УДК 532.516 + 538.4

О СПОНТАННОЙ ЗАКРУТКЕ В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ МГД-ТЕЧЕНИЯХ С ЗАМКНУТЫМИ ЛИНИЯМИ ТОКА ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

М. С. Котельникова, Б. А. Луговцов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: kotelnikova@hydro.nsc.ru

В линейной постановке численно определяется область неустойчивости вязкого МГД-вихря Хилла — Шафранова по отношению к азимутальным осесимметричным возмущениям поля скорости в зависимости от числа Рейнольдса и замагниченности. Рассматривается приближенная постановка задачи линейной устойчивости для МГД-течений с круговыми линиями тока. Дальнейшая эволюция возмущений в закритической области исследована на основе нелинейной аналоговой модели (упрощенная исходная система уравнений, учитывающая некоторые существенные свойства исходных уравнений). Для этой модели определены вторичные течения, возникающие в результате потери устойчивости.

Ключевые слова: осесимметричный МГД-вихрь, устойчивость, численный расчет, спонтанная закрутка.

Введение. Пусть имеется стационарное осесимметричное (полоидальное) течение вязкой жидкости в ограниченной осесимметричной области, поддерживаемое полем массовых сил (осесимметричным, полоидальным) и (или) движущимися (соответствующим образом) границами, на которых выполняется условие прилипания. В цилиндрических координатах

$$\boldsymbol{r} = (z, r, \varphi), \qquad \boldsymbol{v}_0(z, r) = (w_0(z, r), u_0(z, r), 0).$$

В этот поток вносятся малые осесимметричные возмущения (в общем случае произвольные) с отличной от нуля азимутальной ($v_\varphi = v$) составляющей скорости. Поле массовых сил и граничные условия не возмущаются. Если возмущения затухают или их амплитуда не увеличивается, то течение устойчиво и закрутки не возникает. В случае неустойчивости возмущения нарастают. Если в результате эволюции начальных возмущений в силу точных нелинейных уравнений вырабатывается течение (стационарное, периодическое, нестационарное беспорядочное, турбулентное), в котором средняя азимутальная составляющая скорости конечна:

$$\langle v_\varphi \rangle = \int\limits_0^{2\pi} v_\varphi(t, r, z, \varphi)\, d\varphi \neq 0,$$

а энергия вращательного движения вокруг оси симметрии сравнима с энергией исходного полоидального течения, то будем говорить о возникновении спонтанной закрутки.

Впервые проблема спонтанной закрутки сформулирована в работе [1] следующим образом: может ли возникать вращательно-симметричное течение при отсутствии явных внешних источников вращения, т. е. в условиях, когда осесимметричное движение без вращения заведомо возможно?

В настоящее время существует, по крайней мере, две точки зрения о возникновении спонтанной закрутки. Одна из них описана выше, а вторая заключается в следующем. Рассматриваются автомодельные осесимметричные (конические) течения вида $\boldsymbol{v} = (v_r, v_\theta, v_\varphi) = (f_r(\theta)/r, f_\theta(\theta)/r, f_\varphi(\theta)/r)$ или частично инвариантные течения кармановского типа $\boldsymbol{v} = (v_r, v_z, v_\varphi) = (rg_r(z), g_z(z), rg_\varphi(z))$. Для функций $f(\theta)$ в первом случае и $g(z)$ во втором получаются обыкновенные дифференциальные уравнения, которые при малых числах Рейнольдса имеют решения только с полоидальными компонентами; при числах Рейнольдса, превышающих некоторое критическое значение, появляются решения с $v_\varphi \neq 0$ [2]. Этот математический факт трактуется как возникновение спонтанной закрутки или “самовращение”. Однако очевидно, что в рассматриваемых течениях циркуляция скорости $\Gamma = rv_\varphi$ не обращается в нуль на бесконечности, и, следовательно, имеется поток момента импульса, который является внешним источником вращения, что противоречит исходной постановке задачи о спонтанной закрутке.

Приведем простой пример возникновения такого “самовращения”. Рассмотрим радиальный сток жидкости, покоящейся на бесконечности, через пористую стенку кругового цилиндра r_0 (плоская задача). Пусть радиальная скорость жидкости $v_r = -q(r/r_0)$ и при $r = r_0$ $v_\varphi = 0$. Тогда для циркуляции азимутальной компоненты скорости $\Gamma = rv_\varphi$ в стационарном течении имеем уравнение

$$\Gamma_{rr} = (1 - \mathrm{Re})\Gamma_r/r,$$

где $\mathrm{Re} = qr_0/\nu$ — число Рейнольдса; ν — вязкость. Общее решение этого уравнения есть $\Gamma = Ar^{2-\mathrm{Re}} + B$ ($\mathrm{Re} \neq 1$). Отсюда следует, что при $\mathrm{Re} < 2$ ограниченное на бесконечности течение возможно только при $A = B = 0$, т. е. в отсутствие вращения. В то же время при $\mathrm{Re} > 2$ имеем

$$v_\varphi = \Gamma_0(1 - (r_0/r)^{\mathrm{Re}-1})/r$$

(Γ_0 — константа), что соответствует течению с вращением, причем жидкость на бесконечности покоится и при $r = r_0$ выполнено условие прилипания. Однако если потребовать равенства нулю циркуляции скорости на бесконечности (т. е. исключить втекание момента импульса), то вращение будет отсутствовать. Такое расширенное толкование понятия спонтанной закрутки представляется неправомерным. В дальнейшем этот термин используется только в первоначальном смысле.

