

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

А В Т О М Е Т Р И Я

---

---

2007, том 43, № 6

УДК 519.68

**МЕТОДИКА ФОРМИРОВАНИЯ ПАДАЮЩЕЙ ВОЛНЫ  
ПРИ РАЗНОСТНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА.  
ДВУМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ\***

**Д. Л. Головашкин, Н. Л. Казанский**

*Институт систем обработки изображений РАН, г. Самара  
Самарский государственный аэрокосмический университет  
им. академика С. П. Королева, г. Самара  
E-mail: kazansky@smr.ru*

В рамках методики TF/RF (частного случая методики TF/SF) разностного решения уравнений Максвелла предложено численное формирование падающей волны для двумерной области, заключенной в неоднородную оболочку. Проведено сравнение с традиционными способами задания падающей волны. Показаны преимущества нового подхода.

**Введение.** Развивающаяся дифракционная микрооптика и появившаяся недавно нанооптика нуждаются в совершенствовании сопутствующего им математического аппарата, предназначенного для моделирования распространения электромагнитного излучения в рамках строгой теории дифракции. Желательность и возможность такого совершенствования обуславливаются, с одной стороны, уменьшением характеристических неоднородностей оптических элементов (что делает недостаточными традиционные методы геометрической и скалярной оптики для моделирования их работы), а с другой – увеличением мощности современных вычислительных систем (открывающих дорогу методам векторной оптики, характеризующимся высокой вычислительной сложностью).

Предлагаемая работа посвящена развитию разностного метода решения уравнений Максвелла (FDTD method) [1], получившего признание за универсальность. Этот метод позволяет с одинаковым успехом исследовать дифракцию гармонических и негармонических электромагнитных колебаний на периодических и непериодических оптических структурах, характеризующихся в общем случае произвольными значениями функции комплексного показателя преломления.

---

\* Работа выполнена при поддержке Российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (BRHE), гранта Президента РФ (№ МК-2568.2005.09) и Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 04-07-90149 и № 06-07-08074).

Обращаясь к рассматриваемому методу, принято акцентировать внимание на записи разностных уравнений и граничных условий [2] (аппроксимирующей исходную дифференциальную задачу), наложении поглощающих слоев [3] (моделирующих бесконечное пространство за границами вычислительной области) и методике формирования падающей волны [4] (посредством которой волна вводится в область вычислительного эксперимента). Развитие методики TF/SF (Total-Field/Scattering-Field technique) [4] формирования падающей волны и предлагается в данной работе.

В рамках этой методики область результирующего поля приходится собственнo на элемент, а рассеянное поле поглощается вне его. Впоследствии данная методика была усовершенствована [5] переформулированием из аналитического вида в численный, что привело к существенному увеличению точности моделирования за счет взаимной компенсации погрешностей.

Известные авторам работы посвящены развитию методики TF/SF исключительно для случая, когда вычислительная область содержит оптический элемент целиком, что позволяет проводить границу результирующего и отраженного полей по однородной среде. Однако это не всегда удобно в практике моделирования. Например, при исследовании работы дифракционных оптических элементов (ДОЭ) принято сокращать длительность моделирования, заключая в вычислительную область только микрорельеф ДОЭ и ограничивая область вакуумом с одной стороны и подложкой ДОЭ с другой [6]. Кроме того, существует прием декомпозиции вычислительной области [7], основанный на исключении из рассмотрения сеточных подобластей с локально устоявшимся полем. Данный прием также приводит к сокращению длительности моделирования и решению задачи дифракции на части оптического элемента, заключенной в неоднородную оболочку.

Как будет показано далее, применение в указанных случаях аналитического задания падающей волны в рамках методики TF/SF приводит к снижению точности вычислительного эксперимента, а численное задание для неоднородной оболочки в [5] не представлено и нуждается в разработке. Исследования в этом направлении для одномерного случая были проведены в [8] и в предлагаемой работе распространяются на двумерный случай.

