

УДК 536.242, 519.6, 544.778.3

**Численное моделирование
естественного конвективного теплообмена
в вертикально ориентированном цилиндрическом
кольцевом канале с источниками тепла
для наножидкости на основе воды
с наночастицами меди**

Ф. Мабарек-Удина¹, Р. Бессаи²

¹Университет 20 августа 1955 г., Скикда, Алжир

²Университет Ментури-Константин, Константин, Алжир

E-mail: oudina2003@yahoo.fr, f.mebarek_oudina@univ-skikda.dz

Статья посвящена численному исследованию естественной конвекции наножидкости «вода–наночастицы Cu», помещенной в вертикальный кольцевой канал с двумя нагревателями различной длины. Моделирование проводилось с помощью метода конечных объемов с применением алгоритма SIMPLER. На внутренней стенке канала имеются адиабатические участки и дискретные источники тепла. Верхняя и нижняя стенки теплоизолированы, а температура внешней стенки поддерживается пониженной. Показано влияние объемной доли твердой фазы наножидкости на гидродинамику и тепловые характеристики теплообмена, например, на среднее и локальное числа Нуссельта, линии тока, картину изотерм. Моделирование проведено для числа Рэлея в интервале от 10^3 до 10^6 и объемной доли наночастиц в интервале от 0 до 0,1. Показано, что теплоотдача и температура нагревателей зависят от числа Рэлея, объемной доли наночастиц и длины нагревателей.

Ключевые слова: естественная конвекция, наножидкость, источник тепла, кольцевой канал.

Введение

Стабильную суспензию с частицами металлов, их окислов или керамики с размерами в нанодиапазоне (< 100 нм), получаемую на основе обычно применяемых жидкостей, называют наножидкостью. Одним из преимуществ использования наножидкости является усиление переноса тепла, что важно для практического использования тепловых устройств. Этот новый класс жидкостей, содержащих диспергированные в несущей жидкости частицы размером около 50 нм, впервые был описан в работе [1]. Исследуемая тематика лежит в рамках инновационных технологий и имеет практическую важность для различных сфер применения: экологии, генерации и хранения энергии, охлаждения электронных компонентов, биологии, медицинской диагностики, очистки воды и других. В последнее десятилетие интенсификация конвективного теплообмена с помощью наножидкости стала предметом ряда экспериментальных и численных исследований. В работе [2] для полости, заполненной наножидкостью и имеющей неоднородный нагрев, было обнаружено усиление теплообмена с ростом объемной доли наночастиц в жидкости.

Важным параметром для практического применения является вязкость наножидкости, поскольку она непосредственно влияет на величину перепада давления в потоке при вынужденной конвекции. Увеличение вязкости в наножидкостях по сравнению с чистой жидкостью исследовалось в работах [3, 4]. Было указано, что важно получить наножидкость с вязкостью ниже, чем у несущей жидкости, чтобы использовать её в прикладных устройствах.

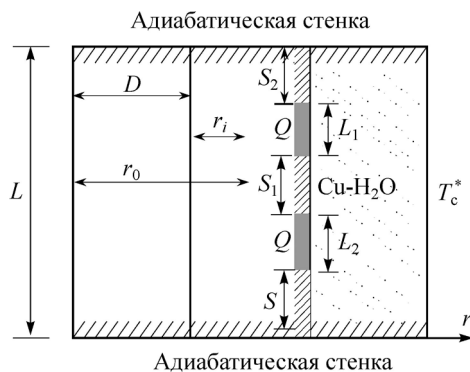
Работы [5, 6] были посвящены естественной конвекции наножидкости в кольцевом канале с концентрическими стенками при варьировании величин вязкости и теплопроводности. В работе [7] изучался конвективный теплообмен для случая наножидкости на основе наночастиц меди (Cu), помещенной в несимметричный горизонтальный канал. Были описаны влияние эксцентриситета такого кольцевого канала, соотношения сторон, объемной доли наночастиц в суспензии, чисел Рэлея и Прандтля на среднее число Нуссельта. В работе [8] эти же авторы представили результаты численного моделирования для смешенного конвективного потока и теплообмена для наножидкости «Al₂O₃-вода» для случая асимметричного горизонтального канала с вращающимся внутренним цилиндром. В работе [9] было проведено численное моделирование для оценки влияния числа Рэлея и объемной доли наночастиц на интенсификацию теплообмена для случая двухмерного горизонтального кольцевого канала. Было обнаружено, что рост объемной доли наночастиц в жидкости вызывает увеличение числа Нуссельта и максимальной величины функции потока.

