

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЫ
РАЗДЕЛА ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ

В. А. Бородин, В. И. Ягодкин

(Москва)

Действие вязкости на распад струй жидкости можно рассматривать с двух точек зрения. Во-первых, вязкие силы приводят к изменению основного течения — образуют пограничный слой, наличие которого должно приводить к изменению волнообразования.

Во-вторых, вязкие силы могут оказывать непосредственное влияние на развитие возмущений при заданном профиле скорости основного течения. При этом исследование устойчивости должно основываться уже не на уравнениях идеальной жидкости, а на уравнениях Навье — Стокса, что сильно усложняет исследование. Имеющиеся работы [1] указывают, что такое влияние для неслишком вязких жидкостей очень мало. Ввиду этого представляется, что основную роль играет лишь изменение профиля скорости, и поведение возмущений описывается уравнениями идеальной жидкости.

В этой работе исследуется устойчивость движения и образование волн на границе раздела двух жидкостей с учетом пограничного слоя для того, чтобы изучить влияние вязкости на механизм образования капель, а указанный случай колебаний границы двух жидкостей выбран как наиболее простой, чтобы не усложнять исследования.

1. Рассмотрим течение трех жидкостей с плотностями ρ_1, ρ_2, ρ_3 , имеющих две параллельные плоские границы раздела (например вода, водяной пар, воздух).

Будем считать, что пространство разделено на четыре зоны: в первой и второй течет жидкость плотности ρ_1 , образующая пограничный слой толщиной h_1 (вторая зона); в третьей — течет жидкость плотности ρ_2 , образующая пограничный слой толщиной h_2 ; в четвертой зоне покоится жидкость плотности ρ_3 (фиг. 1).

На поверхности раздела между второй и третьей зонами действуют силы поверхностного натяжения (коэффициент поверхностного натяжения σ); скорость в пограничном слое изменяется линейно по координате. Приводим данные о каждой зоне согласно фиг. 1.

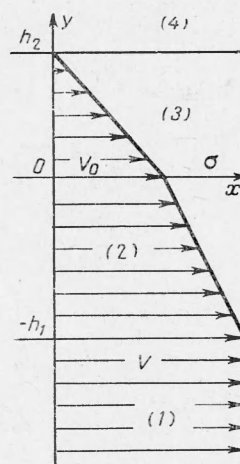
$$\begin{aligned} (1) \quad \rho_1 \quad V_1 &= V \\ &(-\infty < y < -h_1) \\ (2) \quad \rho_1 \quad V_2 &= V - (V - V_0)(h_1 + y)/h_1 \\ &(-h_1 \leq y \leq 0) \\ (3) \quad \rho_2 \quad V_3 &= V_0 - V_0 y/h_2 \\ &(0 \leq y \leq h_2) \\ (4) \quad \rho_3 \quad V_4 &= 0 \\ &(h_2 \leq y < +\infty) \end{aligned}$$

Функцию тока течения примем в виде

$$\psi = \varphi(y)e^{i(\alpha x - \beta t)} \quad (1.1)$$

Для функции $\varphi(y)$ в зонах 1, 2, 3, 4 имеем соответствующие решения следующего вида:

$$\varphi_1 = C_1 e^{\alpha y}, \quad \varphi_2 = C_2 e^{-\alpha y} + C_3 e^{\alpha y}, \quad \varphi_3 = C_4 e^{-\alpha y} + C_5 e^{\alpha y}, \quad \varphi_4 = C_6 e^{-\alpha y} \quad (1.2)$$



Фиг. 1

Уравнение движения дает выражение для градиента давления

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \left(\frac{\partial u'}{\partial t} + V \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{dV}{dy} \right) \quad \left(u' = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v' = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad (1.3)$$

Согласно (1.2) и (1.3)

$$u' = \varphi'(y)e^{i(\alpha x - \beta t)}, \quad v' = -i\alpha\varphi(y)e^{i(\alpha x - \beta t)} \quad (1.4)$$

Поэтому

$$\frac{\partial p}{\partial x} = i\rho \left[(\beta - \alpha V)\varphi' + \alpha\varphi \frac{dV}{dy} \right] e^{i(\alpha x - \beta t)} \quad (1.5)$$

Далее, поднятие частицы жидкости над невозмущенной поверхностью границы раздела напишем следующим образом:

$$\eta = \eta^\circ e^{i(\alpha x - \beta t)}, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = v' - \frac{\partial \eta}{\partial x} V = -i\beta\eta^\circ e^{i(\alpha x - \beta t)} = -i\alpha\varphi e^{i(\alpha x - \beta t)} - i\alpha\eta^\circ V e^{i(\alpha x - \beta t)}$$