Простейшим примером закрутки потока может служить возникновение стокового вихря [3]. В этом случае механизм, порождающий вращательное движение, так же как при возникновении интенсивных мезомасштабных атмосферных вихрей (пылевых столбов, смерчей, торнадо), до конца не выяснен. Не исключено, что спонтанная закрутка играет существенную роль в этом механизме. Обсуждению проблемы спонтанной закрутки посвящены работы [1, 4], в которых приведены примеры приближенных решений, описывающих данное явление. Однако в этих примерах в рассматриваемую область втекает вращающаяся жидкость, что позволяет усомниться в отсутствии явных источников вращения.

Более жесткая формулировка указанной проблемы приведена в [5, 6]. Предложенная в этих работах постановка обеспечивает строгий контроль кинематического потока осевой составляющей момента импульса, исключающий втекание вращающейся жидкости в область течения. В [7] в случае МГД-течений показана необходимость контроля потока осевой компоненты момента импульса, переносимого магнитным полем, и предложена постановка, исключающая втекание указанной компоненты импульса. В вязкой жидкости возникновение вращательного течения рассматривается как бифуркация исходного осесимметричного течения к стационарному течению с закруткой в результате потери устойчивости [1], т. е. в этом случае стационарная задача при фиксированных граничных условиях имеет, по крайней мере, два решения: без вращения и с закруткой. В общем случае возникающие вторичные течения с закруткой могут быть и нестационарными (периодические и нерегулярные автоколебания, хаотическое и турбулентное течения).

Для невязких течений такая постановка не имеет смысла. В этом случае в ограниченной области имеется множество осесимметричных течений (без закрутки) и вращательно-симметричных течений (с закруткой). Поэтому возникновение спонтанной закрутки рассматривается как неустойчивость исходного осесимметричного течения, вследствие которой растет амплитуда азимутальной составляющей скорости и увеличивается кинетическая энергия вращательного движения за счет энергии полоидальных компонент (в точной нелинейной постановке их сумма остается постоянной в силу закона сохранения энергии). В результате возникает течение с конечной энергией вращательного движения.

Отметим, что появление закрутки не нарушает закон сохранения момента импульса. В невязкой жидкости возникает дифференциальное вращение, сохраняющее момент импульса, а в вязкой жидкости при условии прилипания на границах области течения момент импульса не обязан сохраняться и может появляться вращательное течение типа стокового вихря.

Трудности, возникающие при изучении трехмерных течений, побуждают к поиску наиболее простых ситуаций, в которых рассматриваемое явление возможно. В связи с этим проведены исследования устойчивости к закрутке некоторых стационарных осесимметричных течений при наложении вращательно-симметричных возмущений.

В [5, 6] показано, что бифуркация осесимметричного течения — появление вращательно-симметричного течения — отсутствует в случае произвольной сжимаемой жидкости с переменным коэффициентом вязкости. В [7] для осесимметричных течений вязкой несжимаемой жидкости с конечной проводимостью в магнитном поле показано, что вращательно-симметричная спонтанная закрутка невозможна, если сечение области течения меридиональной плоскостью является односвязным. В таких областях полоидальные компоненты магнитного поля исчезают со временем из-за конечной проводимости.

Для идеально проводящей жидкости характер связности области течения не имеет значения, так как в осесимметричных течениях такой жидкости полоидальные компоненты магнитного поля из-за вмороженности не исчезают и, как показано в [8, 9], при определенных условиях имеют место неустойчивость к начальной закрутке и экспоненциальный или (при некоторых условиях) линейный рост азимутальных возмущений со временем.

Вопросы о неустойчивости в вязкой задаче в линейном приближении, влиянии нелинейности и характере (структуре) возникающего вторичного течения (вязкого и невязкого) остаются открытыми. В данной работе предпринята попытка решения этих вопросов на основе изучения линейной устойчивости осесимметричного вязкого течения типа вихря Хилла — Шафранова и аналоговых моделей осесимметричных МГД-течений с замкнутыми линиями тока.

