

мирования материала с трещиной. Полученное при помощи описанной в работе дислокационной модели пластического деформирования влияние длины цикла нагружения на кинетику пластической зоны в целом совпадает с наблюдаемым в прямых экспериментах. Кроме того, возникающие в процессе решения замкнутой системы в качестве промежуточных результатов карты плотностей разностных дислокаций $\Delta\rho(\mathbf{r})$ и карты суммарной плотности дислокаций, участвовавших в процессе пластического деформирования, а также распределения эксплуатационных остаточных напряжений (являющиеся далекодействующими полями напряжений ансамбля разностных дислокаций) могут быть использованы при построении физически правдоподобных дислокационных моделей роста усталостной трещины.

Отличие предлагаемого подхода к изучению усталостного разрушения от существующих в линейной механике разрушения полуэмпирических теорий заключается в следующем. Отсутствие физической основы в математических моделях полуэмпирических теорий вынуждает механиков ограничиваться одним-двумя параметрами из числа тех, которые влияют на скорость продвижения трещин. В противном случае число эмпирических констант в результирующих выражениях растет нелинейно. Описанный в работе подход позволяет построить на основе дислокационной модели многопараметрическую зависимость для da/dN с ограниченным числом эмпирических констант.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хоникомб Р. Пластическая деформация металлов.— М.: Мир, 1972.
2. Регель В. Р., Слуцкер А. И., Томашевский Э. Е. Кинетическая теория прочности твердых тел.— М.: Наука, 1974.
Владимиров В. И., Карпинский А. Н. и др. Моделирование на ЭВМ кинетики деформации в пластической зоне у вершины трещины // Пробл. прочности.— 1983.— № 12.
4. Владимиров В. П. Физическая природа разрушения металлов.— М.: Металлургия, 1984.

Поступила 13/IV 1987 г.,
в окончательном варианте — 19/X 1987 г.

УДК 532.593 : 539.3 : 624.131

ТРЕХМЕРНЫЕ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВБЛИЗИ ДВИЖУЩЕЙСЯ ОБЛАСТИ ДАВЛЕНИЙ

А. Е. Букатов, В. В. Жарков
(Севастополь)

В линейной постановке изучаются трехмерные изгибно-гравитационные волны, возбуждаемые в ближней зоне при движении области постоянных давлений по равномерно сжатой тонкой упругой пластинке, плавающей на поверхности однородной идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины. Анализируется зависимость структуры колебаний от скорости перемещения области давлений, толщины пластинки и величины сжимающего усилия.

Асимптотический анализ развития изгибно-гравитационных волн выполнен в [1, 2] при движении плоского фронта давлений и в [1, 3—5] при движении осесимметричной области давлений. Анализ динамического прогиба под сосредоточенной нагрузкой на мелкой воде проведен в [6].

1. Пусть на поверхности однородной идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины $H = \text{const}$ плавает тонкая упругая равномерно сжатая пластинка. По пластинке перемещается с постоянной скоростью v область давления

$$(1.1) \quad p = p_0 j(x_1, y), \quad x_1 = x + vt, \quad v = \text{const}.$$

Рассмотрим возбуждаемые при этом изгибно-гравитационные колебания пластинки и волновые возмущения жидкости в ближней зоне области давлений.

В предположениях линейной теории задача заключается в решении уравнения Лапласа

$$(1.2) \quad \Delta \varphi = 0, \quad -H < z < 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty$$

с граничными

$$(1.3) \quad D_1 \nabla^4 \zeta + Q_1 \nabla^2 \zeta + \kappa_1 \zeta_{tt} + \zeta + \frac{1}{g} \varphi_t = -\frac{p}{\rho g}, \quad z = 0, \\ \varphi_z = 0, \quad z = -H, \quad \zeta_t = \varphi_z, \quad z = 0$$

и начальными

$$(1.4) \quad \varphi(x, y, z, 0) = \zeta(x, y, 0) = 0$$

условиями, где $D_1 = \frac{D}{\rho g}$; $Q_1 = \frac{Q}{\rho g}$; $\kappa_1 = \frac{\rho_1 h}{\rho g}$; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; $\nabla^4 = (\nabla^2)^2$; ρ — плотность жидкости; E , h , ρ_1 , μ — модуль нормальной упругости, толщина, плотность и коэффициент Пуассона пластинки; Q — сжимающее усилие.

