

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЫ
РАЗДЕЛА ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ

В. А. Бородин, В. И. Ягодкин

(Москва)

Действие вязкости на распад струй жидкости можно рассматривать с двух точек зрения. Во-первых, вязкие силы приводят к изменению основного течения — образуют пограничный слой, наличие которого должно приводить к изменению волнообразования.

Во-вторых, вязкие силы могут оказывать непосредственное влияние на развитие возмущений при заданном профиле скорости основного течения. При этом исследование устойчивости должно основываться уже не на уравнениях идеальной жидкости, а на уравнениях Навье — Стокса, что сильно усложняет исследование. Имеющиеся работы [1] указывают, что такое влияние для неслишком вязких жидкостей очень мало. Ввиду этого представляется, что основную роль играет лишь изменение профиля скорости, и поведение возмущений описывается уравнениями идеальной жидкости.

В этой работе исследуется устойчивость движения и образование волн на границе раздела двух жидкостей с учетом пограничного слоя для того, чтобы изучить влияние вязкости на механизм образования капель, а указанный случай колебаний границы двух жидкостей выбран как наиболее простой, чтобы не усложнять исследования.

1. Рассмотрим течение трех жидкостей с плотностями ρ_1, ρ_2, ρ_3 , имеющих две параллельные плоские границы раздела (например вода, водяной пар, воздух).

Будем считать, что пространство разделено на четыре зоны: в первой и второй течет жидкость плотности ρ_1 , образующая пограничный слой толщиной h_1 (вторая зона); в третьей — течет жидкость плотности ρ_2 , образующая пограничный слой толщиной h_2 ; в четвертой зоне покоится жидкость плотности ρ_3 (фиг. 1).

На поверхности раздела между второй и третьей зонами действуют силы поверхностного натяжения (коэффициент поверхностного натяжения σ); скорость в пограничном слое изменяется линейно по координате. Приводим данные о каждой зоне согласно фиг. 1.

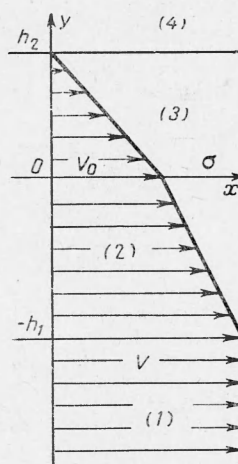
$$\begin{aligned} (1) \quad \rho_1 \quad V_1 &= V \\ &(-\infty < y < -h_1) \\ (2) \quad \rho_1 \quad V_2 &= V - (V - V_0)(h_1 + y)/h_1 \\ &(-h_1 \leq y \leq 0) \\ (3) \quad \rho_2 \quad V_3 &= V_0 - V_0 y/h_2 \\ &(0 \leq y \leq h_2) \\ (4) \quad \rho_3 \quad V_4 &= 0 \\ &(h_2 \leq y < +\infty) \end{aligned}$$

Функцию тока течения примем в виде

$$\psi = \varphi(y)e^{i(\alpha x - \beta t)} \quad (1.1)$$

Для функции $\varphi(y)$ в зонах 1, 2, 3, 4 имеем соответствующие решения следующего вида:

$$\varphi_1 = C_1 e^{\alpha y}, \quad \varphi_2 = C_2 e^{-\alpha y} + C_3 e^{\alpha y}, \quad \varphi_3 = C_4 e^{-\alpha y} + C_5 e^{\alpha y}, \quad \varphi_4 = C_6 e^{-\alpha y} \quad (1.2)$$



Фиг. 1

Уравнение движения дает выражение для градиента давления

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \left(\frac{\partial u'}{\partial t} + V \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{dV}{dy} \right) \quad \left(u' = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v' = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad (1.3)$$

Согласно (1.2) и (1.3)

$$u' = \varphi'(y)e^{i(\alpha x - \beta t)}, \quad v' = -i\alpha\varphi(y)e^{i(\alpha x - \beta t)} \quad (1.4)$$

Поэтому

$$\frac{\partial p}{\partial x} = i\rho \left[(\beta - \alpha V)\varphi' + \alpha\varphi \frac{dV}{dy} \right] e^{i(\alpha x - \beta t)} \quad (1.5)$$

Далее, поднятие частицы жидкости над невозмущенной поверхностью границы раздела напишем следующим образом:

$$\eta = \eta^\circ e^{i(\alpha x - \beta t)}, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = v' - \frac{\partial \eta}{\partial x} V = -i\beta\eta^\circ e^{i(\alpha x - \beta t)} = -i\alpha\varphi e^{i(\alpha x - \beta t)} - i\alpha\eta^\circ V e^{i(\alpha x - \beta t)}$$