1. Линейная вязкая неустойчивость осесимметричного МГД-течения. В общепринятых обозначениях течения идеально проводящей вязкой несжимаемой жидкости в магнитном поле описываются следующей системой уравнений (плотность жидкости $\rho = 1$):

$$\boldsymbol{v}_t - \boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v} + \boldsymbol{h} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{h} = \boldsymbol{F} + \nu\Delta\boldsymbol{v} - \nabla(p + \boldsymbol{v}^2/2); \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0; \tag{1.2}$$

$$\boldsymbol{h}_t = \operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{h}); \tag{1.3}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{h} = 0. \tag{1.4}$$

Здесь $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{H}/\sqrt{4\pi}$; $\boldsymbol{F} = (F_z, F_r, 0)$ — полоидальное поле внешних массовых сил.

Полоидальные компоненты скорости $\boldsymbol{v} = (u, v, w)$, $\boldsymbol{h} = (h_1, h, h_3)$ стационарных вращательно-симметричных течений жидкости рассматриваемого типа в цилиндрической системе координат $\boldsymbol{r} = (r, \varphi, z)$ в общем случае, используя (1.2), (1.4), можно описать соотношениями

$$u = -\frac{\gamma(\psi)}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \qquad w = \frac{\gamma(\psi)}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \qquad h_1 = -\frac{\varepsilon(\psi)}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \qquad h_3 = \frac{\varepsilon(\psi)}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r},$$

где $\gamma(\psi)$, $\varepsilon(\psi)$ — произвольные зависимости от функции тока ψ. Далее рассматриваются течения, в которых функции $\gamma(\psi)$, $\varepsilon(\psi)$ постоянны, поэтому одну из них без ограничения общности можно положить равной единице. Пусть $\gamma = 1$. Тогда ε приобретает смысл коэффициента пропорциональности магнитного поля и полоидальных компонент скорости $\boldsymbol{h}_p = \varepsilon\boldsymbol{v}_p$ в исходном течении. Величину ε далее будем называть замагниченностью.

Рассматривается ряд задач об устойчивости стационарного осесимметричного течения ($v = 0$, $h = 0$) по отношению к закрутке (возникновению вращательно-симметричного течения $v \neq 0$). Эволюция азимутальных составляющих скорости v и магнитного поля h в линейном приближении не связана с эволюцией возмущений полоидальных компонент и может изучаться независимо. Из (1.1), (1.3) находим, что в цилиндрической системе координат v и h удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered} v_t + u(v - \varepsilon h)_r + w(v - \varepsilon h)_z + \frac{u}{r}(v - \varepsilon h) = \nu\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial(rv)}{\partial r}\Big)\Big), \\ h_t + u(h - \varepsilon v)_r + w(h - \varepsilon v)_z - (u/r)(h - \varepsilon v) = 0. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Поскольку рассматриваются течения в ограниченной области, отсутствует необходимость “сшивания” внутреннего течения с внешним. В результате появляется больше возможностей для получения широкого класса точных аналитических решений, описывающих исходные течения. Более того, источник основного (исходного) полоидального течения в задаче спонтанной закрутки не столь важен, поэтому для описания исходного осесимметричного потока в качестве функции тока можно использовать практически любую достаточно регулярную функцию $\psi(r, z)$, принимающую постоянные значения на замкнутых линиях в меридиональной плоскости (r, z). Любая такая линия может быть выбрана в качестве границы торообразной области. При наличии соответствующих массовых сил и движения границ любое определенное таким образом течение можно рассматривать как точное стационарное осесимметричное решение МГД-уравнений Навье — Стокса.

Изучение устойчивости таких течений как аналитическими, так и численными методами связано со значительными трудностями. Поэтому для выяснения основных закономерностей в задаче о возникновении закрутки в течениях с замкнутыми линиями тока наряду с исследованием задачи для вихря Хилла — Шафранова в точной (линейной) постановке проведены также исследования устойчивости для течений, являющихся точными стационарными решениями в указанном выше смысле, в приближенной постановке (узкий зазор в течении с круговыми линиями тока).

2. Вихрь Хилла — Шафранова. В качестве исходного течения рассмотрим вихрь Хилла — Шафранова. В сферической системе координат для полоидальных компонент скорости имеем

$$\Psi = (1/2)r^2(1 - r^2)\sin^2\theta, \qquad V_{0r} = (1 - r^2)\cos\theta, \qquad V_{0\theta} = (2r^2 - 1)\sin\theta. \tag{2.1}$$

Стационарное течение (2.1) является точным решением уравнений Навье — Стокса и поддерживается соответствующим движением сферической границы. Для азимутальных компонент скорости и магнитного поля система (1.5) принимает вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (1-r^2)\cos\theta(v-\varepsilon h)_r + \frac{(2r^2-1)\sin\theta}{r}\,(v-\varepsilon h)_\theta + r\cos\theta(v-\varepsilon h) = \frac{1}{\mathrm{Re}}\,D^2 v,$$
$$\frac{\partial h}{\partial t} + (1-r^2)\cos\theta(h-\varepsilon v)_r + \frac{(2r^2-1)\sin\theta}{r}\,(h-\varepsilon v)_\theta - r\cos\theta(h-\varepsilon v) = 0, \qquad (2.2)$$
$$D^2 v = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{\partial\,(rv)}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial\,(v\sin\theta)}{\partial\theta}\Big).$$