Переходя к системе координат x_1 , y , z , связанной с движущейся областью давлений, и применяя интегральные преобразования Фурье по горизонтальным координатам x_1 , y и Лапласа по времени t , при осесимметричном распределении давлений из (1.1)–(1.4) получим

$$\zeta = \frac{a}{8\pi^2} \int_0^\infty f_0(r) J(r, R, \gamma) dr, \quad J = \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \psi(r, \theta) e^{i[rR \cos(\theta-\gamma)]} d\theta,$$

$$\psi = \frac{2}{\Delta_1 \Delta_2} - \frac{1}{\tau \Delta_1} e^{-i\Delta_1 t} + \frac{1}{\tau \Delta_2} e^{-i\Delta_2 t}, \quad a = \frac{p_0}{\rho g}, \quad \tau = [l(r) M(r)]^{1/2},$$

$$M = rg(1 + \kappa_1 rg \operatorname{th} rH)^{-1} \operatorname{th} rH, \quad l = D_1 r^4 - Q_1 r^2 + 1,$$

$$f_0 = r f^*(r) M(r),$$

$$\Delta_j = rv \cos \theta + \delta_j \tau, \quad \delta_j = (-1)^j, \quad x_1 = R \cos \gamma, \quad y = R \sin \gamma,$$

$$R^2 = x^2 + y^2, \quad m = r \cos \theta, \quad n = r \sin \theta, \quad r^2 = m^2 + n^2$$

($f^*(r)$ — трансформанта Фурье-функции $f(R)$).

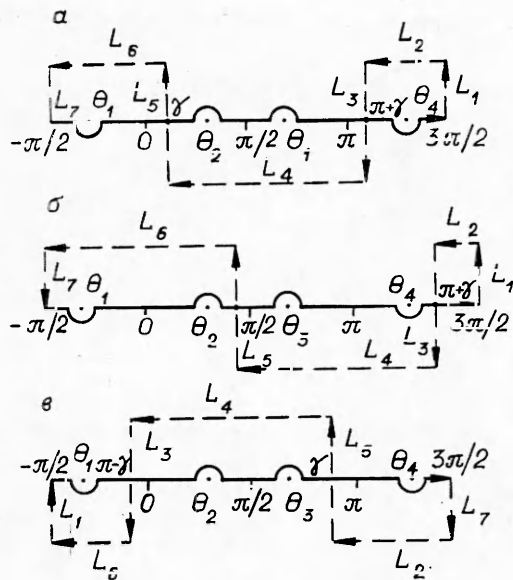
Подынтегральная функция $\psi(r, \theta)$ не имеет особенностей на пути интегрирования по θ при любых $r \geq 0$, так как возможные особенности отдельных слагаемых, представляющие собой действительные корни уравнений $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, погашаются. Поэтому в соответствии с теоремой Коши исходный путь интегрирования вдоль действительной оси от $\theta = -\pi/2$ до $\theta = 3\pi/2$ можно деформировать в путь L_0 , обходящий в комплексной плоскости корни $\theta_{1,2} = \mp \arccos \tau_0$, $\tau_0 = \tau/(rv)$ уравнения $\Delta_1 = 0$ по малым полуокружностям, на которых $\operatorname{Re}(i\Delta_1) > 0$, а корни $\theta_{3,4} = \pi \mp \arccos \tau_0$ уравнения $\Delta_2 = 0$ — по полуокружностям, где $\operatorname{Re}(i\Delta_2) > 0$. Перепишем теперь J в виде

$$J = J_0 - J_{01} - J_{02}, \quad J_0 = \int_{L_0} \Phi_0(r, \theta) d\theta, \quad J_{0j} = \int_{L_{0j}} \Phi_{0j}(r, \theta) d\theta,$$

$$\Phi_0 = \frac{2}{\Delta_1 \Delta_2} \exp[i r R \cos(\theta - \gamma)], \quad \Phi_{0j} = \frac{1}{\tau \Delta_j} \exp(-i \Delta_j t),$$

где L_{01} обходит только точки $\theta_{1,2}$, а L_{02} — точки $\theta_{3,4}$. Так как $J_{1,2}$ стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$ для любого фиксированного R , то очевидно, что J_0 характеризует установившееся движение, рассмотрением которого ограничимся в дальнейшем при условии $Q_1 < 2\sqrt{D_1}$, необходимом для устойчивости пластинки.

2. Если $v < v_0$ ($v_0 = \tau(r_0)/r_0$, r_0 — единственный положительный корень уравнения $\tau' = \tau/r$), то L_0 совпадает с отрезком действительной оси от $\theta = -\pi/2$ до $\theta = 3\pi/2$, так как в данном случае $\Delta_1 \neq 0$ и $\Delta_2 \neq 0$. Подынтегральная функция в выражении для ζ также не имеет особенностей и по r , что позволяет провести исследование ζ численно.