Отсюда

$$\eta^\circ = \frac{\alpha\varphi}{\beta - \alpha V} \quad (1.7)$$

На границах $y = -h_1$, $y = 0$, $y = h_2$ нормальные составляющие скорости и градиенты давления непрерывны, следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_2, & \frac{\partial p_1}{\partial x} &= \frac{\partial p_2} & \text{при } y = -h_1 \\ \varphi_2 &= \varphi_3, & \frac{\partial p_2}{\partial x} - \frac{\partial p_3}{\partial x} &= -\rho \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = i\sigma\eta\alpha^3 & \text{при } y = 0 \\ \varphi_3 &= \varphi_4, & \frac{\partial p_3}{\partial x} &= \frac{\partial p_4}{\partial x} & \text{при } y = h_2 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Используя (1.2), (1.5), (1.6), (1.7), после подстановки в (1.8), введя безразмерные величины

$$m_1 = \alpha h_1, \quad m_2 = \alpha h_2, \quad M = \rho_3 / \rho_1, \quad N = \rho_3 / \rho_2 \quad (1.9)$$

получим систему шести уравнений, линейных относительно произвольных постоянных. Исключив из уравнений этой системы произвольные постоянные, придем к характеристическому уравнению вида

$$\begin{aligned} & - [2\eta + g_1 (1 - e^{-2m_1})] \{ 2M\eta_0^2 [(1 - N)\beta + g_2] e^{-2m_2} - M(\eta_0^2 + \\ & + g_2\eta_0) [\beta ((1 + N) + (1 - N)e^{-2m_2}) - g_2 (1 - e^{-2m_2})] \} + \\ & + \{ \beta [(1 + N) + (1 - N)e^{-2m_2}] - g_2 (1 - e^{-2m_2}) \} \{ [2\eta + g_1 (1 - \\ & - e^{-2m_2})] [\eta_0^2 - g_1\eta_0 - \tau] + 2\eta_0^2 g_1 e^{-2m_1} \} = 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\eta = \beta - \alpha V, \quad \eta_0 = \beta - \alpha V_0, \quad g_1 = \frac{V - V_0}{h_1}, \quad g_2 = \frac{V_0}{h_2}, \quad \tau = \frac{\sigma\alpha^3}{\rho_1}$$

2. Рассмотрим частный случай задачи, когда плотности в зонах 3 и 4 равны (т. е., например, для случая вода — водяной пар — воздух вместо пара движется также воздух той же плотности, как и в зоне 4; тогда $\rho_2 = \rho_3$, $N = 1$). Вместо уравнения (1.10) получим

$$\begin{aligned} & - [2\eta + g_1 (1 - e^{-2m_1})] \{ 2M\eta_0^2 g_2 e^{-2m_2} - M(\eta_0^2 + g_2\eta_0) [2\beta - g_2 (1 - \\ & - e^{-2m_2})] \} + \{ 2\beta - g_2 (1 - e^{-2m_2}) \} \{ [2\eta + g_1 (1 - e^{-2m_1})] [\eta_0^2 - g_1\eta_0 - \\ & - \tau] + 2\eta_0^2 g_1 e^{-2m_1} \} = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Уравнение (2.1), таким образом, соответствует задаче об устойчивости поверхности раздела двух жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 (например)

вода и воздух) при наличии в первой пограничного слоя толщиной h_1 , а во второй — пограничного слоя толщиной h_2 . Положим

$$h_1 = h \quad (m_1 = m), \quad h_2 = kh \quad (m_2 = km), \quad K = \frac{1}{k+1}, \quad V_0 = KkV \tag{2.2}$$

тогда

$$\begin{aligned} \frac{\eta h}{V} &= H - m, & \frac{\eta_0 h}{V} &= H - Kkm = R, & H &= \frac{\beta h}{V} \\ \frac{g_1 h}{V} &= \frac{g_2 h}{V} = K, & \frac{\tau h^2}{V^2} &= \frac{Mm^3}{W} = D, & W &= \frac{\rho_2 h V^2}{\sigma} \end{aligned} \tag{2.3}$$