В работе [10] изучалось влияние двух нагревателей одинаковой длины, помещенных в вертикальный цилиндрический кольцевой канал, для варианта обычной жидкости (без наночастиц). В исследовании [11] при похожих условиях моделировалась ситуация, где имело место влияние длины одного из нагревателей. Численное исследование устойчивости течения жидкости в вертикальном кольцевом канале с тепловыми источниками различной длины было проведено в работе [12]. Было показано, что длина нагревателя влияет на интенсивность теплообмена и устойчивость течения. Охлаждение электрического или электронного оборудования (изменение нагрева внутренней стенки) являются самыми важными вопросами при реализации практических приложений.

В настоящей работе проводится численное моделирование задачи теплообмена со стационарной ламинарной естественной конвекцией наножидкости, которая помещена в межстенное пространство между двумя вертикальными коаксиальными цилиндрами; при этом рассматриваются нагреватели различной длины. Представленное численное исследование обусловлено необходимостью иметь возможность предсказать как влияют на теплообмен объемная доля частиц, тип наночастиц, длина источников тепла и число Рэлея.

Математическая постановка задачи

Схема исследуемой задачи приведена на рис. 1: полость заполнена наножидкостью на основе воды с частицами меди (Cu), эта жидкость нагревается двумя дискретными нагревателями, размещенными на вертикальной стенке внутреннего цилиндра. Такая же



конфигурация изучалась в работах [10–13]. Внешний цилиндр имеет более низкую температуру, а нижняя и верхняя стенки полости являются адиабатическими. Внутренний цилиндр имеет необогреваемые адиабатические участки и два дискретных источника тепла.

Рис. 1. Кольцевой канал цилиндрической формы, заполненный наножидкостью на основе воды и наночастиц меди, оборудованный двумя дискретными источниками.

Два нагревателя длиной L_1 и L_2 размещены на внутренней стене полости, каждый из них генерирует тепловой поток, равный Q . При этом безразмерная длина нижнего нагревателя $\varepsilon_2 = L_2/L$ остается постоянной и равной 0,2, а безразмерная длина верхнего нагревателя $\varepsilon_1 = L_1/L$ изменяется. В этой конфигурации теплоизолированные секции S , S_1 , S_2 располагаются на внутреннем цилиндре следующим образом: от нижней крышки до нижнего нагревателя, между двумя нагревателями, между верхним нагревателем и верхней крышкой соответственно. Первая теплоизолированная секция S имеет безразмерную величину длины, равную 0,2, при этом отношение радиусов цилиндров $\lambda = r_o/r_i = 2$, а соотношение сторон $A_r = 2$. Температурный градиент внутри такой системы создает естественную конвекцию наножидкости. Предполагается также, что базовая жидкость и наночастицы находятся в температурном равновесии, наножидкость является ньютоновской несжимаемой жидкостью, а ее течение — ламинарным. Теплофизические свойства базовой жидкости и наночастиц приведены в табл. 1 и 2. Явление переноса тепла в наножидкости можно разделить на две категории. Во-первых, принимается во внимание динамика самих частиц, которая вносит свой вклад в теплопроводность разбавленной неподвижной суспензии. Таким образом, размер частиц, их объемная доля, теплопроводность наночастиц и несущей жидкости, а также температура учитываются в этих моделях для теплопроводности наножидкости. Второй аспект связан со структурой наножидкости: это среда, где наночастица играет роль ядра, которое окружено нанослоем жидкости в виде оболочки, которая, в свою очередь, погружена в основную жидкость. Наножидкость в модели имеет постоянные теплофизические свойства (за исключением изменений плотности в архимедовой силе, которые описываются в приближении Буссинеска).