Р и с. 1

Пусть $v_0 < v < \sqrt{gH}$. Представим ζ в виде

Пусть $v_0 < v < \sqrt{gH}$. Представим ζ в виде

$$\zeta = \frac{a}{8\pi^2} (\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3),$$

$$\zeta_1 = \int_0^1 f_0(r) J_0 dr, \quad \zeta_2 =$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} f_0(r) J_0 dr, \quad \zeta_3 = \int_{r_2}^{\infty} f_0(r) J_0 dr$$

($r_{1,2}$ — действительные корни уравнения $\tau - rv = 0$). При $0 < r < r_1$, $r_2 < r < \infty$ в J_0 нет особенностей по θ . Путь L_0 в этом случае, как и при $v < v_0$, совпадает с отрезком действительной оси. У ζ_1, ζ_3 нет особенностей и по r , за исключением интегрируемых в концевых точках r_1, r_2 . Следовательно, интегралы ζ_1, ζ_3 можно считать численно.

При $r_1 < r < r_2$ в интеграле J_0 путь L_0 обходит точки θ_1, θ_4 в нижней, а θ_2, θ_3 в верхней полуплоскостях. Представим ζ_2 в виде

$$\zeta_2 = \zeta_2^* - \zeta_2^0, \quad \zeta_2^* = \int_{r_1}^{r_2} f_0(r) \int_{L^*} \Phi_0(r, \theta) d\theta dr,$$

$$\zeta_2^0 = \sum_{k=1}^7 J_k, \quad J_k = \int_{r_1}^{r_2} f_0(r) \int_{L_k} \Phi_0(r, \theta) d\theta dr$$

(L^* — замкнутый контур, образованный L_0 и контурами L_k , на которых $\text{Re}[irR \cos(\theta - \gamma)] \leq 0$). Выбор L^* зависит от угла γ . Для $0 \leq \gamma < \theta_2$, $\theta_2 \leq \gamma \leq \theta_3$, $\theta_3 < \gamma \leq \pi$ контур L^* изображен на рис. 1, а—в соответственно, где L_0 характеризуется сплошной линией, а L_k — штриховой. После применения теоремы Коши найдем

$$\zeta_2^* = -2\pi(I_1 + I_2),$$

$$I_1 = \begin{cases} \int_{r_1}^{r_2} \Phi_1(r) dr, & 0 \leq \gamma \leq \pi - \theta_0, \\ \left[\int_{r_1}^{r_1^*} \Phi_1(r) dr + \int_{r_2^*}^{r_2} \Phi_1(r) dr \right], & \pi - \theta_0 < \gamma \leq \pi, \end{cases}$$

$$I_2 = \begin{cases} \int_{r_1^*}^{r_2^*} \Phi_2(r) dr, & 0 \leq \gamma < \theta_0, \\ 0, & \theta_0 \leq \gamma \leq \pi, \end{cases}$$

$$\Phi_{1,2} = \frac{f_0(r)}{\tau \sqrt{(vr)^2 - \tau^2}} \sin \left[\frac{R}{v} (\tau \cos \gamma \mp \sqrt{(vr)^2 - r^2} \sin \gamma) \right],$$

$$\theta_0 = \max_{r_1 < r < r_2} \arccos \tau_0.$$

Здесь $r_{1,2}^*(\gamma)$ — корни уравнения $\gamma = \theta_2(r)$, если $0 < \gamma < \theta_0$, и уравнения $\gamma = \theta_3(r)$ при $\pi - \theta_0 < \gamma < \pi$. Функции $\Phi_{1,2}$ в I_k не имеют особенностей по r , кроме интегрируемых в точках r_1, r_2 .

Из условия $\operatorname{Re}[irR \cos(\theta - \gamma)] < 0$ следует, что при стремлении к бесконечности мнимой части θ в комплексной плоскости (рис. 1) получаем $J_2 = J_4 = J_6 = 0$. Так как $\Phi_0(r, \theta) = \Phi_0(r, \theta + 2\pi)$, а L_1 и L_7 противоположно направлены, то $J_1 + J_7 = 0$.