После подстановки (2.2) и (2.3) в уравнение (2.1) последнее примет вид

$$\begin{aligned} (1 + M)R^4 + [(p + q)(1 + M) - K(1 - M) + a - bM]R^3 + \\ + [pq(1 + M) - (p + q)K(1 - M) + aq - bM - D]R^2 - \\ - [pqK(1 - M) + (p + q)D]R - pqD = 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} p &= -Km + \frac{1}{2}K(1 - e^{-2m}), & q &= Kkm - \frac{1}{2}K(1 - e^{-2km}), & a &= Ke^{-2m} \\ b &= Ke^{-2km} \end{aligned}$$

Исследуем частный случай, когда пограничный слой в зоне 3 отсутствует, т. е. рассмотрим задачу о колебаниях поверхности раздела двух жидкостей (например, вода — воздух), учитывая лишь пограничный слой в одной из них (в воде).

Положив в (2.4) $k = 0$, получим

$$H^3 + p_2 H^2 + p_1 H + p_0 = 0 \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} p_2 &= -\frac{n_1 + Mn_2}{1 + M}, & p_1 &= \frac{n_2 - D}{1 + M} \\ p_0 &= \frac{n_2 D}{1 + M}, & n_1 &= m + A, & n_2 &= m - A, & A &= \frac{1 - e^{-2m}}{2} \end{aligned}$$

Уравнение (2.5) имеет в рассматриваемом диапазоне значений входящих в его коэффициенты параметров один действительный корень $H_1 = a$ и два комплексных сопряженных корня $H_{2,3} = b \pm ic$. Зависимости между корнями и коэффициентами этого уравнения дают следующие соотношения:

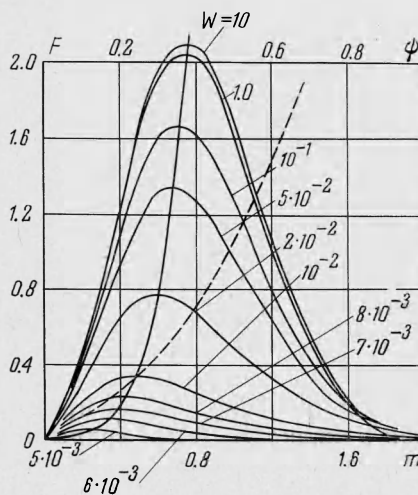
$$a + 2b = -p_2, \quad 2ab + b^2 + c^2 = p_1, \quad a(b^2 + c^2) = -p_0 \tag{2.6}$$

Чтобы получить уравнение для определения инкремента колебаний c , исключим из (2.6) величины a и b . Тогда получим

$$\psi(\psi + 1)^2 = F \tag{2.7}$$

$$c^2 = \frac{1}{4}(p_2^2 - 3p_1)\psi, \quad F = \frac{27p_0^2 + 4p_1^3 + 4p_0p_2^3 - 18p_0p_1p_2 - p_1^2p_2^2}{(p_2^2 - 3p_1)^3}$$

Из уравнения (2.7) следует определять только действительные корни. Оно легко решается графически при помощи графиков $F = F(m, W)$ и $F = \psi(\psi + 1)^2$ (фиг. 2 — пунктир).



Фиг. 2

Результат решения уравнения (2.7) дан на фиг. 3 и 4, где представлены зависимости квадрата безразмерного инкремента H_i^2 от безразмерного волнового числа, для разных значений W и значения оптимального волнового числа m_0 от числа Вебера W (при $M = 1.2 \cdot 10^{-3}$, вода — воздух).

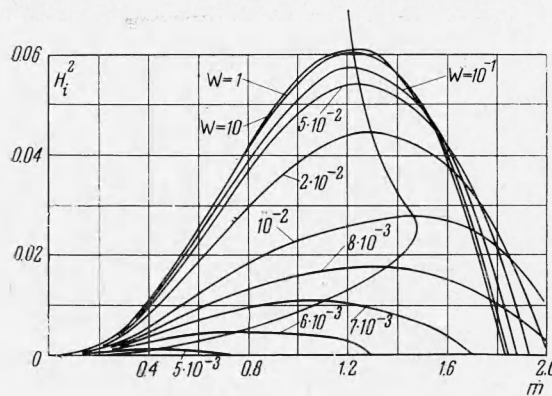
Рассмотрим некоторые частные случаи.

Положим, что толщина пограничного слоя h стремится к нулю. Тогда из уравнения (2.5) будем иметь

$$\beta_i^2 = \sqrt{MV^2 \alpha^2 - \alpha^3 \sigma / \rho_1} \quad (2.8)$$

Этот результат получен Иорком и Стабсом [2]. При отсутствии скорости или второй жидкости ($V = 0$ или $M = 0$) для инкремента колебаний β_i получается мнимое число; это свидетельствует о том, что движение в данном случае устойчиво.