Искомые функции представим в виде разложения, в котором радиальная зависимость выбрана таким образом, чтобы она удовлетворяла граничным условиям $v(0,\theta) = v(1,\theta) = 0$ и $h(0,\theta) = 0$. На оси z должно выполняться условие регулярности (равенство нулю азимутальных компонент скорости и магнитного поля):

$$\begin{gathered} v(t,r,\theta) = \sum_n v_n(t,r)P^{(1)}_{2n-1}(\cos\theta) = \sum_n\sum_m v_{m,n}\sin(2\pi mr)P^{(1)}_{2n-1}(\cos\theta)\,\mathrm{e}^{i\lambda t}, \\ h(t,r,\theta) = \sum_n h_n(t,r)P^{(1)}_{2n-1}(\cos\theta) = \sum_n\sum_m h_{m,n}r\cos(2\pi mr)P^{(1)}_{2n-1}(\cos\theta)\,\mathrm{e}^{i\lambda t}\,. \end{gathered} \qquad (2.3)$$

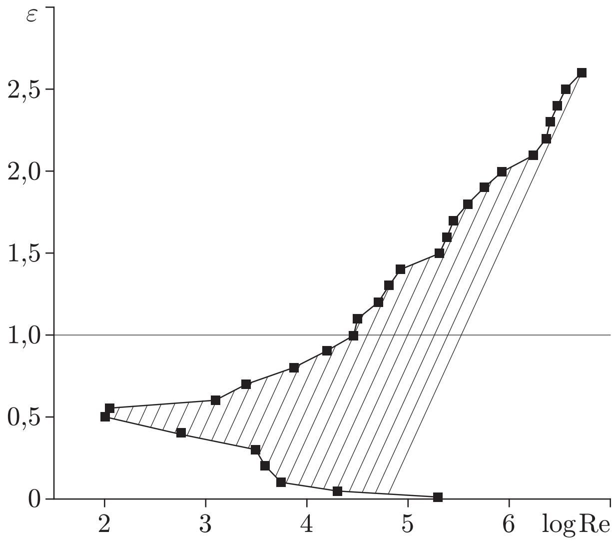
Здесь $P^{(1)}_{2n-1}(\cos\theta)$ — присоединенные полиномы Лежандра первой степени нечетного порядка. Выбор полиномов Лежандра нечетного порядка в качестве пробных функций обусловлен тем, что они обеспечивают регулярность на оси симметрии, а также тем, что действие оператора D^2 на эти функции дает достаточно простой результат в силу соответствующих рекурсивных соотношений:

$$D^2 f(r)P^{(1)}_l(\cos\theta) = \Big(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\,\frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2}\Big)f(r)P^{(1)}_l(\cos\theta).$$

Для определения критических значений параметра ε и числа Рейнольдса Re, при превышении которых течение становится неустойчивым по отношению к закрутке, формулируется задача на собственные значения $\lambda = \lambda(\varepsilon, \mathrm{Re})$. Подставив разложения (2.3) в уравнения (2.2) и используя процедуру Галеркина, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных амплитуд. Для получения приближенного численного решения все амплитуды v_{mn}, h_{mn}, индексы которых удовлетворяют неравенству $2(n+m) > 2N_* + 3$, отбрасываются. В результате получаем систему алгебраических уравнений вида

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x},$$

где $\boldsymbol{x}$ — одномерный комплексный вектор, составленный из искомых амплитуд; A — комплексная матрица. Вычисление собственных значений, т. е. решение системы уравнений $\mathrm{Real}\,(\det(A-\lambda I)) = 0$, $\mathrm{Imag}\,(\det(A-\lambda I)) = 0$ находилось модифицированным методом Пауэлла с конечно-разностным якобианом [10]. В результате получаем функциональную зависимость собственного числа от числа Рейнольдса. Для определения критических значений последовательно фиксируется величина замагниченности ε и меняется число Рейнольдса Re, до тех пор пока в получаемом спектре минимальная мнимая часть не станет отрицательной, что означает неустойчивость исходного потока и экспоненциальный рост азимутальных возмущений. Расчеты проведены при $N_* = 20$. Результаты расчета представлены на рисунке в виде кривой, разделяющей области устойчивости и неустойчивости. Область неустойчивости заштрихована. Появление неустойчивости при $\varepsilon > 1$ достаточно неожиданно, так как для невязкой жидкости неустойчивость имеет место только при $0 < \varepsilon < 1$ [8]. Физический механизм этого явления (расширение области неустойчивости за счет влияния вязкости) пока неясен.