**1. Аналитическое задание падающей волны в рамках методики TF/SF.** Рассматривая разностную схему Yee [2] для уравнений Максвелла, в двумерном случае ограничимся изучением распространения  $H$ -волны [9] в диэлектрике (для  $E$ -волны верны аналогичные выкладки), которое моделируется решением следующих уравнений:

$$-\mu_0 \mu_{j,k} \frac{H_{y_{j,k+0,5}}^{m+0,5} - H_{y_{j,k+0,5}}^{m-0,5}}{h_t} = \frac{E_{x_{j,k+1}}^m - E_{x_{j,k}}^m}{h_z}, \quad (1)$$

$$\mu_0 \mu_{j,k} \frac{H_{z_{j+0,5,k}}^{m+0,5} - H_{z_{j+0,5,k}}^{m-0,5}}{h_t} = \frac{E_{x_{j+1,k}}^m - E_{x_{j,k}}^m}{h_y}, \quad (2)$$

$$\varepsilon_0 \varepsilon_{j,k} \frac{E_{x_{j,k}}^{m+1} - E_{x_{j,k}}^m}{h_t} = \frac{H_{z_{j+0,5,k}}^{m+0,5} - H_{z_{j-0,5,k}}^{m+0,5}}{h_y} - \frac{H_{y_{j,k+0,5}}^{m+0,5} - H_{y_{j,k-0,5}}^{m+0,5}}{h_z}, \quad (3)$$

где  $z$  – направление распространения волны;  $E_x, H_y, H_z$  – декартовы компоненты напряженности электрического и магнитного полей;  $\varepsilon = \varepsilon(y, z)$  и  $\mu = \mu(y, z)$  – диэлектрическая и магнитная проницаемости, характеризующие среду. Далее для простоты положим  $\mu = 1$ .

На область вычислительного эксперимента  $D$  ( $0 \leq y \leq L_y, 0 \leq z \leq L_z, 0 < t \leq T$ ) накладывается сеточная область  $D_h$ , в узлах которой  $\{(t_m, y_j, z_k): t_m = mh_t, m=0,1,\dots, M=T/h_t, y_j = jh_y, j=0,\dots, J=L_y/h_y, z_k = kh_z, k=0,\dots, K=L_z/h_z\}$  определена проекция  $E_{x_j,k}^m, H_{y_j,k+0,5}^{m+0,5}$  – в узлах  $\{(t_{m+0,5}, y_j, z_{k+0,5}): t_{m+0,5} = (m+0,5)h_t, m=0,1,\dots, M-1, y_j = jh_y, j=1,\dots, J-1, z_{k+0,5} = (k+0,5)h_z, k=0,\dots, K-1\}$  и  $H_{z_{j+0,5,k}}^{m+0,5}$  – в узлах  $\{(t_{m+0,5}, y_{j+0,5}, z_k): t_{m+0,5} = (m+0,5)h_t, m=0,1,\dots, M-1, y_{j+0,5} = (j+0,5)h_y, j=0,\dots, J-1, z_k = kh_z, k=1,\dots, K-1\}$ .

При изучении работы конечного по размерам оптического элемента (в отличие от бесконечных решеток) в качестве граничных условий принимают равенство нулю электрической составляющей поля на всей границе  $\Gamma$  области  $D$  (электрическая стенка [9]):  $E_{x/\Gamma} = 0$  при  $y=0, y=L_y$  для  $0 \leq z \leq L_z$  и  $z=0, z=L_z$  для  $0 \leq y \leq L_y$ , т. е. на области  $D_h$  проекции  $E_{x_0,k}^m = 0, E_{x_j,k}^m = 0$  для  $0 \leq k \leq K$  и  $E_{x_{j,0}}^m = 0, E_{x_{j,K}}^m = 0$  для  $0 \leq j \leq J$ . Другие компоненты поля на границе не задаются в силу структуры  $D_h$  [2]. Начальным условием полагают отсутствие излучения в области на момент времени  $t=0$ :  $E_{x_j,k}^0 = 0$ . Согласно (1) и (2) задание значений магнитных компонент при  $t=0$  не требуется.