Отсюда

$$\eta^\circ = \frac{\alpha\varphi}{\beta - \alpha V} \quad (1.7)$$

На границах $y = -h_1$, $y = 0$, $y = h_2$ нормальные составляющие скорости и градиенты давления непрерывны, следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_2, & \frac{\partial p_1}{\partial x} &= \frac{\partial p_2} & \text{при } y = -h_1 \\ \varphi_2 &= \varphi_3, & \frac{\partial p_2}{\partial x} - \frac{\partial p_3}{\partial x} &= -\rho \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = i\sigma\eta\alpha^3 & \text{при } y = 0 \\ \varphi_3 &= \varphi_4, & \frac{\partial p_3}{\partial x} &= \frac{\partial p_4}{\partial x} & \text{при } y = h_2 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Используя (1.2), (1.5), (1.6), (1.7), после подстановки в (1.8), введя безразмерные величины

$$m_1 = \alpha h_1, \quad m_2 = \alpha h_2, \quad M = \rho_3 / \rho_1, \quad N = \rho_3 / \rho_2 \quad (1.9)$$

получим систему шести уравнений, линейных относительно произвольных постоянных. Исключив из уравнений этой системы произвольные постоянные, придем к характеристическому уравнению вида

$$\begin{aligned} & - [2\eta + g_1 (1 - e^{-2m_1})] \{ 2M\eta_0^2 [(1 - N)\beta + g_2] e^{-2m_2} - M(\eta_0^2 + \\ & + g_2\eta_0) [\beta ((1 + N) + (1 - N)e^{-2m_2}) - g_2 (1 - e^{-2m_2})] \} + \\ & + \{ \beta [(1 + N) + (1 - N)e^{-2m_2}] - g_2 (1 - e^{-2m_2}) \} \{ [2\eta + g_1 (1 - \\ & - e^{-2m_2})] [\eta_0^2 - g_1\eta_0 - \tau] + 2\eta_0^2 g_1 e^{-2m_1} \} = 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\eta = \beta - \alpha V, \quad \eta_0 = \beta - \alpha V_0, \quad g_1 = \frac{V - V_0}{h_1}, \quad g_2 = \frac{V_0}{h_2}, \quad \tau = \frac{\sigma\alpha^3}{\rho_1}$$

2. Рассмотрим частный случай задачи, когда плотности в зонах 3 и 4 равны (т. е., например, для случая вода — водяной пар — воздух вместо пара движется также воздух той же плотности, как и в зоне 4; тогда $\rho_2 = \rho_3$, $N = 1$). Вместо уравнения (1.10) получим

$$\begin{aligned} & - [2\eta + g_1 (1 - e^{-2m_1})] \{ 2M\eta_0^2 g_2 e^{-2m_2} - M(\eta_0^2 + g_2\eta_0) [2\beta - g_2 (1 - \\ & - e^{-2m_2})] \} + \{ 2\beta - g_2 (1 - e^{-2m_2}) \} \{ [2\eta + g_1 (1 - e^{-2m_1})] [\eta_0^2 - g_1\eta_0 - \\ & - \tau] + 2\eta_0^2 g_1 e^{-2m_1} \} = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Уравнение (2.1), таким образом, соответствует задаче об устойчивости поверхности раздела двух жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 (например)

вода и воздух) при наличии в первой пограничного слоя толщиной h_1 , а во второй — пограничного слоя толщиной h_2 . Положим

$$(2.2)$$

$$h_1 = h \quad (m_1 = m), \quad h_2 = kh \quad (m_2 = km), \quad K = \frac{1}{k+1}, \quad V_0 = KkV$$

тогда

$$\begin{aligned} \frac{\eta h}{V} = H - m, \quad \frac{\eta_0 h}{V} = H - Kkm = R, \quad H = \frac{\beta h}{V} \\ \frac{g_1 h}{V} = \frac{g_2 h}{V} = K, \quad \frac{\tau h^2}{V^2} = \frac{Mm^3}{W} = D, \quad W = \frac{\rho_2 h V^2}{\sigma} \end{aligned} \quad (2.3)$$

После подстановки (2.2) и (2.3) в уравнение (2.1) последнее примет вид

$$\begin{aligned} (1 + M)R^4 + [(p + q)(1 + M) - K(1 - M) + a - bM]R^3 + \\ + [pq(1 + M) - (p + q)K(1 - M) + aq - bM - D]R^2 - \\ - [pqK(1 - M) + (p + q)D]R - pqD = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$p = -Km + \frac{1}{2}K(1 - e^{-2m}), \quad q = Kkm - \frac{1}{2}K(1 - e^{-2km}), \quad a = Ke^{-2m}$$

$$b = Ke^{-2km}$$

Исследуем частный случай, когда пограничный слой в зоне 3 отсутствует, т. е. рассмотрим задачу о колебаниях поверхности раздела двух жидкостей (например, вода — воздух), учитывая лишь пограничный слой в одной из них (в воде).