Граница неустойчивости

Для того чтобы сделать достаточно обоснованный вывод о возможности возникновения спонтанной закрутки, необходимо рассмотреть начальные возмущения, удовлетворяющие начальному условию $h = 0$ [7]. В отсутствие доказательства полноты собственных функций использование спектрального метода не позволяет сделать такой вывод. При указанном выше дополнительном условии область неустойчивости может существенно измениться (или даже исчезнуть), поэтому необходимы численные расчеты задачи с начальными условиями в закритической области, подтверждающие существование неустойчивости при превышении критического значения числа Рейнольдса. Это замечание справедливо и для неустойчивости в области $\varepsilon > 1$. В этой области критические значения числа Рейнольдса велики, и при проведении численных экспериментов возникают значительные вычислительные трудности.

3. Линейная устойчивость МГД-течения с круговыми линиями тока. Пусть функция тока имеет вид $\psi(z,r) = \psi(R)$, где $R = \sqrt{(r-r_0)^2 + z^2}$ — расстояние от круговой оси тора ($R < r_0$); r_0 — расстояние от оси z до общей круговой оси торов малого радиуса R. Такое течение можно рассматривать как точное стационарное решение МГД-уравнений Навье — Стокса в указанном выше смысле.

Введем “азимутальную” и “радиальную” (полоидальные) составляющие вектора скорости. В исходном течении

$$q(R,\theta) = w\cos\theta + u\sin\theta = -\frac{1}{r_0 - R\cos\theta}\,\frac{\partial\psi(R)}{\partial R},$$
$$p(R,\theta) = w\sin\theta - u\cos\theta = 0,$$

в магнитном поле

$$g(r,\theta) = h_3\cos\theta + h_1\sin\theta = -\frac{\varepsilon}{r_0 - R\cos\theta}\,\frac{\partial\psi(R)}{\partial R},$$
$$f(R,\theta) = h_3\sin\theta - h_1\cos\theta = 0.$$

В новых переменных (R,θ) система (1.5) имеет вид

$$v_t + \frac{q}{R}\,v_\theta + s(R,\theta)qv = \frac{g}{R}\,h_\theta + s(R,\theta)gv + \nu\Big(v_{RR} + \frac{1}{R}\,v_R + {}$$
$$+ \frac{1}{R^2}\,v_{\theta\theta} - \frac{\cos\theta}{r_0 - R\cos\theta}\,v_R + \frac{\sin\theta}{R(r_0 - R\cos\theta)}\,v_\theta - \frac{v}{(r_0 - R\cos\theta)^2}\Big); \qquad (3.1)$$

$$h_t + \frac{q}{R}\,h_\theta - s(R,\theta)qh = \frac{g}{R}\,v_\theta - s(R,\theta)gv; \tag{3.2}$$

$$s(r,\theta) = \frac{\sin\theta}{1 - r\cos\theta}, \qquad c(r,\theta) = \frac{\cos\theta}{1 - r\cos\theta}.$$

Рассматриваемое течение заключено между двумя линиями тока, соответствующими значениям $R = R_0$ и $R = R_1$. На решение системы (3.1), (3.2) накладываются граничные условия: периодичность функций v, h на линиях тока:

$$v(R,0) = v(R,2\pi), \qquad h(R,0) = h(R,2\pi)$$

и условие прилипания на границах рассматриваемой области:

$$v(R_0,\theta) = v(R_1,\theta) = 0.$$

На азимутальную компоненту магнитного поля h на границах области течения условие не ставится, и ее значение определяется из уравнения (3.2).

4. Приближение узкого зазора между граничными линиями тока. Рассмотрим случай, когда расстояние между граничными линиями тока мало, т. е. $R_1 - R_0 \ll R_0$ ($R_1 > R_0$). Положим $R = R_0(1 + ay/\pi)$, где $a = (R_1 - R_0)/R_0 \ll 1$, так чтобы переменная y менялась в промежутке $[0,\pi]$. Пусть $\psi(R) = -q_0 r_0 R$. С учетом малости расстояния между линиями тока в левой части уравнений (3.1), (3.2) положим $R = R_0$, а в правой части (3.1) оставим только вторую производную по R.

После сделанных упрощений решения (3.1), (3.2) будем искать в виде $v = v(\theta)\sin(my)$, $h = h(\theta)\sin(my)$. Такой вид решения автоматически удовлетворяет граничным условиям на линиях тока и позволяет свести систему к уравнениям, в которых искомые функции зависят только от переменных θ и t. В результате уравнения (3.1), (3.2) можно записать в безразмерном виде

$$\begin{gathered} v_t + \frac{1}{1 - k\cos\theta}\,(v - \varepsilon h)_\theta + \frac{k\sin\theta}{(1 - k\cos\theta)^2}\,(v - \varepsilon h) = -\frac{1}{\mathrm{Re}}\,v, \\ h_t + \frac{1}{1 - k\cos\theta}\,(h - \varepsilon v)_\theta - \frac{k\sin\theta}{(1 - k\cos\theta)^2}\,(h - \varepsilon v) = 0. \end{gathered} \tag{4.1}$$

Здесь R_0/q_0 — безразмерная единица времени; $k = R_0/r_0$; $\mathrm{Re} = a^2 q_0 R_0/(\nu\pi^2 m^2)$.

