'_{kl}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1) \rangle d\mathbf{r}_1.$$

При вычислении интеграла, стоящего в правой части, воспользуемся тем, что функция $\varkappa'_s(\mathbf{r})$ описывает только эллипсоиды одного направления, и будем считать, что корреляционная функция под знаком интеграла имеет вид

$$\langle \varkappa'_s(\mathbf{r}_1) \tau'_{kl}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1) \rangle = f_{kl}^{(s)} \left(\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} \right)$$

(a_i — полуоси эллипсоида). Такое предположение — обобщение гипотезы сильной изотропии на случай эллипсоидальной анизотропии в одном направлении [2, 3]. Значение интеграла с учетом сделанного допущения выражается формулой

$$(1.10) \quad \langle \varkappa'_s \varepsilon'_{ij} \rangle = \frac{c_s}{2\mu_m} Z_{ijkl}^{(s)} (\langle \tau_{kl} \rangle_s - c_f \langle \tau_{kl} \rangle_f),$$

$$Z_{ijkl}^{(s)} = S_{ijkl}^{(s)} - \frac{\nu_m}{1 + \nu_m} S_{ppkl}^{(s)} \delta_{ij}, \quad \nu_m = \frac{3K_m - 2\mu_m}{6K_m + 2\mu_m},$$

где $c_f = V_f V^{-1}$ — объемное содержание всех включений; $S_{ijkl}^{(s)}$ — компоненты тензора Эшелби, записанные в лабораторной системе координат эллипсоидов s -го направления [4].

Подстановка выражения для $\tau_{ij}(\mathbf{r})$ и формул (1.10) в соотношение (1.9) дает

$$(1.11) \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle_s = c_f Q_{ijpq}^{(s)} P_{pqkl}^{(s)} \langle \varepsilon_{kl} \rangle_f + Q_{ijkl}^{(s)} \langle \varepsilon_{kl} \rangle.$$

Здесь

$$P_{ijkl}^{(s)} = \frac{1}{2\mu_m} (2[\mu] Z_{ijkl}^{(s)} + \delta_{kl} [\lambda] Z_{ijpp}^{(s)}); \quad Q_{ijkl}^{(s)} =$$

$$= (I_{ijkl} + P_{ijkl}^{(s)})^{-1}; \quad \lambda_{m,f} = K_{m,f} - \frac{2}{3} \mu_{m,f}.$$

Умножая (1.11) на c_s и суммируя по всем возможным направлениям ориентации эллипсоидов, запишем уравнение для скоростей деформаций, осредненных по V_f :

$$(1.12) \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle_f = \frac{\langle \varepsilon_{kl} \rangle - c_f \langle \varepsilon_{kl} \rangle_f}{c_f c_m} \sum_{s=1}^n c_s Q_{ijkl}^{(s)}.$$

Разрешая тензорное уравнение (1.12) относительно $\langle \varepsilon_{ij} \rangle_f$, получаем

$$(1.13) \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle_f = a_{ijkl} \langle \varepsilon_{kl} \rangle,$$

где

$$a_{ijkl} = (I_{ijpq} + R_{ijpq})^{-1} R_{pqhl};$$

$$R_{ijkl} = \frac{1}{c_f c_m} \sum_{s=1}^n c_s Q_{ijkl}^{(s)}, \quad c_m = 1 - c_f.$$

Подставляя формулы (1.9), (1.13) в соотношения (1.8), находим макроскопический закон упругопластического деформирования рассматриваемого композиционного материала:

$$(1.14) \quad \langle \sigma_{ij} \rangle = E_{ijkl}^* (e_{m,f}) \langle \varepsilon_{kl} \rangle$$

($E_{ijkl}^* = 2\mu_m I_{ijkl} + \delta_{ij} \delta_{kl} \lambda_m + c_f (2[\mu] I_{ijpq} + \delta_{ij} \delta_{pq} [\lambda]) a_{pqhl}$ — эффективный тензор модулей пластичности).

В систему уравнений макроскопического деформирования композита (1.11), (1.13), (1.14) вместе с макровеличинами $\langle \sigma_{ij} \rangle$, $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ входят компоненты тензоров деформаций $\langle \varepsilon_{ij} \rangle_{m,f}$. Для их вычисления необходимо задать вид функций модулей пластичности $\mu_{m,f}(e)$, который определяется в соответствии с деформационными свойствами материалов компонентов.

В случае, если величины $\mu_{m,f}$ — константы, формулы (1.11), (1.13), (1.14) совпадают с известными результатами для упругих композитов, содержащих эллипсоидальные включения [4].

2. Важным частным случаем общих соотношений (1.14) является модель композиционного материала, в котором эллипсоидальные включения ориентированы равномерно. Объемные содержания эллипсоидов всех направлений в таком композите одинаковы ($c_1 = c_2 = \dots = c_n$), тогда тензор четвертого ранга $\sum_{s=1}^n c_s Q_{ijkl}^{(s)}$ будет изотропным и его можно представить в виде [5]

$$(2.1) \quad \sum_{s=1}^n c_s Q_{ijkl}^{(s)} = c_f (I_{ijkl} \alpha - \delta_{ij} \delta_{kl} \beta).$$

Здесь $\alpha = (3Q_{ppqq} - Q_{ppqq})/15$; $\beta = (Q_{ppqq} - 2Q_{ppqq})/15$ — инварианты тензора Q_{ijkl} . Подставляя соотношения (2.1) в формулы (1.13), (1.14) и выделяя девиаторную и объемную части, находим деформации, осредненные по включениям V_f :

$$(2.2) \quad \langle e_{ij} \rangle_f = \frac{\alpha}{c_m + \alpha c_f} \langle e_{ij} \rangle, \quad \langle \varepsilon_{pp} \rangle_f = \frac{\gamma}{c_m + \gamma c_f} \langle \varepsilon_{pp} \rangle.$$