Формирование падающей волны в рамках методики TF/SF основано на разделении результирующей и рассеянного полей [4]. Границы разделения обозначим отрезками:  $k = k_L, j_T \leq j \leq j_B$  (левая граница),  $k = k_R, j_T \leq j \leq j_B$  (правая граница),  $j = j_T, k_L \leq k \leq k_R$  (верхняя граница) и  $j = j_B, k_L \leq k \leq k_R$  (нижняя граница) (рис. 1). При этом результирующее поле будет находиться внутри выделенного прямоугольника  $R$ , включая его границы, а рассеянное – вне. Для искомого разделения необходимо после перехода на следующий временной слой по формулам (1)–(3) произвести вычисления:

$$H_{y_j,k_L-0,5}^{m+0,5} = H_{y_j,k_L-0,5}^{m+0,5} + \frac{h_t}{\mu_0 h_z} \tilde{E}_{x_j,k_L}^m, \quad (4)$$

$$H_{y_j,k_R+0,5}^{m+0,5} = H_{y_j,k_R+0,5}^{m+0,5} - \frac{h_t}{\mu_0 h_z} \tilde{E}_{x_j,k_R}^m, \quad (5)$$

$$E_{x_j,k_L}^{m+1} = E_{y_j,k_L}^{m+1} + \frac{h_t}{\varepsilon_0 \varepsilon_{j,k_L} h_z} \tilde{H}_{y_j,k_L-0,5}^{m+0,5}, \quad (6)$$

$$E_{x_j,k_R}^{m+1} = E_{y_j,k_R}^{m+1} - \frac{h_t}{\varepsilon_0 \varepsilon_{j,k_R} h_z} \tilde{H}_{y_j,k_R+0,5}^{m+0,5}, \quad (7)$$

$$H_{z_{j_T-0,5,k}}^{m+0,5} = H_{z_{j_T-0,5,k}}^{m+0,5} - \frac{h_t}{\mu_0 h_y} \tilde{E}_{x_{j_T,k}}^m, \quad (8)$$

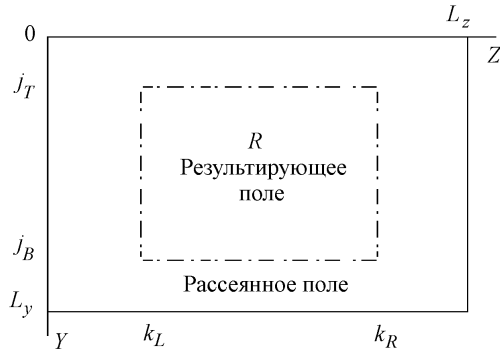


Рис. 1. Вычислительная область с разделением полей на основе методики TF/SF без поглощающих слоев. Штрихпунктирная линия разделяет результирующее и рассеянное поля

$$H_{z_{j_B+0,5,k}}^{m+0,5} = H_{z_{j_B+0,5,k}}^{m+0,5} + \frac{h_t}{\mu_0 h_y} \tilde{E}_{x_{j_B,k}}^m, \quad (9)$$

$$E_{x_{j_T,k}}^{m+1} = E_{y_{j_T,k}}^{m+1} - \frac{h_t}{\epsilon_0 \epsilon_{j_T,k} h_z} \tilde{H}_{y_{j_T-0,5,k}}^{m+0,5}, \quad (10)$$

$$E_{x_{j_B,k}}^{m+1} = E_{y_{j_B,k}}^{m+1} + \frac{h_t}{\epsilon_0 \epsilon_{j_B,k} h_z} \tilde{H}_{y_{j_B+0,5,k}}^{m+0,5}, \quad (11)$$

где « $\sim$ » обозначает электрическую и магнитную напряженности падающего поля, которые в [4] задаются аналитически; для уравнений (4)–(7)  $j_T \leq j \leq j_B$ , для (8)–(11)  $k_L \leq k \leq k_R$ .

Таким образом, погрешности решения обусловлены заменой производных разностными отношениями в уравнениях (1)–(3) и заданием падающей волны в (4)–(11). Другим источником погрешностей традиционно является наложение поглощающих слоев [3]. Стремясь выделить и проанализировать погрешности формирования падающей волны, временно воздержимся от использования поглощающих слоев. Для этого размеры вычислительной области  $L_y, L_z$  и длительность вычислительных экспериментов  $T$  подберем таким образом, чтобы отраженная от границ волна не успевала исказить результирующее поле. Так, если ограничить  $R$  размерами  $2 \times 2$  мкм, разместить его в центре области  $D$  с  $L_y = L_z = 24$  мкм и запустить в область цуг плоской однородной  $T$ -волны [9] длиной  $20\lambda$  ( $\lambda = 1$  мкм), то отраженные от электрических стенок волны не успеют исказить результирующее поле. Более того, вычислительный эксперимент для свободного пространства не должен характеризоваться наличием рассеянного поля вовсе. Однако в вычислительной практике такое поле появится в силу наличия указанных погрешностей.