Начальное возмущение скорости, вносимое в исходное стационарное течение, имеет вид

$$v(0,\theta) = v_0 + v_1\sin\theta, \qquad h(0,\theta) = 0,$$

где v_0, v_1 — некоторые константы.

Решения системы (4.1) находились численно по начальным данным и условию периодичности: $v(0) = v(2\pi)$, $h(0) = h(2\pi)$. Критические кривые на плоскости $(\varepsilon, \mathrm{Re})$ при различных значениях k, разделяющие области устойчивости и неустойчивости по отношению к закрутке, аналогичны кривой, показанной на рисунке. Так же как и в случае вихря Хилла — Шафранова, имеет место неустойчивость в области $\varepsilon > 1$.

Для определения последующего развития возмущений и возникновения спонтанной закрутки необходимо исследование полной системы уравнений с учетом нелинейности в области неустойчивости на плоскости $(\varepsilon, \mathrm{Re})$. В точной постановке эта задача очень сложна и для ее решения требуется достаточно мощная вычислительная техника.

В данной работе исследуется аналоговая модель, описанная ниже. Проведены численные расчеты задачи с начальными условиями, показавшие, что в области неустойчивости возникают колебательное (для невязкой жидкости) и стационарное (для вязкой жидкости) вторичные течения с закруткой. В случае $\varepsilon = 1$ для невязкой жидкости получено точное решение. В случае малых, но конечных амплитуд для стационарного вторичного течения вязкой жидкости на границе устойчивости получено приближенное аналитическое решение.

5. Аналоговая модель. Рассмотрим следующую аналоговую модель спонтанной закрутки:

$$\begin{aligned} q_t + h^2 - v^2 &= f(x,y) + \nu q_{yy}, \\ v_t + v_x + qv &= \varepsilon(h_x + qh) + \nu v_{yy}, \\ h_t + h_x - qh &= \varepsilon(v_x - qv). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Эта система обладает рядом свойств, аналогичных свойствам исходной (точной) системы. В (5.1) функция $q(x,y,t)$ моделирует периодический полоидальный поток в зазоре $0 < y < \pi$; $f(x,y)$ — массовые силы, поддерживающие исходный полоидальный поток. Периодическое по x решение системы ищется в области $0 < x < 2\pi$, $0 < y < \pi$. На нижней и верхней границах условия ставятся в соответствии с рассматриваемой задачей. Для системы (5.1) при вязкости $\nu = 0$ имеет место закон сохранения энергии (аналог закона сохранения энергии в точной постановке).

Рассмотрим невязкую нелинейную задачу:

$$\begin{aligned} q_t + h^2 - v^2 &= 0, \\ v_t + v_x + qv &= \varepsilon(h_x + qh), \\ h_t + h_x - qh &= \varepsilon(v_x - qv). \end{aligned}$$

Эта система имеет стационарное решение $q = q_0(x)$, где $q_0(x)$ — произвольная периодическая функция: $q_0(x + 2\pi) = q_0(x)$. Пусть $\varepsilon = 1$ и при $t = 0$ $q(0,x) = q_0(x)$, $v(0,x) = v_0(x) = v_0(x + 2\pi)$, $h(0,x) = 0$. Положим $A = v + h$, $B = v - h$. Тогда (при $\varepsilon = 1$) получим систему уравнений

$$q_t = AB, \qquad A_t = -2qB, \qquad B_t = -2B_x$$

с начальными условиями $q(0,x) = q_0(x)$, $A(0,x) = v_0(x)$, $B(0,x) = v_0(x)$.

Если $v_0(x) = V_0 = \mathrm{const}$, то имеем

$$B = V_0, \qquad q_t = V_0 A, \qquad A_t = -2V_0 q.$$

С учетом начальных условий отсюда следует

$$\begin{aligned} A(t,x) = -\sqrt{2}\, q_0(x) \sin(\sqrt{2}\, V_0 t) + V_0 \cos(\sqrt{2}\, V_0 t), \qquad B(t,x) = V_0, \\ q(t,x) = q_0(x) \cos(\sqrt{2}\, V_0 t) + (V_0/\sqrt{2}\,) \sin(\sqrt{2}\, V_0 t). \end{aligned}$$