Возведя (2.8) в квадрат, дифференцируя выражение для квадрата инкремента по α и приравнявая производную нулю, получим выражение для



Фиг. 3

длины волны оптимального возмущения (соответствующего максимуму инкремента колебаний)

$$\lambda_m = \frac{3\pi\sigma}{\rho_2 V^2} \quad (2.9)$$

В другом предельном случае при $W = \infty$ из решения уравнения (2.5), положив $D = 0$, можно получить значение оптимального волнового числа m , соответствующего асимптоте на графике фиг. 4

$$m_\infty = 1.225 \quad (2.10)$$

Отсюда получим предельное значение длины волны при наличии пограничного слоя в жидкости при $W \rightarrow \infty$ (практически при $W > 0.1$)

$$\lambda_m \geq \frac{2\pi h}{1.225} = 5.12h \quad (2.11)$$

Следовательно, в этом предельном случае, при наличии пограничного слоя в жидкости длина волны не может быть меньше примерно пятикратной толщины пограничного слоя при любом значении скорости жидкости.

В общем случае, как следует из фиг. 4, величина безразмерного волнового числа не превышает значения $m_0 = 1.5$, что соответствует длине волны $\lambda_m \geq 4.2h$. Из того же графика видно, что при значении числа Вебера $W \leq 0.004$ поверхность раздела становится устойчивой.

Рассмотренная задача о колебаниях поверхности раздела двух жидкостей с учетом пограничного слоя в одной из них (более плотной) является наиболее важной, поскольку пограничный слой в менее плотной жидкости влияет на колебания слабо.

Это можно видеть из следующих соображений. Из уравнения (2.4) при $D = 0$ (влияние капиллярности отсутствует) можно получить простые уравнения, соответствующие:

1. Случаю колебаний поверхности раздела двух жидкостей при учете пограничного слоя лишь в более плотной жидкости

$$(M + 1)H^2 - (Mn_2 + n_1)H + n_2 = 0$$

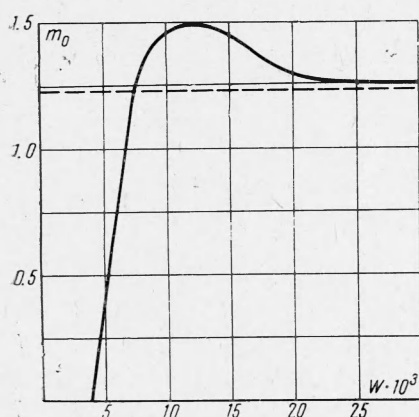
2. Случаю колебаний поверхности раздела двух жидкостей при учете пограничного слоя лишь в менее плотной жидкости

$$(M + 1)H^2 - (n_2 + Mn_1)H + Mn_2 = 0$$

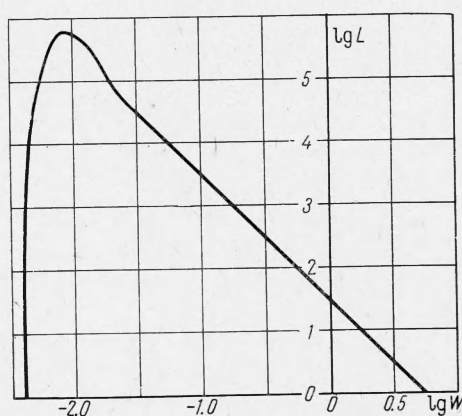
Решение приведенных уравнений и соответственно преобразованного уравнения (2.8), соответствующего случаю колебаний поверхности раздела двух жидкостей при разрывном распределении скоростей, позволяет сделать следующие выводы:

(1) Наличие пограничного слоя в жидкости с большей плотностью сильно увеличивает инкремент колебаний по сравнению со случаем разрывного распределения скоростей на границе раздела (жидкость с меньшей плотностью влияет слабо).

(2) Наличие пограничного слоя в жидкости с меньшей плотностью (вследствие ее малой плотности) дает величины инкрементов колебаний, сравнимые с величинами, получаемыми в случае разрывного распределения скоростей.