Первая серия вычислительных экспериментов характеризовалась записанными выше параметрами. Зависимость погрешностей (регистрируется равномерная погрешность в прямоугольнике  $R$ ) разностного решения от дискретизации сеточной области приведена в табл. 1. Отметим, что при исследовании методики формирования падающей волны представляет ценность выявление погрешности именно от нее, а не от совокупной погрешности.

Т а б л и ц а 1

Параметры дискретизации	Номер серии экспериментов	
	1	2
10/20	1,7033	0,1502
20/40	1,1559	0,0390
50/100	1,1476	0,0116
100/200	0,8177	0,0040

Примечание. Слева от наклонной черты приведено число узлов по пространству на одну длину волны, справа – число узлов по интервалу времени, за которое волна пройдет в вакууме расстояние  $\lambda$ .

ностей, что свидетельствует о несовершенстве аналитического задания падающей волны в рамках методики TF/SF.

Отказ от наложения поглощающих слоев позволил наблюдать всплеск значений модуля комплексной напряженности электрического поля вне  $R$ , где поля быть не должно. Причиной этого (как и в [8]) является временная задержка, требующаяся волне, излученной на левой границе раздела полей, для достижения правой границы. В течение этой задержки излучаемая правой границей волна распространяется по направлению  $Z$ . Далее волны от границ раздела интерферируют и взаимно гасят друг друга справа от отрезка  $k = k_R, j_T \leq j \leq j_B$ . Следовательно, классическая постановка (4)–(11) из [4] не соответствует методике TF/SF, для реализации которой эти уравнения записывались.

За решение указанной проблемы нельзя принять задание временной задержки искусственно. В более сложном случае, когда в области  $R$  находится оптический элемент, аналитический расчет временной задержки затруднителен. По сути, результат такого расчета является частью решения задачи дифракции на рассеивателе, для решения которой он предназначался.

**2. Численное задание падающей волны в рамках методики TF/SF для области, ограниченной однородной средой.** Совершенствуя методику формирования падающей волны, авторы работы [5] обращаются к ее численному заданию. Одновременно с двумерной задачей (1)–(11) решают одномерную, характеризующуюся источником (12). После вычислений по (1)–(3) в (4)–(11) подставляются не аналитически рассчитанные, а найденные численно во вспомогательной одномерной задаче компоненты падающего электромагнитного поля. Как отмечено в [5], это приводит к компенсации численных погрешностей. Исследования, проведенные в [8], позволяют говорить о компенсации погрешности задания фазового сдвига между компонентами падающего поля на границах области  $R$ .

Более того, в одномерной задаче излучение появляется в области исключительно из узла  $k_{L-1}$ , достигая  $k_R$  через определенный временной интер-

Учитывая это, обратимся к одномерному случаю, тем более что распространение  $T$ -волны в вакууме таковым и является. Исключим из рассмотрения уравнение (2), а в (1) и (3) компоненту  $H_z$  обнулим. При постановке второй серии экспериментов вместо (4)–(11) воспользуемся «жестким» источником [1]

$$E_{k_{L-1}}^m = \sin\left(2\pi \frac{h_t c m}{\lambda}\right), \quad (12)$$

где  $c$  – скорость плоской электромагнитной волны. Найденные погрешности (см. табл. 1) возникают исключительно за счет замены производных разностными отношениями в силу точности задания (12). Погрешности первой серии экспериментов значительно выше (не менее чем на порядок) данных погреш-

вал. В силу этого справа от  $k_R$  в двумерной задаче будет формироваться только рассеянное поле, как это и предусмотрено методикой TF/SF.

Погрешности моделирования с численным заданием падающей волны (третья серия экспериментов) в двумерном случае точно совпадут с результатами второй серии. Следовательно, такое задание не вносит дополнительных неточностей в отличие от аналитического [4].