Рассматриваемая задача описывается уравнениями для безразмерных величин:

— уравнение неразрывности:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0; \quad (1)$$

— уравнение для импульса по оси r :

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\rho_{nf}} \left[-\frac{\partial P}{\partial r} + \mu_{nf} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right] \quad (2)$$

и по оси z :

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{\rho_{nf}} \left[-\frac{\partial P}{\partial r} + \mu_{nf} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + (\rho\beta)_{nf} g(T - T_C) \right]; \quad (3)$$

Таблица 2

Формулы для описания свойств наножидкости

Свойство наножидкости	Применяемая модель
Теплопроводность	$k_{nf} = k_f \left[\frac{(k_s - 2k_f) - 2\Phi(k_f - k_s)}{(k_s - 2k_f) + \Phi(k_f - k_s)} \right]$
Теплоемкость	$(\rho C_p)_{nf} = (1 - \Phi)(\rho C_p)_f + (\rho C_p)_s$
Коэффициент теплового расширения	$(\rho\beta)_{nf} = (1 - \Phi)(\rho\beta)_f + \Phi(\rho\beta)_s$
Плотность	$\rho_{nf} = (1 - \Phi)\rho_f + \Phi\rho_s$
Температуропроводность	$\alpha_{nf} = k_{nf} / (\rho C_p)_{nf}$
Динамическая вязкость	$\mu_{nf} = \mu_f / (1 - \Phi)^{2,5}$

Таблица 1
Теплофизические свойства

Параметры	Вода	Cu
ρ , кг/м ³	997,1	8933
C_p , Дж/(кг·К)	4179	385
k , Вт/(м·К)	0,613	401
β , К ⁻¹	$21 \cdot 10^{-5}$	$1,67 \cdot 10^{-5}$

— уравнение сохранения энергии:

$$u \frac{\partial T}{\partial r} + v \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha_{nf} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \right). \quad (4)$$

При этом вводятся следующие безразмерные переменные:

$$r = \frac{r^* - r_i}{D}, \quad z = \frac{z^*}{D}, \quad u = \frac{u^*}{(\alpha_f/D)}, \quad v = \frac{v^*}{(\alpha_f/D)}, \quad P = \frac{P^*}{\rho_{nf} (\alpha_f/D)^2}, \quad T = \frac{(T^* - T_C^*) k_{nf}}{Q(r_o - r_i)}.$$

Числа Рэлея и Прандтля определяются формулами: $Ra = \frac{g \beta_{nf} Q D^4}{k_{nf} \nu_{nf} \alpha_{nf}}$, $Pr = \frac{\nu_{nf}}{\alpha_{nf}}$.

Функция тока определена как

$$u = \partial \psi / \partial z, \quad v = -\partial \psi / \partial r. \quad (5)$$

Приведенные уравнения решаются с применением следующих начальных и граничных условий:

для $t = 0$:

$$u = v = T = 0, \quad (6)$$

для $t > 0$:

при $r = 1$: $u = v = 0$, $\partial T / \partial r = 0$ (участки без нагрева) и $\partial T / \partial r = -1$ (с источником нагрева) на внутренней стенке, (7)

при $r = 2$: $u = v = 0$, $T = 0$ — холодная внешняя стенка, (8)

при $z = 0$: $u = v = 0$, $\partial T / \partial z = 0$ — адиабатическая нижняя крышка, (9)

при $z = L/D$: $u = v = 0$, $\partial T / \partial z = 0$ — адиабатическая верхняя крышка. (10)

Выражение для локального числа Нуссельта имеет вид

$$Nu = - \frac{k_{nf}}{k_f} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1}. \quad (11)$$