Фиг. 4



Фиг. 5

3. В случае, когда толщина пограничного слоя в жидкости или газе мала, вязкость жидкости или газа может непосредственно оказать влияние на образование волн. Задачу о непосредственном влиянии вязкости на волнообразование без учета скорости движения жидкости решил Ламб [3] (стр. 787—791), установивший, что вязкость вызывает затухание колебаний по закону

$$A = A_0 e^{-2\nu\alpha^2 t}, \quad \tau = \frac{\lambda^2}{8\pi^2\nu} \quad (3.1)$$

Здесь A — амплитуда волны, A_0 — начальная амплитуда, ν — кинематическая вязкость жидкости, α — волновое число, τ — время уменьшения амплитуды в e раз (e — основание неперовых логарифмов).

Это значит, что вязкость влияет на волны лишь малой длины.

Представляет интерес сравнить непосредственное влияние вязкости на колебания с влиянием посредством пограничного слоя при наличии скорости движения жидкости.

Для оценки длины волны используем, так же как и это сделано в работе [4], формулу для произвольной амплитуды A волн по времени [3]

$$\frac{dA}{dt} = \frac{C}{2\rho_1 c} - 2\nu_1\alpha^2 A, \quad c = \sqrt{\sigma\alpha/\rho_1}, \quad \nu_1 = \frac{\mu_1}{\rho_1}, \quad \alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (3.2)$$

Здесь c — скорость распространения капиллярных волн, ν_1 — коэффициент кинематической вязкости жидкости, α — волновое число, λ — длина волны.

По предположению Джеффри [3], выражение для давления газа на перемещающийся гребень волны можно принять в виде

$$\beta^\circ \rho_2 (U_2 - c)^2 d\eta / dx$$

где U_2 — скорость движения газа, $\beta^\circ \leq 1$ — коэффициент, характеризующий распределение давления газа на гребне волны, $d\eta / dx$ — производная от поднятия поверхности жидкости по координате в направлении скорости U_2 . Тогда

$$C = \beta^\circ \rho_2 (U_2 - c)^2 \alpha A \quad (3.3)$$

Подставляя значения C и c в (3.3) и пренебрегая скоростью распространения волн c по сравнению с U_2^2 , получим

$$\frac{dA}{dt} = \frac{A}{\tau}, \quad \left(\frac{1}{\tau} = \frac{\beta^\circ \rho_2 U_2^2 \alpha}{2 \rho_1 \sqrt{\sigma \alpha}} \sqrt{\rho_1} - \frac{2\mu_1 \alpha^2}{\rho_1} \right) \quad (3.4)$$

Амплитуда A максимальна при $1 / \tau = 0$. Отсюда получим

$$W_\lambda = \frac{4\pi \sqrt{2\pi}}{\beta^\circ} L_\lambda^{-1/2} \quad \left(W_\lambda = \frac{\rho_2 U_2^2 \lambda}{\sigma}, \quad L_\lambda = \frac{\lambda \sigma \rho_1}{\mu_1^2} \right) \quad (3.5)$$

Так как оптимальная длина волны

$$\lambda = 2\pi h / m_0(W) \quad (3.6)$$

где $m_0(W)$ должен быть взят с графика на фиг. 4, то, подставив (3.6) в (3.5), будем иметь для случая учета пограничного слоя только в жидкости

$$L = 16 [m_0(W)]^3 / W^2 \quad (3.7)$$

Здесь было принято $\beta^\circ = 1/2$.

Уравнение (3.7) выведено из условия равенства оптимальной длины волны возмущения, полученной с учетом пограничного слоя, но без вязкости, с одной стороны, и длины волны, полученной с учетом вязкости при разрывном на поверхности раздела распределении скоростей.

Это уравнение дает возможность приближенно установить области применимости изложенной теории.

График на фиг. 5, построенный по уравнению (3.7), показывает, что для маловязких жидкостей (вода и др.) непосредственное влияние вязкости не существенно, например, при скорости $V = 100$ м / сек и $h = 0.02$ см для воды имеем $W = 37, L = 13460$, и точка, соответствующая этим значениям величин W и L , лежит значительно выше кривой на фиг. 5.

Поступила 22 XII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Tomotika S. The instability of a cylindrical thread of a liquid surrounded by another viscous fluid. Proc. Roy. Soc., 1935, vol. 150, No. 870.
2. Jork J., Stubbbs H., Tek M. Mechanism of disintegration of liquid sheets. Trans. ASME, 1953, vol. 75, No. 7.
3. Ламб Г. Гидродинамика. ОГИЗ, 1947.
4. Mayer E. Theory of liquid atomization in high velocity gas streams. Amer. Rock. Soc. J., 1961, vol. 31, No. 12.