Положив в (2.4) $k = 0$, получим

$$H^3 + p_2 H^2 + p_1 H + p_0 = 0 \quad (2.5)$$

$$p_2 = -\frac{n_1 + Mn_2}{1 + M}, \quad p_1 = \frac{n_2 - D}{1 + M}$$

$$p_0 = \frac{n_2 D}{1 + M}, \quad n_1 = m + A, \quad n_2 = m - A, \quad A = \frac{1 - e^{-2m}}{2}$$

Уравнение (2.5) имеет в рассматриваемом диапазоне значений входящих в его коэффициенты параметров один действительный корень $H_1 = a$ и два комплексных сопряженных корня $H_{2,3} = b \pm ic$. Зависимости между корнями и коэффициентами этого уравнения дают следующие соотношения:

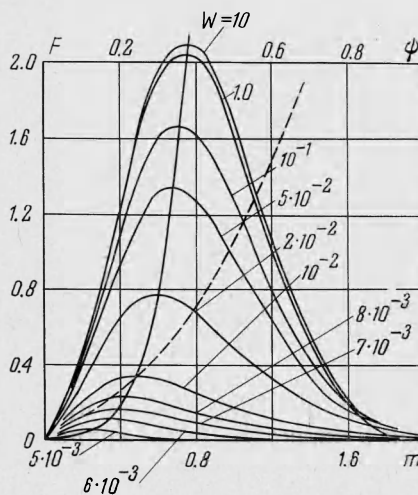
$$a + 2b = -p_2, \quad 2ab + b^2 + c^2 = p_1, \quad a(b^2 + c^2) = -p_0 \quad (2.6)$$

Чтобы получить уравнение для определения инкремента колебаний c , исключим из (2.6) величины a и b . Тогда получим

$$\psi(\psi + 1)^2 = F \quad (2.7)$$

$$c^2 = \frac{1}{4}(p_2^2 - 3p_1)\psi, \quad F = \frac{27p_0^2 + 4p_1^3 + 4p_0p_2^3 - 18p_0p_1p_2 - p_1^2p_2^2}{(p_2^2 - 3p_1)^3}$$

Из уравнения (2.7) следует определять только действительные корни. Оно легко решается графически при помощи графиков $F = F(m, W)$ и $F = \psi(\psi + 1)^2$ (фиг. 2 — пунктир).



Фиг. 2

Результат решения уравнения (2.7) дан на фиг. 3 и 4, где представлены зависимости квадрата безразмерного инкремента H_i^2 от безразмерного волнового числа, для разных значений W и значения оптимального волнового числа m_0 от числа Вебера W (при $M = 1.2 \cdot 10^{-3}$, вода — воздух).

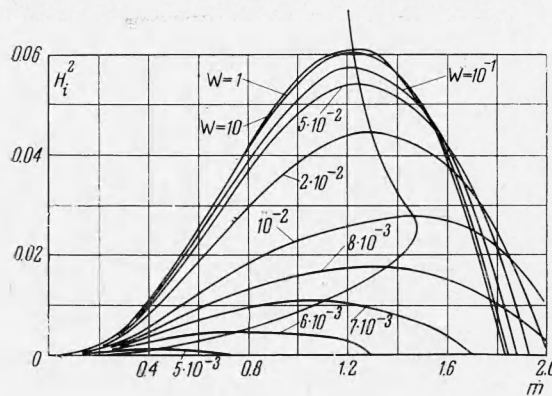
Рассмотрим некоторые частные случаи.

Положим, что толщина пограничного слоя h стремится к нулю. Тогда из уравнения (2.5) будем иметь

$$\beta_i^2 = \sqrt{MV^2 \alpha^2 - \alpha^3 \sigma / \rho_1} \quad (2.8)$$

Этот результат получен Иорком и Стабсом [2]. При отсутствии скорости или второй жидкости ($V = 0$ или $M = 0$) для инкремента колебаний β_i получается мнимое число; это свидетельствует о том, что движение в данном случае устойчиво.

Возведя (2.8) в квадрат, дифференцируя выражение для квадрата инкремента по α и приравнявая производную нулю, получим выражение для



Фиг. 3

длины волны оптимального возмущения (соответствующего максимуму инкремента колебаний)

$$\lambda_m = \frac{3\pi\sigma}{\rho_2 V^2} \quad (2.9)$$

В другом предельном случае при $W = \infty$ из решения уравнения (2.5), положив $D = 0$, можно получить значение оптимального волнового числа m , соответствующего асимптоте на графике фиг. 4

$$m_\infty = 1.225 \quad (2.10)$$

Отсюда получим предельное значение длины волны при наличии пограничного слоя в жидкости при $W \rightarrow \infty$ (практически при $W > 0.1$)

$$\lambda_m \geq \frac{2\pi h}{1.225} = 5.12h \quad (2.11)$$

Следовательно, в этом предельном случае, при наличии пограничного слоя в жидкости длина волны не может быть меньше примерно пятикратной толщины пограничного слоя при любом значении скорости жидкости.