Среднее число Нуссельта для нагревателей определяется как

$$Nu_{avg} \Big|_{source 1} = \frac{1}{\varepsilon_1} \int_{1,2}^2 Nu \cdot dz \quad \text{— для верхнего нагревателя,} \quad (12)$$

$$Nu_{avg} \Big|_{source 2} = \frac{1}{\varepsilon_2} \int_1^{0,8} Nu \cdot dz \quad \text{— для нижнего нагревателя,} \quad (13)$$

где индексы source 1 и source 2 соответствуют нижней и верхней позиции первого и второго нагревателей соответственно,

$$Nu_{avg} = (Nu_{avg} \Big|_{source1} + Nu_{avg} \Big|_{source2}) / 2. \quad (14)$$

Численные методы решения

Для численного решения системы уравнений (1–4) с граничными условиями применялся алгоритм SIMPLER и метод конечных объемов [14], а также алгоритм Томаса (TDMA) для выполнения итераций [15].

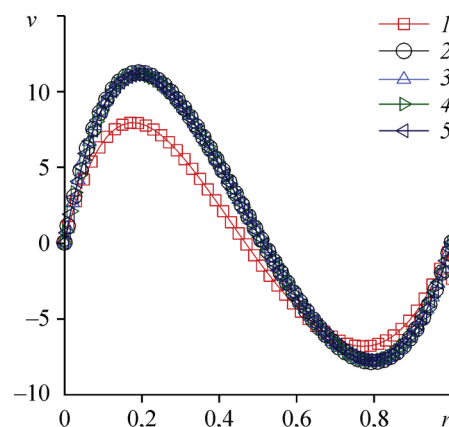
Таблица 3

Зависимость результата моделирования от вычислительной сетки,
для случая $Ra = 10^4$, $A_T = 2$, $\lambda = 2$, $\varepsilon = 1$ и $\Phi = 5\%$

Размер сетки	$Nu_{avg} _{source\ 1}$	$Nu_{avg} _{source\ 2}$	T_{max} (верхний нагреватель)	T_{max} (нижний нагреватель)
52×102	6,132771	4,914101	0,180592	0,2253649
62×128	5,086690	3,872327	0,2205458	0,2860827
72×148	5,096194	3,806980	0,211320	0,2925229
92×182	5,096195	3,806981	0,211322	0,2925231
102×212	5,096196	3,806982	0,211324	0,2925233

Рис. 2. Профиль безразмерной осевой скорости v как функции r в середине кольцевого канала для различных сеток.

Сетки: 50×102 (1), 62×128 (2), 72×148 (3), 92×182 (4), 102×212 (5).



В табл. 3 представлено изменение среднего числа Нуссельта для нижнего и верхнего нагревателей, а также безразмерные максимальные температуры для различных сеток: 52×102 , 62×128 , 72×148 , 92×182 и 102×212 . Как видно, максимальное различие результатов расчетов на сетках 72×148 и 92×182 не превышает 0,01 %. Сравнение кривых, представленных на рис. 2, показывает, что разница результатов вычислений составляет менее 1 % для моделирования на сетках 72×148 и 92×182 или 92×182 и 102×212 . Сетка с подходящим разрешением для рассматриваемой задачи имела 92×182 узлов и обеспечила хороший компромисс между вычислительными ресурсами и точностью моделирования.

Результаты и обсуждение

В настоящей статье представлены результаты исследования наножидкости, где вода является базовой жидкостью, число $Pr = 6,2$, объемная доля наночастиц меди (Φ) изменяется в пределах от 0 до 0,1, а число Рэлея — от 10^3 до 10^6 . Исследовалось влияние дискретного нагрева для двух нагревателей одинаковой длины и влияние длины этих нагревателей.

Верификация модели

Для проверки результатов расчетов, представленной численной методикой, проведено их сравнение с результатами численного моделирования цилиндрической полости с дискретными нагревателями на внутренней стенке, полученными другими авторами.

На рис. 3 приведено сравнение среднего числа Нуссельта из настоящей работы с данными, полученными в работе [16] для параметров $A_T = 2$, $\lambda = 2,0$, $\varepsilon_1 = 0,2$ и $\varepsilon_2 = 0,2$ при различных числах Рэлея. Видно, что эти данные хорошо согласуются между собой.