После замены $\omega = i[(\pi + \gamma) - \theta]$ в интеграле J_3 и $\omega = i(\theta - \gamma)$ в J_5 получим

$$J_3 + J_5 = - \int_{r_1}^{r_2} (\tau v)^{-1} f_0(r) (u_1^* + u_2) dr,$$

$$u_n(r, \gamma, R) = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(rR \operatorname{ch} \omega)}{\operatorname{ch}(\omega - i\gamma) + (-1)^n \tau_0} d\omega, \quad n = 1, 2.$$

Преобразуем u_n к виду

$$u_n = 2(-1)^n \int_0^{\infty} \frac{\sin(rR \operatorname{ch} \omega) [\operatorname{ch} \omega \cos \gamma + (-1)^n \tau_0]}{[\operatorname{ch} \omega \cos \gamma + (-1)^n \tau_0]^2 + (\operatorname{sh} \omega \sin \gamma)^2} d\omega.$$

Отсюда после подстановки $u = \operatorname{ch} \omega$ имеем

$$(2.1) \quad u_n = 2(-1)^n \int_1^{\infty} \frac{u_0 \sin(rRu)}{\sqrt{u^2 - 1} [u_0^2 + (u^2 - 1) \sin^2 \gamma]} du, \quad u_0 = u \cos \gamma + (-1)^n \tau_0.$$

Учитывая, что

$$u_0^2 + (u^2 - 1) \sin^2 \gamma = [u + (-1)^n \tau_0 \cos \gamma]^2 - (1 - \tau_0^2) \sin^2 \gamma,$$

методом неопределенных коэффициентов из (2.1) найдем

$$u_1 + u_2 = (1 - \tau_0^2)^{-1/2} \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 (-1)^{m+n+1} \sin Q_{mn} \int_1^{\infty} \Phi^* du,$$

$$\Phi^* = \sin(rRu) (u^2 - 1)^{-1/2} (u - \cos Q_{mn})^{-1},$$

$$Q_{mn} = \gamma + (-1)^{m+n} \arccos \tau_0 + [1 + (-1)^n] \frac{\pi}{2}.$$

Так как $\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{du}{\sqrt{u-1} (u - \cos Q_{mn})} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \cos Q_{mn}}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{u-1}{1 - \cos Q_{mn}}}$ и $\sqrt{2}/\sqrt{1 - \cos Q_{mn}} = 1/|\sin(Q_{mn}/2)|$, то, заменяя $\sqrt{u^2 - 1}$ на $\sqrt{2} \sqrt{u-1}$ в малой ε -окрестности нижнего предела, методом интегрирования по частям получим

$$\sin Q_{mn} \int_1^{u_0^*} \Phi^* du \approx \sqrt{2(1 + \cos Q_{mn})} A(r, \varepsilon),$$

$$A = (A_1 - A_2) \operatorname{sign} A_3, \quad A_1 = \sin[rR(1 + \varepsilon)] \operatorname{arctg} \sqrt{\varepsilon/(1 - \cos Q_{mn})},$$

$$A_2 = rR \int_1^{u_0^*} \cos(rRu) \operatorname{arctg} \sqrt{(u-1)/(1 - \cos Q_{mn})} du,$$

$$A_3 = (-1)^n \sqrt{1 - \tau_0^2} \cos^2 \gamma + (-1)^m \tau_0 \sin \gamma, \quad u_0^* = 1 + \varepsilon.$$

Интегралы A_2 и $\int_{u_0^*}^{\infty} \Phi^* du$, а следовательно, и $J_3 + J_5 = J_3$ можно считать численно. Таким образом, задача определения ζ сведена к численному интегрированию выражений для ζ_1, ζ_3, I_k ($k = 1, 2, 3$).

Интеграл $\int_{u_0^*}^{\infty} \Phi^* du$ приближенно можно вычислить аналитически, заменяя $(u^2 - 1)^{-1/2}$ на конечных отрезках пути интегрирования $[u_0^*, u_1^*], [u_1^*, u_2^*], [u_2^*, u_3^*]$ выражениями вида $p_k(u - a_k)^2 + q_k(u - a_k) + b_k$. На участке от u_3^* до ∞ функцию $\sqrt{1 - u^{-2}}$ при $1/u^2 \ll 1$ заменим первыми двумя членами ее разложения в ряд Тейлора по степеням $1/u^2$. Длины отрезков интегрирования и коэффициенты p_k, q_k, a_k, b_k выберем так, чтобы погрешность аппроксимации не превышала заданной.

В результате предложенной аппроксимации получим

$$\int_{u_{k-1}^*}^{u_k^*} \Phi^* du \approx A_4(u_k^*) - A_4(u_{k-1}^*), \quad A_4 = A_{41} + A_{42},$$

$$A_{41} = p_k(rR)^{-2} \sin(rRu) - [p_k(u - a_k - \beta_k) + q_k](rR)^{-1} \cos(rRu),$$

$$A_{42} = (p_k \beta_k^2 - q_k \beta_k + b_k) [\sin \beta_0 \text{Ci}(rR\beta) + \cos \beta_0 \text{Si}(rR\beta)],$$

$$\beta_k = a_k - \cos Q_{mn}, \quad \beta_0 = rR \cos Q_{mn}, \quad \beta = u - \cos Q_{mn},$$

$$\int_{u_3^*}^{\infty} \Phi^* du = \sum_{l=1}^2 F_l(r), \quad \text{где } F_l = [2 \cos Q_{mn} + (-1)^l \sqrt{2}]^{-1} A_5$$