Соотношение (1.14) принимает вид

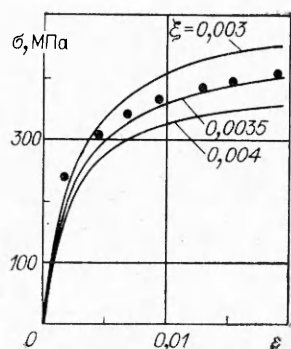
$$(2.3) \quad \langle s_{ij} \rangle = 2\mu^*(e_{m,f}) \langle e_{ij} \rangle, \quad \langle \sigma_{pp} \rangle = 3K^*(e_{m,f}) \langle \varepsilon_{pp} \rangle,$$

$$\mu^* = \mu_m + [\mu] \frac{c_f \alpha}{c_m + \alpha c_f}, \quad K^* = K_m + [K] \frac{c_f \gamma}{c_m + \gamma c_f}, \quad \gamma = \alpha - 3\beta$$

(μ^* , K^* — эффективные модули пластичности изотропного композита). Соотношения (2.3) необходимо дополнить уравнениями относительно величин $e_{m,f}$. Из (2.2) и правила механического смешивания следует

$$(2.4) \quad e_m = \frac{1}{c_m + \alpha c_f} e, \quad e_f = \frac{\alpha}{c_m + \alpha c_f} e.$$

Применим формулы (2.3), (2.4) для расчета упругопластических свойств образцов композита, изготовленных из спеченного алюминиевого порошка (САП). Такие композиты представляют собой алюминиевую матрицу, в которой хаотически распределены частицы окиси алюминия Al_2O_3 , образующиеся при спекании порошка алюминия. Эти частицы представляют собой пластинки, толщина которых $h = 0,055$ мкм, а линейный размер $L = 10 \div 16$ мкм [6]. Частицы окислов будем аппроксимировать эллипсоидами вращения (сплюснутыми сфероидами), отношение полуосей которых $\xi = hL^{-1}$. Компоненты тензора Эшелби в этом слу-



чае выражаются через элементарные функции, и процедура вычисления инвариантов α , γ легко реализуется на ЭВМ [7].

Построим диаграмму растяжения рассматриваемого композита по формулам (2.3), (2.4). Уравнения (2.3) при одноосном растяжении принимают вид

$$(2.5) \quad \langle \sigma_{11} \rangle = \frac{9K^* \mu^*}{4K^* + \mu^*} \langle \varepsilon_{11} \rangle.$$

Зададим вид функций модулей пластичности $\mu_{m,f}(\varepsilon)$. Согласно [1], участок диаграммы растяжения алюминиевой матрицы будем аппроксимировать экспоненциальной зависимостью, для которой

$$(2.6) \quad \mu_m(\varepsilon) = \frac{k_m}{2\varepsilon} \left(1 - \exp\left(-\frac{2G_m \varepsilon}{k_m}\right) \right).$$

Здесь G_m — модуль сдвига; k_m — предельное напряжение сдвига на данном участке (предел текучести). Материал включений (высокопрочных и высокомодульных частиц окиси алюминия) будем считать идеально упругим во время всего процесса деформирования: $\mu_f = \text{const}$. Уравнения (2.4)—(2.6) решались численно на ЭВМ методом последовательных приближений.

На рисунке приведено сравнение теоретических диаграмм растяжения композита САП (14 % Al_2O_3), рассчитанных по формулам (2.4)—(2.6), с экспериментальными результатами, приведенными в [8], сплошные линии — расчеты по формулам (2.4)—(2.6), точки — экспериментальные данные. Расчетные значения величин следующие: $E_m = 71$ ГПа, $E_f = 2500$ ГПа, $\nu_m = 0,34$, $\nu_f = 0,2$, $k_m = 25$ МПа, $c_f = 0,14$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сараев Л. А. Упругопластические свойства многокомпонентных композиционных материалов // ПМТФ.— 1988.— № 4.
2. Шермергор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред.— М.: Наука, 1977.
3. Сараев Л. А. Поверхность текучести композиционного материала с однонаправленным распределением включений // Механика деформируемых сред.— Куйбышев: КГУ, 1978.— Вып. 3.
4. Левин В. М. К определению упругих и термоупругих постоянных композиционных материалов // Изв. АН СССР. МТТ.— 1976.— № 6.
5. Сараев Л. А. Эффективный закон пластического течения хаотически армированного композиционного материала // Прочность и долговечность элементов конструкций.— Куйбышев: КПТИ, КуАИ, 1983.
6. Основы материаловедения/Под ред. И. И. Сидорина.— М.: Машиностроение, 1976.
7. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций.— М.: ИЛ, 1963.
8. Клявин О. В. Физика пластичности кристаллов при гелиевых температурах.— М.: Наука, 1987.

г. Самара

Поступила 12/IV 1990 г.

УДК 539.3

А. Д. Дроздов, В. Б. Колмановский

УСТОЙЧИВОСТЬ ВЯЗКОУПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ СЛУЧАЙНОЙ ПРОДОЛЬНОЙ НАГРУЗКЕ

Изучается устойчивость на бесконечном интервале времени вязкоупругого стержня, сжатого случайной силой. Изгиб стержня рассматривается в динамической постановке. Сформулированы условия устойчивости в среднем квадратичном вязкоупругого стержня при произвольном виде меры релаксации напряжений и различных типах закрепления концов. Показано, что при выполнении полученных условий вязкоупругий стержень устойчив, а соответствующий упругий стержень с длительным модулем упругости неустойчив. Вопросы устойчивости стержней из стареющего вязкоупругого