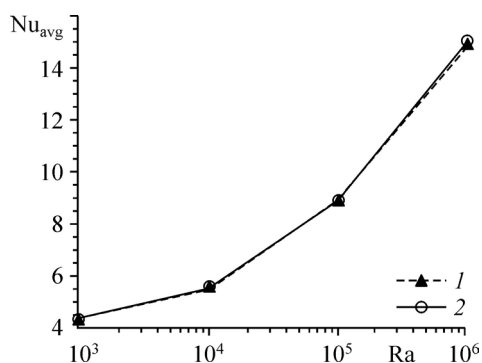


Рис. 3. Сопоставление результатов численного моделирования для среднего числа Нуссельта как функции числа Ra для параметров $A_T = 2$, $\lambda = 2,0$, $\varepsilon_1 = 0,2$, $\varepsilon_2 = 0,2$.

1 — данные настоящей работы,
2 — данные исследования [16].

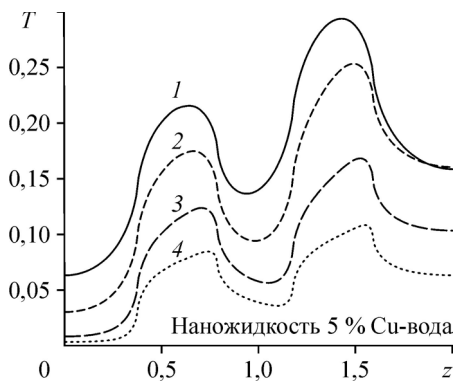


Рис. 4. Температурные профили при различных числах Рэлея. $Ra = 10^3$ (1), 10^4 (2), 10^5 (3), 10^6 (4).

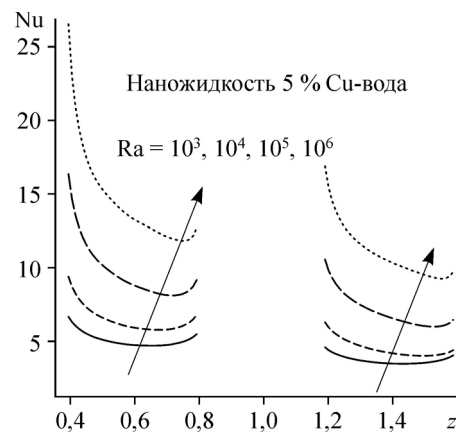


Рис. 5. Изменение локального числа Нуссельта при различных числах Рэлея.

Влияние числа Рэлея

На рис. 4 изображены температурные профили, вычисленные при различных числах Рэлея. Максимальная температура на нагревателях определяется числом Рэлея, и этот максимум наблюдается для верхнего нагревателя. Видно, что максимальная температура возле нагревателя уменьшается с ростом числа Рэлея. Такое поведение объясняется сменой механизма теплообмена при переходе от низких чисел Рэлея (проводимость) к высоким числам Рэлея (конвективные потоки).

На рис. 5 изображены результаты по оценке влияния числа Рэлея, которое является важным параметром для описания теплоотдачи от поверхности каждого нагревателя. Моделирование показывает, что для наножидкости, имеющей 5 объемных процентов наночастиц меди, локальное число Нуссельта (для нагревателя) возрастает с ростом числа Ra . В случае, когда $\varepsilon = 1$, локальное число Нуссельта (Nu) определено для каждого нагревателя, что позволяет изучить интенсивность теплообмена в кольцевом канале. В целом, рост числа Рэлея улучшает естественную конвекцию наножидкости и, следовательно, способствует усилению теплообмена.

На рис. 6 показаны линии тока и изотермы для наножидкости (Cu в воде при $\Phi = 0,05$) для источников тепла с длиной $\varepsilon = 1$ (при различных числах Рэлея). Изменение линий тока, особенно появление внутреннего вихря, а также искажение изотерм, указывают на то, что число Рэлея оказывает отрицательное влияние на рассматриваемый вид течения. Внутренний вихрь при низких числах Рэлея не возникает.