Для v и h получаем

$$\begin{aligned} v(x,t) &= -q_0(x) \sin(\sqrt{2}\, V_0 t)/\sqrt{2} + V_0(1 + \cos(\sqrt{2}\, V_0 t))/2, \\ h(x,t) &= -q_0(x) \sin(\sqrt{2}\, V_0 t)\sqrt{2} - V_0(1 - \cos(\sqrt{2}\, V_0 t))/2. \end{aligned}$$

В линейном приближении при тех же начальных условиях в результате неустойчивости функции v и h возрастают пропорционально времени t. В данном примере нелинейность приводит к возникновению колебательного вторичного “течения”, период которого тем больше, чем меньше начальная амплитуда возмущения, а амплитуда колебаний определяется интенсивностью исходного потока. Численное исследование этой задачи при $0 < \varepsilon < 1$ показывает, что неустойчивость приводит к возникновению нерегулярного по времени и пространственной координате колебательного режима с амплитудой, зависящей от амплитуды исходного течения и сравнимой с ней по величине. Такое же поведение возмущений можно ожидать и в точной постановке.

Рассмотрим аналоговую модель с учетом вязкости. Простейший пример такого "течения" можно построить, оставив только зависимость от координаты y ($0 \leqslant y \leqslant \pi$). Тогда система (5.1) упрощается:

$$q_t + (h^2 - v^2) = \nu q_{yy}; \tag{5.2}$$

$$v_t + q(v - \varepsilon h) = \nu v_{yy}; \tag{5.3}$$

$$h_t - q(h - \varepsilon v) = 0 \tag{5.4}$$

($1/\nu$ — аналог числа Рейнольдса). Система (5.2)–(5.4) имеет решение $q = q_0$, $v = h = 0$ (аналог стационарного течения без закрутки). Исследуем устойчивость этого решения в линейном приближении. Положим $q = q_0 + q'$. Тогда линейная система имеет вид

$$q'_t = \nu q'_{yy}; \tag{5.5}$$

$$v_t + q_0 v = \varepsilon q_0 h + \nu v_{yy}; \tag{5.6}$$

$$h_t - q_0 h = -\varepsilon q_0 v, \tag{5.7}$$

где q', v, h — малые по сравнению с q_0 величины. Течение рассматривается в области $0 \leqslant y \leqslant \pi$ с граничными условиями

$$y = 0: \qquad q'(0) = 0, \qquad v(0) = 0,$$

$$y = \pi: \qquad q'(\pi) = 0, \qquad v(\pi) = 0.$$

На функцию h граничные условия не ставятся, так как эти значения определяются уравнением (5.7).

Начальные условия:

$$t = 0: \qquad q'(0, y) = f_0(y), \qquad v(0, y) = v_0(y), \qquad h(0, y) = 0.$$

Из уравнения (5.5) следует, что q' стремится к нулю при любой функции $f_0(y)$. Для определения эволюции v и h в данном случае (в силу простоты уравнений) можно использовать метод разделения переменных.

Будем искать решение в виде сумм слагаемых:

$$v_n(t, y) = V_n(t) \sin(ny), \qquad h_n(t, y) = H_n(t) \sin(ny).$$

Для определения $V_n(t)$ и $H_n(t)$ получаем систему уравнений

$$V'_n = -(q_0 + \nu n^2) V_n + \varepsilon q_0 H_n, \qquad H'_n = q_4 H_n - \varepsilon q_0 V_n$$

с начальными условиями $V_n(0) = V_{n0}$, $H_n(0) = 0$. Общее решение этой системы имеет вид

$$V_n(t) = a \exp(\lambda_+ t) + b \exp(\lambda_- t),$$

$$H_n(t) = \frac{\lambda_+ + q_0 + \nu n^2}{\varepsilon q_0} a \exp(\lambda_+ t) + \frac{\lambda_- + q_0 + \nu n^2}{\varepsilon q_0} b \exp(\lambda_- t),$$

где

$$\lambda_{+,-} = -\nu n^2/1 \pm \sqrt{(q_0 + \nu n^2/2)^2 - \varepsilon^2 q_0{}^2}.$$

Из начальных условий находим

$$a = k_- V_{n0}/(k_- - k_+), \qquad b = -k_+ V_{n0}/(k_- - k_+).$$

Здесь

$$k_+ = (\lambda_+ + q_0 + \nu n^2)/(\varepsilon q_0), \qquad k_- = (\lambda_- + q_0 + \nu n^2)/(\varepsilon q_0).$$

Окончательно получаем

$$V_n(t) = \frac{V_{n0}}{k_- - k_+}\,[k_- \exp(\lambda_+ t) - k_+ \exp(\lambda_- t)],$$

$$H_n(t) = \frac{k_+ k_-}{k_- - k_+}\,V_{n0}[\exp(\lambda_+ t) - \exp(\lambda_- t)].$$

Таким образом, при $\varepsilon^2 < 1 + \nu n^2/q_0$ имеет место экспоненциальная неустойчивость. Из этого неравенства следует (по крайней мере, в линейной постановке для $q_0 > 0$), что вязкость "уменьшает" устойчивость (неустойчивость возникает при большем магнитном поле). Этот результат в некоторой степени объясняет неустойчивость, полученную выше для МГД-вихря Хилла — Шафранова в случае $\varepsilon > 1$.