при $\cos Q_{mn} \neq (-1)^{l+1} \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $F_l = A_6$ при $\cos Q_{mn} = (-1)^{l+1} \frac{1}{\sqrt{2}}$. Здесь

$$A_5 = \left(\frac{\pi}{2} - \text{Si} \beta_4\right) \cos \beta_0 - \text{Ci} \beta_4 \sin \beta_0 - \left(\frac{\pi}{2} - \text{Si} \beta_5\right) \cos \frac{rR}{\sqrt{2}} - (-1)^l \text{Ci} \beta_5 \sin \frac{rR}{\sqrt{2}};$$

$$A_6 = \frac{\sin(u_3^* rR)}{2u_3^* + (-1)^l \sqrt{2}} + \frac{rR}{2} \left[(-1)^l \left(\frac{\pi}{2} - \text{Si} \beta_5\right) \sin \frac{rR}{\sqrt{2}} - \text{Ci} \beta_5 \cos \frac{rR}{\sqrt{2}} \right];$$

$$\beta_4 = rR(u_3^* - \cos Q_{mn}); \quad \beta_5 = rR \left(u_3^* + \frac{(-1)^l}{\sqrt{2}} \right).$$

Если $v > \sqrt{gH}$, то уравнение $\tau - rv = 0$ имеет только один действительный корень $r = r_2$. В этом случае $\zeta = \frac{a}{8\pi^2} (\zeta_2 + \zeta_3)$, кроме того, нижний предел в интегралах ζ_2, ζ_2^*, J_k равен нулю, а выражения I_k принимают вид

$$I_1 = \begin{cases} \int_0^{r_2} \Phi_1(r) dr, & 0 \leq \gamma \leq \pi - \theta_0, \\ \left[\int_0^{r_1^*} \Phi_1(r) dr + \int_{r_2^*}^{r_2} \Phi_1(r) dr \right], & \pi - \theta_0 < \gamma < \pi - \theta^*, \\ \int_{r_2^*}^{r_2} \Phi_1(r) dr, & \pi - \theta^* \leq \gamma \leq \pi, \end{cases}$$

$$I_2 = \begin{cases} \int_0^{r_2^*} \Phi_2(r) dr, & 0 \leq \gamma \leq \theta^*, \\ \int_{r_1^*}^{r_2^*} \Phi_2(r) dr, & \theta^* < \gamma < \theta_0, \\ 0, & \theta_0 \leq \gamma \leq \pi, \end{cases}$$

где $\theta^* = \arccos(\sqrt{gH}/v)$. Выражение I_3 остается прежним. Однако при его вычислении с применением предложенной аппроксимации следует иметь в виду, что $A_{41}(u_k^*) - A_{41}(u_{k-1}^*) = 0$ в точке $r = 0$.

3. Численный анализ возмущений проводился для ледяной пластинки [6, 7] в случае сосредоточенной нагрузки типа δ -функции $f(x_1, y) = \delta(x_1/H)\delta(y/H)$ при $E = 3 \cdot 10^9$ Н·м⁻², $\rho_1 = 870$ кг·м⁻³, $\rho = 10^3$ кг·м⁻³, $\mu = 0,34$. Толщина пластинки принималась равной 1 и 2 м, а величина Q_1 , характеризующая ледовое сжатие, полагалась равной 0, $\sqrt{D_1}$, $1,5\sqrt{D_1}$. Глубина жидкости бралась 10^3 м для $v < \sqrt{gH}$ и 30 м для $v > \sqrt{gH}$. При этом значение ε полагалось равным 0,02. Коэффициенты p_k, q_k, b_k, a_k полиномов, аппроксимирующих с ошибкой 1,5 % функцию $(u^2 - 1)^{-1/2}$ на отрезках $[u_{k-1}^*, u_k^*]$ и значения u_k^* ($k = 1, 2, 3$), брались из таблицы.