В вычислительной практике к перечисленным погрешностям добавляются новые, например неточности задания функции  $\epsilon_{jk}$ , возникающие при наложении сеточной области на оптический элемент. Исследуя их влияние, рассмотрим задачу дифракции  $H$ -волны на бесконечном диэлектрическом цилиндре круглого сечения (такая задача имеет аналитическое решение [10]).

В центр области  $R$  поместим бесконечный по оси  $X$  цилиндр с показателем преломления  $n = 1,5$  (оптическое стекло) и диаметром 1 мкм. Параметры сеточной области оставим без изменения. Результаты четвертой и пятой серий экспериментов с аналитически и численно заданной падающей волной (табл. 2) подтверждают предположения о появлении дополнительной погрешности и о превосходстве численного задания над аналитическим.

**3. Численное задание падающей волны в рамках методики TF/SF для области, ограниченной неоднородной средой.** Особый интерес представляет моделирование работы оптического элемента, сформированного на границе раздела сред. В этом случае заключение области  $R$  в однородную оболочку невозможно. Следовательно, лишено смысла численное задание падающей волны из [5], предполагающее наличие однородной среды вокруг рассеивателя. В работе [8] для одномерного случая эффективным оказался прием задания падающей волны посредством двух вспомогательных одномерных задач: первой в однородном пространстве, заполненном средой, находящейся перед оптическим элементом, и второй тоже в однородном пространстве, но заполненном средой за оптическим элементом.

Распространяя предложенную методику на двумерный случай, будем говорить об одной двумерной задаче (1)–(11) и двух вспомогательных одномерных: первой задаче для среды, расположенной перед оптическим элементом (пусть с показателем преломления  $n = 1,5$ ) с «жестким» источником в узле  $k_{L-1}$ , и второй для среды после элемента (например, для свободного пространства) с источником в узле  $k_{L-1-\lambda(n-1)}$ , если граница раздела сред делит область  $D$  пополам. Слагаемое  $\lambda(n-1)$  обеспечивает набег фазы на границе раздела сред с учетом того, что расстояние от левой границы раздела полей

Т а б л и ц а 2

Параметры дискретизации	Номер серии экспериментов		
	4	5	10
10/20	15,3765	12,9567	15,59750
20/40	7,7004	7,1040	6,33930
50/100	2,9888	2,1898	1,92480
100/200	1,5121	0,8807	0,75204

Т а б л и ц а 3

Параметры дискретизации	Номер серии экспериментов		
	6	7	8
10/20	13,9267	12,3299	4,3870
20/40	4,3193	3,8751	0,9745
50/100	1,4352	1,3202	0,1515
100/200	1,2614	1,1947	0,0383

до границы раздела сред полагается равным  $\lambda$ . Численно найденные в первой задаче значения напряженностей полей падающей волны подставляются в формулы (4), (6); во второй задаче – в формулы (5), (7). Второе слагаемое в правых частях (8)–(11) формируется посредством обеих вспомогательных задач: до границы раздела сред – первой задачей, далее – второй.

Сравнивая результаты шестой (с аналитически заданной) и седьмой (с численно заданной падающей волной) серий экспериментов по прохождению  $T$ -волны через плоскую границу раздела диэлектрик–среда (табл. 3) убедимся в преимуществе новой численной методики формирования падающей волны.

Вместе с тем обе серии экспериментов характеризуются высокими значениями погрешностей по сравнению со случаем свободного пространства (см. табл. 1, вторая серия экспериментов). По мнению авторов, это объясняется аналитическим расчетом разности фаз на границе раздела сред (слагаемое  $\lambda(n-1)$ ), что делает предложенный выше метод не вполне численным. Автоматической компенсации погрешности определения разности фаз между узлами сеточной области на границе раздела сред не происходит.