Влияние длин нагревателей

Пусть два нагревателя размещены на внутренней стенке кольцевого канала (рис. 1) и длина верхнего нагревателя варьируется относительно фиксированной длины нижнего нагревателя ($\varepsilon_2 = 0,2$, $\varepsilon = L_1/L_2 = 0,5, 1, 1,5$). Цель исследования — определить влияние размера нагревателей на естественную конвекцию в вертикально ориентированном кольцевом канале. Необходимо учитывать, что при оценке тепловых режимов для электронных элементов важно знать максимальную температуру на нагревателях.

На рис. 7 показано изменение температурного профиля для различных длин нагревателей, определяемых параметром ε ($\varepsilon = 0,5, 1, 1,5$), для числа Рэлея, равного 10^4 . Вид профиля показывает, что максимальная температура достигается в зоне возле верхнего нагревателя, и эта величина возрастает с увеличением длины нагревателя. Максимальное

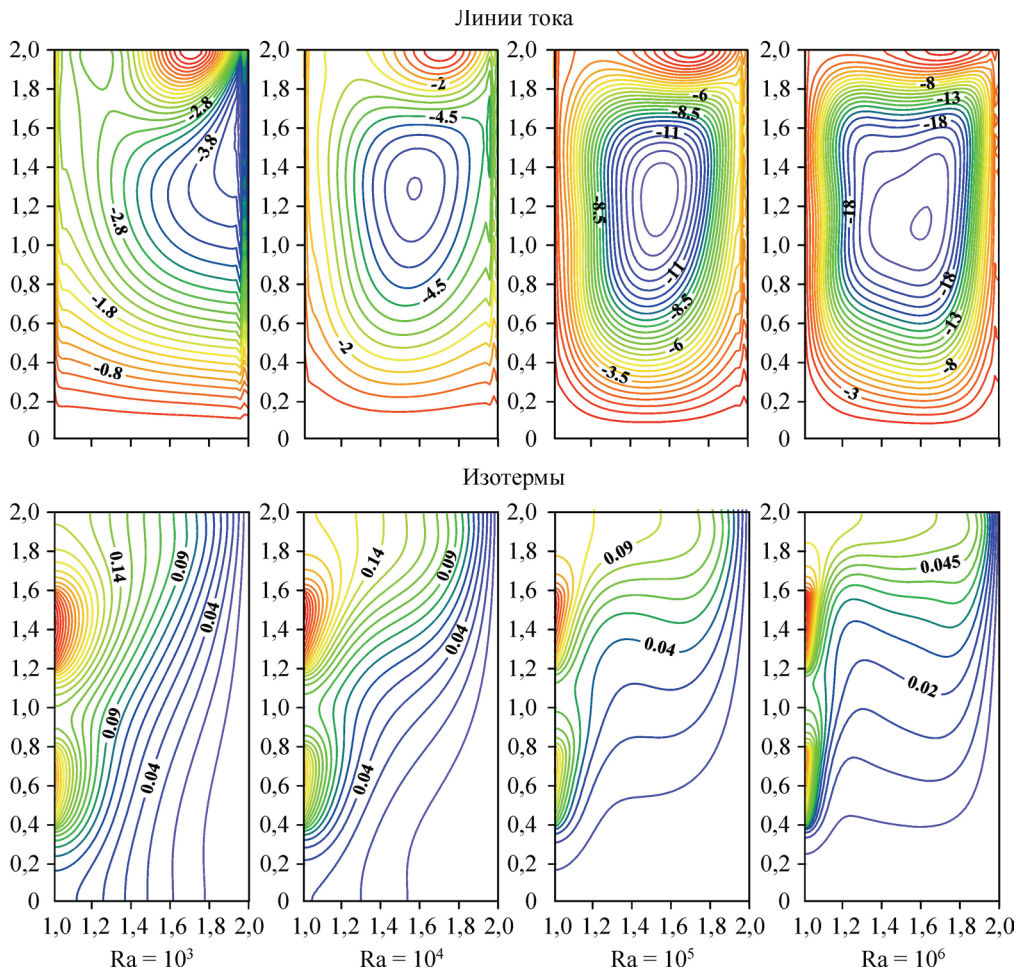


Рис. 6. Влияние числа Ra на линии тока и изотермы для наножидкости (наночастицы Cu в воде) при объемной доле $\Phi = 0,05$ и при $\varepsilon = 1$.