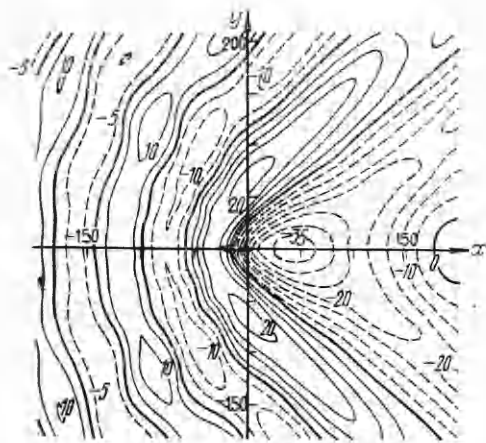
Результаты численных расчетов представлены на рис. 2—5, где отклонения изолиний от невозмущенного уровня даны в миллиметрах. Для $v < \sqrt{gH}$ (рис. 2—4) вес нагрузки $1,6 \cdot 10^6$ Н, а при $v > \sqrt{gH}$ (рис. 5) — $1,44 \cdot 10^6$ Н, что соответствует $2\pi p_0 = 10^2$ и 10^5 Па. Шкала делений по координатным осям на рисунках дана в метрах.

Анализ результатов численных расчетов показал, что при близких к нулю скоростях перемещения давлений в случае $Q = 0$ прогиб пластинки ζ имеет форму, близкую к осесимметричной. С увеличением скорости осесимметричность прогиба нарушается, но симметрия относительно координатных осей сохраняется. При этом глубина прогиба максимальна под нагрузкой. Впереди и за нагрузкой образуются локальные возвышения, вытянутые в направлении, перпендикулярном курсу следования нагрузки. В этом же направлении происходит и растяжение прогиба под нагрузкой. Крутизна прогиба становится максимальной перед нагрузкой и за ней, а минимальной — в направлении, перпендикулярном к трассе.

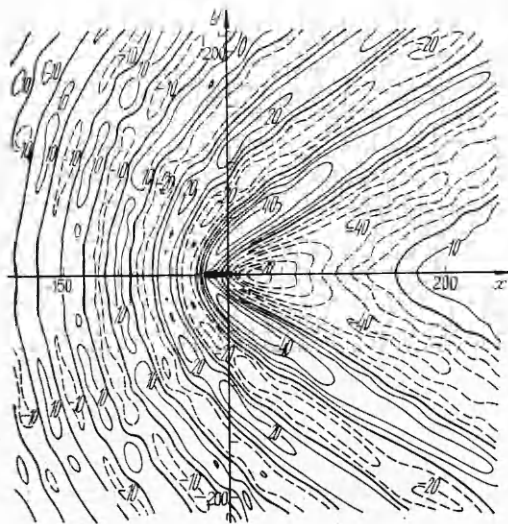
Локальные возвышения имеют место и по обе стороны от трассы. Однако их высота увеличивается с ростом скорости нагрузки существенно медленнее, чем высота поднятий по курсу. При v , близких к v_0 , высота боковых возвышений составляет менее 20 % от высоты возвышений по трассе. Увеличение толщины льда приводит к уменьшению, а рост скорости v — к увеличению глубины прогиба и образующихся по трассе поднятий. Расстояние между центрами оснований прогиба и поднятий по трассе увеличивается с ростом толщины льда и уменьшается с увеличением v .

Пространственное распределение амплитуд возмущений в жидкости на фиксированной глубине качественно такое же, как и на поверхности лед — вода, но затухание возмущений с глубиной вне трассы следования нагрузки происходит медленнее, чем под трассой.

k	u_k^*	a_k	b_k	p_k	q_k
1	1,06	1,04	3,5007	831,52	-44,617
2	1,15	1,10	2,1822	84,615	-11,430
3	1,46	1,30	1,2059	5,5380	-2,2681



Р и с. 2



Р и с. 3

Изменения топографии прогиба под влиянием сжатия при фиксированном v качественно такие же, как и при изменении скорости перемещения нагрузки при $Q = 0$. Глубина прогиба и высота поднятий на трассе увеличиваются с ростом сжимающего усилия и убывают с увеличением растягивающего. Расстояние между центрами их оснований меняется в противоположном направлении. При $v > v_0$ сохраняется симметрия топографии поверхности пластинки — жидкость только относительно трассы перемещения давлений. Точка максимального прогиба находится теперь за нагрузкой, удаляясь от нее с увеличением v . Удаляются при этом и точки максимального углубления прогиба на линиях, параллельных трассе. Геометрическое место этих точек имеет распределение, близкое к гиперболическому с вершиной на трассе. Направление желобов прогиба составляет с трассой угол, близкий к $\arctg[(v/v_0)^2 - 1]^{-1/2}$.

Волновые возмущения перед и за прогибом с удалением от нагрузки затухают значительно медленнее (примерно как $1/\sqrt{R}$), чем в случае $v < v_0$. Передний склон прогиба круче заднего. Перед нагрузкой волна заметно короче, чем

за нагрузкой. Однако с удалением от трассы длины волн постепенно выравниваются. Глубина прогиба и амплитуды волновых возмущений с ростом v при $v > v_0$ убывают. Длины волн перед нагрузкой уменьшаются, а за ней увеличиваются. Скорость изменения длин и амплитуд волн за областью при увеличении v существенно больше, чем перед ней.