**4. Численное задание падающей волны в рамках методики TF/RF (Total-Field/Reflected-Field).** Совершенство задание падающей волны, обратимся к методике TF/RF [1], использовавшейся для исследования волноводов. Применение TF/RF основано на разделении отраженного и результирующего полей одной плоскостью и в отличие от TF/SF не предусматривает заключения оптического элемента в оболочку. В представлении (4)–(10) сохраняются выражения (4) и (6), в которых теперь  $1 \leq j \leq J-1$ ; остальные преобразования излишни. Разделяющая плоскость перпендикулярна  $OXY$  и проходит через отрезок, соединяющий узлы  $k_L$ ,  $1 \leq j \leq -1$ . Результирующее поле окажется справа от этого отрезка (включая сам отрезок), отраженное – слева. Следовательно, для численного задания падающей волны в рамках методики TF/RF довольно одной вспомогательной одномерной задачи.

В традиционной постановке TF/RF [1] предполагается равенство нулю напряженностей компонент падающего электромагнитного поля на верхней и нижней границе  $D$  при  $k = k_L$  (канализуемые моды волновода), что позволяет соответствовать поставленному в разд. 1 граничному условию. Однако, переходя к общему случаю, когда исследованию подлежат не только волноводы, необходимо предусмотреть падение на оптический элемент плоской однородной волны (граничное условие не выполняется), столь популярной в оптике.

Решая эту задачу, наложим на  $D$  циклическую сеточную область  $\tilde{D}_h$ , в которой проекция  $E_{x_j,k}^m$  определена в узлах  $\{(t_m, y_j, z_k): t_m = mh_t, m=0,1,\dots, M=T/h_t, y_j = jh_y, j=0,\dots, J=L_y/h_y - 1, z_k = kh_z, k=0,\dots, K=L_z/h_z\}$ ,  $H_{y_j,k+0,5}^{m+0,5}$  – в узлах  $\{(t_{m+0,5}, y_j, z_{k+0,5}): t_{m+0,5} = (m+0,5)h_t, m=0,1,\dots, M-1, y_j = jh_y, j=0,\dots, J, z_{k+0,5} = (k+0,5)h_z, k=0,\dots, K-1\}$  и  $H_{z_{j+0,5,k}}^{m+0,5}$  – в узлах  $\{(t_{m+0,5}, y_{j+0,5}, z_k): t_{m+0,5} = (m+0,5)h_t, m=0,1,\dots, M-1, y_{j+0,5} = (j+0,5)h_y, j=0,\dots, J, z_k = kh_z, k=1,\dots, K-1\}$ .

Вместо краевых условий первого рода при  $y=0, y=L_y$  для  $0 \leq z \leq L_z$  формируются циклические условия, основанные на модификации выражений (2), (3) на данной границе:

$$\mu_0 \mu_{j,k} \frac{H_{z_{j+0,5,k}}^{m+0,5} - H_{z_{j+0,5,k}}^{m-0,5}}{h_t} = \frac{E_{x_{0,k}}^m - E_{x_{j,k}}^m}{h_y},$$

$$\varepsilon_0 \varepsilon_{j,k} \frac{E_{x_{0,k}}^{m+1} - E_{x_{0,k}}^m}{h_t} = \frac{H_{z_{0,5k}}^{m+0,5} - H_{z_{j+0,5,k}}^{m+0,5}}{h_y} - \frac{H_{y_{0,k+0,5}}^{m+0,5} - H_{z_{0,k-0,5}}^{m+0,5}}{h_z},$$

принятые при исследовании дифракционных решеток [1].

Тогда в случае падения  $T$ -волны на плоскую границу раздела сред результаты восьмой серии экспериментов с применением численного задания падающей волны на основе методики TF/RF превзойдут по точности результаты шестой и седьмой серий (см. табл. 3). Моделирование дифракции  $H$ -волны на бесконечном диэлектрическом цилиндре круглого сечения (девятая серия) приводит к тем же результатам, которые были получены в пятой серии экспериментов при численном задании падающей волны в рамках TF/SF (см. табл. 2), т. е. методика TF/RF при исследовании оптических элементов, заключенных в однородную оболочку, позволяет получить результаты, не уступающие по точности методике TF/SF и превосходящие ее для случая неоднородной оболочки. В отличие от TF/SF использование TF/RF не предусматривает задание падающего поля (численно или аналитически) непосредственно на границе раздела и, следовательно, не характеризуется погрешностями, связанными с этим заданием.