В общем случае, как следует из фиг. 4, величина безразмерного волнового числа не превышает значения $m_0 = 1.5$, что соответствует длине волны $\lambda_m \geq 4.2h$. Из того же графика видно, что при значении числа Вебера $W \leq 0.004$ поверхность раздела становится устойчивой.

Рассмотренная задача о колебаниях поверхности раздела двух жидкостей с учетом пограничного слоя в одной из них (более плотной) является наиболее важной, поскольку пограничный слой в менее плотной жидкости влияет на колебания слабо.

Это можно видеть из следующих соображений. Из уравнения (2.4) при $D = 0$ (влияние капиллярности отсутствует) можно получить простые уравнения, соответствующие:

1. Случаю колебаний поверхности раздела двух жидкостей при учете пограничного слоя лишь в более плотной жидкости

$$(M + 1)H^2 - (Mn_2 + n_1)H + n_2 = 0$$

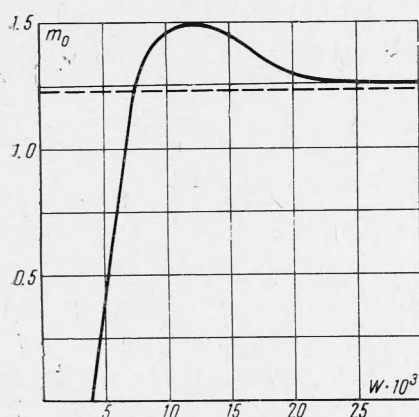
2. Случаю колебаний поверхности раздела двух жидкостей при учете пограничного слоя лишь в менее плотной жидкости

$$(M + 1)H^2 - (n_2 + Mn_1)H + Mn_2 = 0$$

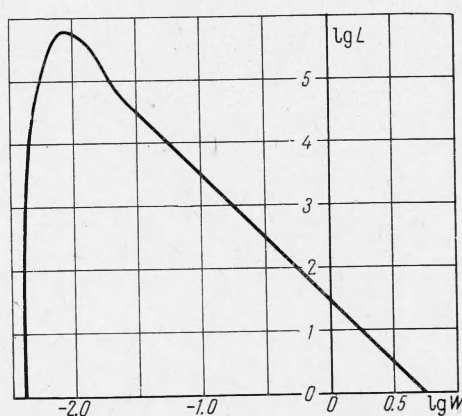
Решение приведенных уравнений и соответственно преобразованного уравнения (2.8), соответствующего случаю колебаний поверхности раздела двух жидкостей при разрывном распределении скоростей, позволяет сделать следующие выводы:

(1) Наличие пограничного слоя в жидкости с большей плотностью сильно увеличивает инкремент колебаний по сравнению со случаем разрывного распределения скоростей на границе раздела (жидкость с меньшей плотностью влияет слабо).

(2) Наличие пограничного слоя в жидкости с меньшей плотностью (вследствие ее малой плотности) дает величины инкрементов колебаний, сравнимые с величинами, получаемыми в случае разрывного распределения скоростей.



Фиг. 4



Фиг. 5

3. В случае, когда толщина пограничного слоя в жидкости или газе мала, вязкость жидкости или газа может непосредственно оказать влияние на образование волн. Задачу о непосредственном влиянии вязкости на волнообразование без учета скорости движения жидкости решил Ламб [3] (стр. 787—791), установивший, что вязкость вызывает затухание колебаний по закону

$$A = A_0 e^{-2\nu\alpha^2 t}, \quad \tau = \frac{\lambda^2}{8\pi^2\nu} \quad (3.1)$$

Здесь A — амплитуда волны, A_0 — начальная амплитуда, ν — кинематическая вязкость жидкости, α — волновое число, τ — время уменьшения амплитуды в e раз (e — основание неперовых логарифмов).

Это значит, что вязкость влияет на волны лишь малой длины.

Представляет интерес сравнить непосредственное влияние вязкости на колебания с влиянием посредством пограничного слоя при наличии скорости движения жидкости.

Для оценки длины волны используем, так же как и это сделано в работе [4], формулу для произвольной амплитуды A волн по времени [3]

$$\frac{dA}{dt} = \frac{C}{2\rho_1 c} - 2\nu_1\alpha^2 A, \quad c = \sqrt{\sigma\alpha/\rho_1}, \quad \nu_1 = \frac{\mu_1}{\rho_1}, \quad \alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (3.2)$$

Здесь c — скорость распространения капиллярных волн, ν_1 — коэффициент кинематической вязкости жидкости, α — волновое число, λ — длина волны.