При малых превышениях скорости v над v_0 амплитуды волн перед и за нагрузкой примерно одинаковые. Они, как и при $v < v_0$, монотонно затухают вдоль своих гребней. Дальнейшее увеличение v приводит к появлению локальных экстремумов на гребнях (впадинах) возмущений перед нагрузкой. Линия, соединяющая максимальные по высоте (глубине) экстремумы, имеет вид ветви гиперболы с вершиной в точке максимального прогиба на трассе. Направление лучей этой ветви зависит от скорости v . Чем больше v , тем больший угол образуют эти лучи с направлением движения нагрузки. В волновом следе за областью давлений желоб прогиба расширяется, приобретая слабо выраженную холмистость ложа, т. е. глубина желоба убывает немонотонно с удалением от трассы. Наглядная иллюстрация топографии возмущений для этого случая представлена на рис. 2 при $v = 0,3 \sqrt{gH}$, $h = 2$ м, $Q = 0$.

Отметим, что если v превышает некоторое значение, обозначенное в [4, 5] через v_1 , то волнистую структуру приобретают и боковые границы

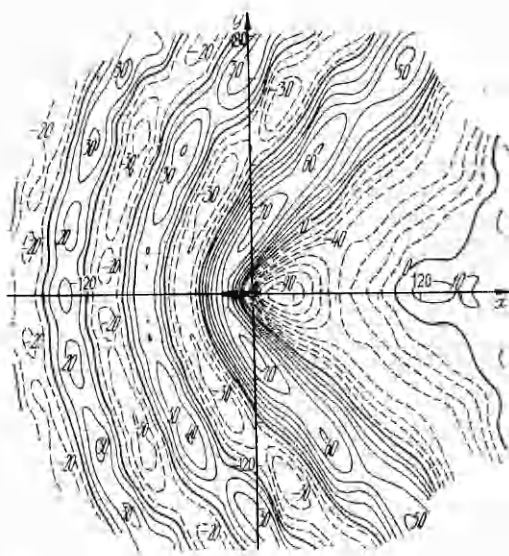
желоба в волновом следе. Это видно из топографии на рис. 3 для $h = 1$ м при тех же условиях, что и на рис. 2. Отметим, что указанный эффект, по-видимому, обусловлен вкладом продольных волн типа корабельных, возбуждаемых при $v > v_1$ [1, 3, 4].

Для $v > \sqrt{gH}$ волновые возмущения за прогибом в следе незначительны. В частности, для $H = 30$ м, $h = 1$ м, $v = 1,2 \sqrt{gH}$, $Q = 0$ (рис. 4) высоты гребней перед прогибом и за ним составляют 70 и 10 мм соответственно. Кроме того, первый гребень перед прогибом приобретает ярко выраженную волнистость.

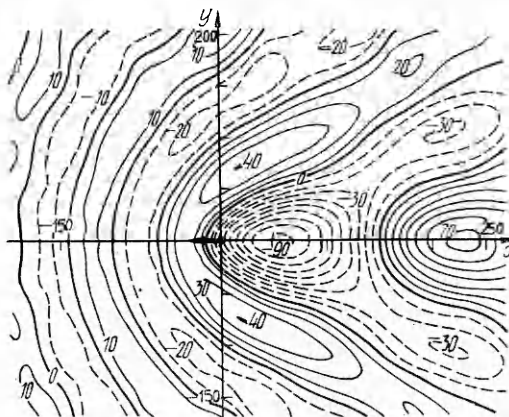
Анализ результатов численных расчетов также показал, что уменьшение толщины пластины при фиксированном значении v в каждом из диапазонов $v_0 < v < v_1$, $v_1 < v < \sqrt{gH}$, $v > \sqrt{gH}$ приводит к увеличению глубины прогиба и амплитуд максимальных волновых возмущений. Кроме того, гребни волн перед нагрузкой становятся еще более холмистыми. Это видно из сопоставления рис. 2 и 3. Возможно и появление заметных локальных возвышений по разные стороны от трассы за прогибом при скоростях из диапазона $v_0 < v < v_1$. Угол между желобом прогиба и трассой за областью давлений с уменьшением толщины пластины убывает.