Большой интерес представляет тестирование на примере ограниченного неперiodического оптического элемента с использованием поглощающих слоев. Увеличение линейных размеров области  $D$  с целью недопущения переотраженных от границ волн в прямоугольник  $R$  приводит к многократному росту вычислительной сложности и весьма нежелательно. В вычислительной практике приходится мириться с погрешностями, вызванными наложением поглощающих слоев ради сокращения длительности вычислений.

Если в случае применения методики TF/SF способ размещения поглощающих слоев в вычислительной области известен из [1, 3, 5, 6], то схема наложения таких слоев на циклическую сеточную область при исследовании ограниченного оптического элемента для TF/RF в известной авторам литературе не приводится. Действительно, циклическая сеточная область, необходимая для задания плоской однородной волны в методике TF/RF, ранее ис-



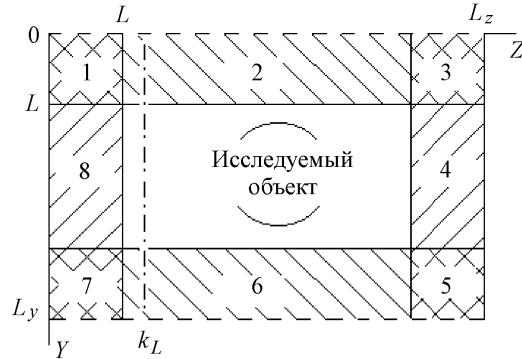


Рис. 2. Вычислительная область с поглощающими слоями и разделением полей на основе методики TF/RF. Пунктирной линией на краю области обозначены циклические граничные условия, непрерывной – условия Дирихле. Штрихпунктирная линия разделяет результирующее и отраженное поля

пользовалась только для анализа работы бесконечных дифракционных решеток.

Представленное на рис. 2 размещение поглощающих слоев позволяет изолировать соседние периоды таким образом, что волны, распространяющиеся вдоль направления  $Z$ , не поглощаются. В традиционной постановке [1] на циклическую область слои 2, 6 не накладываются.

В поглощающих слоях уравнения (1)–(3) разностной схемы запишем в виде

$$\begin{aligned}
 -\mu_0 \mu_{j,k} \frac{H_{y_{j,k+0,5}}^{m+0,5} - H_{y_{j,k+0,5}}^{m-0,5}}{h_t} - \sigma_z^* H_{y_{j,k+0,5}}^{m-0,5} &= \frac{E_{xy_{j,k+1}}^m + E_{xz_{j,k+1}}^m - E_{xy_{j,k}}^m - E_{xz_{j,k}}^m}{h_z}, \\
 \mu_0 \mu_{j,k} \frac{H_{z_{j+0,5,k}}^{m+0,5} - H_{z_{j+0,5,k}}^{m-0,5}}{h_t} + \sigma_y^* H_{y_{j,k+0,5}}^{m-0,5} &= \frac{E_{xy_{j+1,k}}^m + E_{xz_{j+1,k}}^m - E_{xy_{j,k}}^m - E_{xz_{j,k}}^m}{h_y}, \\
 \varepsilon_0 \varepsilon_{j,k} \frac{E_{xy_{j,k}}^{m+1} - E_{xy_{j,k}}^m}{h_t} + \sigma_y E_{xy_{j,k}}^m &= \frac{H_{z_{j+0,5,k}}^{m+0,5} - H_{z_{j-0,5,k}}^{m+0,5}}{h_y}, \\
 \varepsilon_0 \varepsilon_{j,k} \frac{E_{xz_{j,k}}^{m+1} - E_{xz_{j,k}}^m}{h_t} + \sigma_z E_{xz_{j,k}}^m &= -\frac{H_{y_{j,k+0,5}}^{m+0,5} - H_{y_{j,k-0,5}}^{m+0,5}}{h_z},
 \end{aligned}$$

где  $E_{x_{j,k}}^m = E_{xy_{j,k}}^m + E_{xz_{j,k}}^m$  – расщепление электрической составляющей поля на две компоненты. Электрическая и магнитная проводимости  $\sigma$  и  $\sigma^*$  связаны условием равенства импеданса поглощающего слоя и импеданса вакуума:  $\sigma/\sigma^* = \varepsilon_0/\mu_0$  для любой проекции. В подобластях 2 и 6 (см. рис. 2) отличны от нуля компоненты  $\sigma_y$  и  $\sigma_y^*$  (обеспечивается затухание волны, распростра-

няющейся по направлению  $y$ ), в подобластях 4 и 8 – компоненты  $\sigma_z$  и  $\sigma_z^*$  (обеспечивается затухание волны, распространяющейся по направлению  $z$ ), а в 1, 3, 5 и 7 отличны от нуля обе проекции  $\sigma$  и  $\sigma^*$  (обеспечивается затухание волны, распространяющейся по любому направлению).