значение температуры зависит от числа Рэлея и длин нагревателей. График изменения температуры показывает, что максимум температуры проявляется возле верхнего нагревателя при увеличении его длины. Локальное и среднее число Нуссельта — самые важные параметры при теплофизических расчетах для диссипации тепла от дискретных нагревателей.

Изменение локального числа Нуссельта вдоль поверхности нагревателя показано на рис. 8 для конфигураций с $\varepsilon = 0,5, 1, 1,5$ при $Ra = 10^4$. Для числа Рэлея $Ra = 10^4$ теплоотдача от верхнего нагревателя становится сильнее при его малой длине. Значение максимального числа Нуссельта на поверхности нижнего нагревателя выше, чем для верхнего

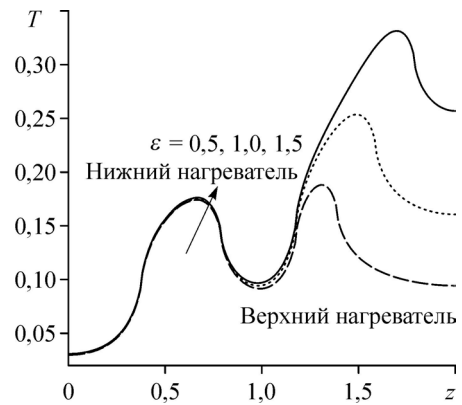


Рис. 7. Температурные профили при различных ε для $Ra = 10^4$.

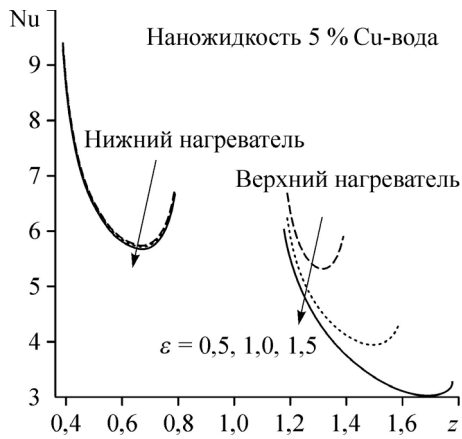


Рис. 8. Изменение локального числа Нуссельта вблизи нагревателей при $\varepsilon = 0,5, 1$ и $1,5$.

нагревателя. На рисунке изменение для числа Нуссельта вдоль нижнего нагревателя не очень заметно из-за малых размеров, однако сравнивая локальные числа Нуссельта, можно отметить, что максимум локального числа Нуссельта на нижнем нагревателе выше, чем у верхнего нагревателя.

Линии тока и изотермы для наножидкости с объемной долей наночастиц меди $\Phi = 0,05$ изображены на рис. 9 для $Ra = 10^4$ при различной длине источников тепла: $\varepsilon = 1, 0,5$ и $1,5$. Изменение геометрии линий тока и деформация изотерм, особенно вблизи нагревателей, говорит о том, что длина нагревателей влияет на этот тип течения.