6. Нелинейное стационарное вязкое течение. Численное исследование задачи с начальными условиями для нелинейной модели (5.2)–(5.4) показывает, что при достаточно больших значениях $\mu = 1/\nu$ (но не очень больших) возникает стационарное вторичное течение с амплитудой, сравнимой с амплитудой исходного течения q_0. В стационарном течении $h = \varepsilon v$. В соответствии с этим для определения q и v получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$q'' = -\mu(1-\varepsilon^2)v^2, \qquad v'' = \mu(1-\varepsilon^2)qv \tag{6.1}$$

с граничными условиями $q(0) = q(\pi) = -1$, $v(0) = v(\pi) = 0$. Здесь штрихи обозначают производную по y. Эта задача имеет решение $q(y) = -1$, $v(y) = 0$ (течение без закрутки).

Положим $q = -(1-u)$. Тогда система (6.1) принимает вид

$$u'' = -\mu(1-\varepsilon^2)v^2, \qquad v'' = -\mu(1-\varepsilon^2)(1-u)v.$$

Граничные условия: $u(0) = u(\pi) = 0$, $v(0) = v(\pi) = 0$.

В линейном приближении при $(1-\varepsilon^2)\mu = 1$ имеется стационарное решение $v(y) = A\sin y$, $u = 0$, где амплитуда A произвольна.

Предполагая, что при $(1-\varepsilon^2)\mu > 1$ (причем $(1-\varepsilon^2)\mu - 1 \ll 1$) решение существует, будем искать решение нелинейной задачи в следующем виде ($\alpha \ll 1$):

$$v = \alpha v_1 + \alpha^3 v_3 + \ldots, \qquad u = \alpha^2 u_2 + \ldots, \qquad \mu = 1 + \alpha^2\mu_2 + \ldots.$$

Далее стандартным способом (из условия разрешимости уравнений для v_3, u_4) находим

$$v(y) = \sqrt{(3\pi/8)[(1-\varepsilon^2)\mu - 1]}\,\sin y + \ldots,$$

$$u(y) = (3\pi/32)[(1-\varepsilon^2)\mu - 1][\sin y^2 - y(y-\pi) + \ldots].$$

Таким образом, для аналоговой модели показано, что на границе устойчивости при числах Рейнольдса, превышающих критическое значение, в результате потери устойчивости возникает стационарное вторичное течение с "закруткой".

Заключение. Проведенные исследования выявили линейную неустойчивость вязких МГД-течений типа вихря Хилла — Шафранова в ограниченной области и позволили определить границу области неустойчивости в зависимости от замагниченности и числа Рейнольдса исходного течения. Тем самым показана возможность возникновения спонтанной закрутки для рассматриваемой задачи в точной постановке, хотя окончательного ответа полученные результаты не дают. Однако исследование аналоговой модели, для которой найдены возникающие в результате потери устойчивости вторичные "течения", позволяет ожидать появления вторичного режима в точной постановке и даже в некоторой степени предвидеть его характеристики.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гольдштик М. А., Жданова Е. М., Штерн В. Н.** Спонтанная закрутка затопленной струи // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277, № 4. С. 815–818.
2. **Гольдштик М. А.** Вязкие течения с парадоксальными свойствами / М. А. Гольдштик, В. Н. Штерн, Н. И. Яворский. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989.
3. **Лаврентьев М. А.** Проблемы гидродинамики и их математические модели / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. М.: Наука, 1973.
4. **Сагалаков А. М., Юдинцев А. Ю.** Трехмерные автоколебательные магнитогидродинамические течения жидкости конечной проводимости в канале кольцевого сечения при наличии продольного магнитного поля // Магнит. гидродинамика. 1993. № 1. С. 41–48.
5. **Луговцов Б. А.** Возможна ли спонтанная закрутка осесимметричного течения? // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 2. С. 50–54.
6. **Губарев Ю. Г., Луговцов Б. А.** О спонтанной закрутке в осесимметричных течениях // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 4. С. 52–59.
7. **Луговцов Б. А.** О спонтанной закрутке в осесимметричных течениях проводящей жидкости в магнитном поле // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 6. С. 35–43.
8. **Луговцов Б. А.** Осесимметричная спонтанная закрутка в идеально проводящей жидкости в магнитном поле // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 6. С. 29–31.
9. **Луговцов Б. А.** О вращательно-симметричной спонтанной закрутке в МГД-течениях // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 5. С. 120–129.
10. **Ортега Дж.** Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / Дж. Ортега, В. Рейнболдт. М.: Мир, 1975.

Поступила в редакцию 27/XI 2006 г.