Говоря о слоях, поглощающих по направлениям  $z$  и  $-z$ , положим, как это принято [3],  $\sigma_z = \sigma_{\max} (l/L)^q$  ( $0 \leq l \leq L$ ,  $q \in R$ ,  $L$  – ширина слоя) для слоя при границе  $z = L_z$  и  $\sigma_z = \sigma_{\max} (1 - (l/L))^q$  для слоя при границе  $z = 0$ . Аналогичен

результат для слоев, поглощающих по направлениям  $y$  и  $-y$ .

В новой, десятой, серии экспериментов ограничим вычислительную область четырьмя длинами волн по обоим направлениям ( $L_y = L_z = 4\lambda$ ), из которых две длины волны приходится на сторону подобласти  $R$  и по одной длине – на два поглощающих слоя ( $L = \lambda$ , значения параметров поглощающих слоев  $q$  и  $\sigma_{\max}$  представлены в табл. 4). В центре  $R$  расположим диэлектрический цилиндр, как в предыдущей серии экспериментов.

Результаты моделирования (см. табл. 2, десятая серия) подтверждают предположение о внесении поглощающими слоями дополнительной погрешности, которая, впрочем, в большинстве экспериментов частично компенсирует остальные погрешности: погрешности замены производных разностными отношениями и наложения декартовой сеточной области на круглое сечение диэлектрического цилиндра.

**Заключение.** Разработан способ формирования падающей волны в рамках методики TF/RF разностного решения уравнений Максвелла при исследовании дифракции в области, заключенной в неоднородную оболочку. Предложенный подход превосходит по точности известные аналоги, использующие методику TF/SF (как аналитическую, так и численную). Представляется перспективным применение разработанной математической модели, основанной на разностной записи уравнений Максвелла и предложенной методике формирования падающей волны, для исследования дифракционных оптических элементов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Taflove A., Hagness S.** Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method. Boston: Artech House Publishers, 2000.
2. **Yee K. S.** Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media // IEEE Trans. Antennas Propag. 1966. **AP-14**. P. 302.
3. **Berenger J.-P.** A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves // Journ. Comput. Phys. 1994. N 114. P. 185.
4. **Umashankar K. R., Taflove A.** A novel method to analyze electromagnetic scattering of complex objects // IEEE Trans. Electromagn. Compatib. 1982. **24**, N 4. P. 397.
5. **Prather D. W., Shi S.** Formulation and application of the finite-difference time-domain method for the analysis of axially symmetric diffractive optical elements // JOSA A. 1999. **16**, N 5. P. 1131.

Т а б л и ц а 4

Параметры дискретизации	$\sigma_{\max}$ , См/м	$q$
10/20	0,0211	3
20/40	0,0297	4
50/100	0,0414	5
100/200	0,0519	6

6. **Jiang J., Nordin G. P.** A rigorous unidirectional method for designing finite aperture diffractive optical elements // Opt. Express. 2000. 7, N 6. P. 237.
7. **Головашкин Д. Л., Казанский Н. Л.** Декомпозиция сеточной области при разностном решении уравнений Максвелла // Матем. моделирование. 2007. 19, № 2. С. 48.
8. **Головашкин Д. Л., Казанский Н. Л.** Методика формирования падающей волны при разностном решении уравнений Максвелла. Одномерный случай // Автометрия. 2006. 42, № 6. С. 78.
9. **Никольский В. В., Никольская Т. И.** Электродинамика и распространение радиоволн: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1989.
10. **Ильинский А. С., Кравцов В. В., Свешников А. Г.** Математические модели электродинамики. М.: Высш. шк., 1991.

*Поступила в редакцию 2 октября 2006 г.*

---