Равномерное сжатие увеличивает максимальную глубину прогиба. Угол между направлением желоба прогиба и осью абсцисс убывает с ростом сжимающего усилия. Возвышение за прогибом с ростом Q растягивается вдоль трассы и сужается в поперечном направлении. Его высота при этом существенно возрастает, что, возможно, является следствием суперпозиции изгибных, продольных и поперечных корабельных волн, имеющей место вблизи трассы за нагрузкой [4] при сжимающих усилиях, превышающих величину Q^* , полученную в [2]. Структура желоба прогиба и распределений амплитуд возмущений вдоль гребней перед нагрузкой с ростом сжимающего усилия изменяется качественно так же, как и с увеличением скорости перемещения нагрузки. Иллюстрация топографии возмущений при $Q = 1,5 \sqrt{D_1}$, $h = 2$ м, $H = 10^3$ м, $v = 0,2 \sqrt{gH}$ приведена на рис. 5.

Амплитуды изгибных возмущений (перед нагрузкой) затухают с глубиной жидкости быстрее гравитационных и обусловленных прогибом (за нагрузкой). С ростом скорости перемещения нагрузки, сжимающего усилия и уменьшением толщины пластинки затухание изгибных возмущений с глубиной усиливается вследствие уменьшения их длин. Это приводит к



Р и с. 4



Р и с. 5

усилению различий топографий возмущений в жидкости на заданной глубине и на поверхности пластинка — жидкость. Точка максимального отклонения от невозмущенного уровня на фиксированной глубине отстает от нагрузки сильнее, чем соответствующая ей точка максимального прогиба пластинки. Холмистость гребней изгибных возмущений и желоба прогиба сглаживаются с ростом глубины, при этом точки максимумов амплитуд изгибных возмущений удаляются от трассы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черкесов Л. В. Гидродинамика волн.— Киев: Наук. думка, 1980.
2. Букатов А. Е. Влияние продольно сжатой упругой пластинки на неустановившееся волновое движение однородной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1980.— № 5.
3. Доценко С. Ф. О гравитационно-упругих и гравитационно-капиллярных неустановившихся корабельных волнах // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1978.— № 5.
4. Букатов А. Е., Ярошенко А. А. Влияние равномерно сжатой плавающей упругой пластинки на развитие трехмерных волн в однородной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1984.— № 6.
5. Букатов А. Е., Ярошенко А. А. Развитие трехмерных изгибно-гравитационных волн при движении области давлений переменной интенсивности // ПМТФ.— 1986.— № 5.
6. Хейсин Д. Е. Динамика ледяного покрова.— Л.: Гидрометеиздат, 1967.
7. Богородский В. В., Гаврило В. П. Лед. Физические свойства. Современные методы гляциологии.— Л.: Гидрометеиздат, 1980.

Поступила 2/II 1988 г.

УДК 539.3

О КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ УПРУГОГО АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА

А. И. Димов, А. Ф. Ревуженко

(Новосибирск)

Рассматривается последовательное описание эксперимента по однородному деформированию плоского образца. Обобщение на неоднородные состояния приводит к замкнутой системе уравнений, связывающей скорости изменения напряжений и деформаций. В качестве тестовых решаются задачи о деформировании эллиптической области с заданными на границе скоростями. Параметры материала определяются из поставленных экспериментов на двухосное растяжение резины. Показаны корректность предложенной модели и возможность решения задач о больших деформациях и поворотах.

1. Попытаемся построить уравнения конечных деформаций, исходя только из физического эксперимента и последовательного описания его результатов. Ограничимся плоским случаем. Возьмем квадратный образец однородного материала размером $l_0 \times l_0$ (например, лист резины). К противоположным сторонам приложим попарно одинаковые равномерно распределенные силы. В результате образец изменит свои размеры и примет форму параллелограмма. В эксперименте измеряем новые значения длин сторон l_1 , l_2 , угол между ними ($\pi/2 - \delta$) и действующие силы. Для определенности последние представим в виде двух составляющих, направленных по нормали и вдоль сторон (рис. 1). Таким образом, непосредственно измеряемые экспериментальные данные позволяют определить четыре функции:

$$(1.1) P_{ij} = F_{ij}(l_1, l_2, \delta, l_0), \\ i, j = 1, 2.$$

В силу однородности материала и равномерности распределения

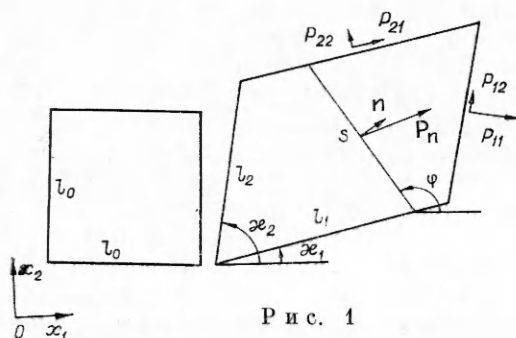


Рис. 1