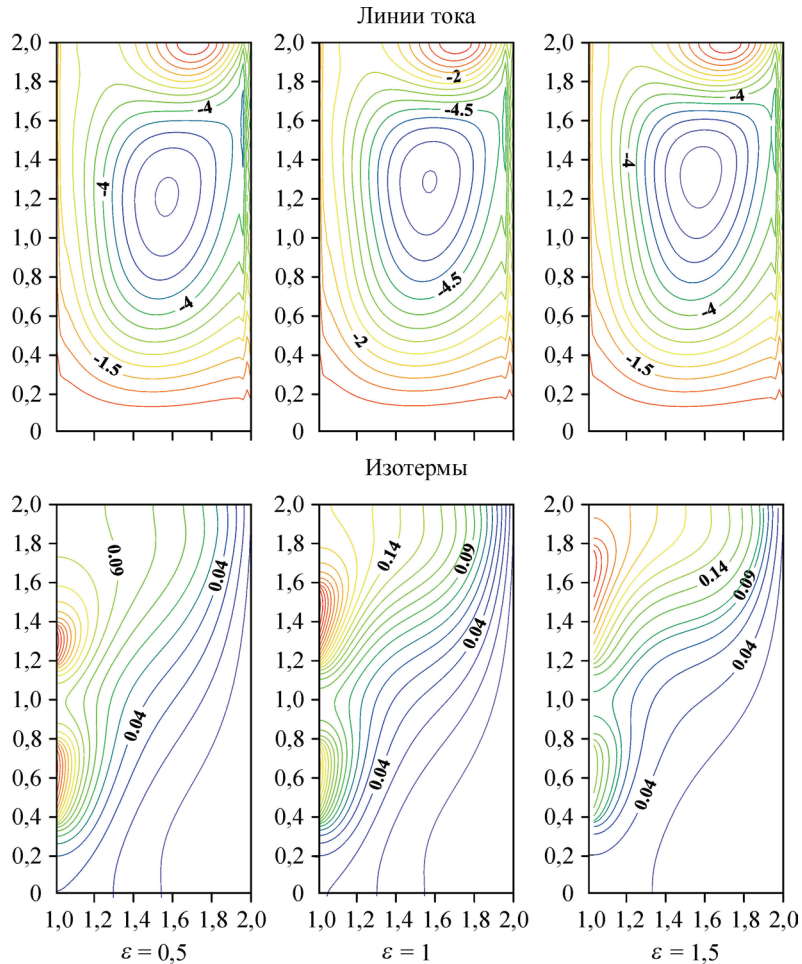


Рис. 9. Влияние длины нагревателя на линии тока и изотермы для наножидкости с $\Phi = 0,05$ при длинах $\varepsilon = 0,5, 1, 1,5$.

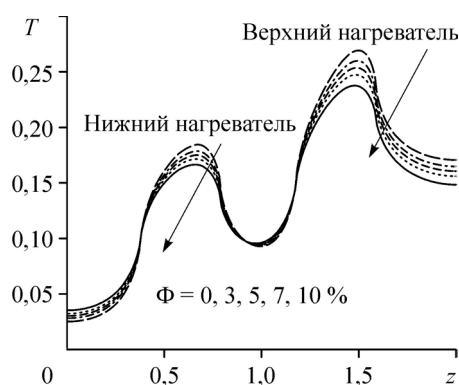


Рис. 10. Температурные профили для наножидкости при различной объемной доле частиц Cu. $\varepsilon = 1$, $Ra = 10^4$.



Рис. 11. Изменение локального числа Нуссельта при различных объемных долях наночастиц. $\varepsilon = 1$, $Ra = 10^4$.

Влияние объемной доли наночастиц

На рис. 10 показаны температурные профили наножидкости с различной объемной долей наночастиц при $\varepsilon = 1$ и $Ra = 10^4$. С увеличением объемной доли наночастиц с 0 до 0,1 наблюдается снижение максимальной температуры. Видно, что температура для верхнего нагревателя выше, чем для нижнего нагревателя.

На рис. 11 показано локальное число Нуссельта при $\varepsilon = 1$, $A_r = 2$, $\lambda = 2$ и $Ra = 10^4$, которое изменяется вдоль поверхности нагревателей в зависимости от объемных долей наночастиц. Видно, что теплоотдача для нижнего нагревателя интенсивнее, чем для верхнего. Кроме того, теплоотдача с поверхности двух обогревателей усиливается с ростом объемной доли наночастиц в наножидкости.

График для среднего числа Нуссельта (Nu_{av}), как функции объемной доли наночастиц (Cu), при числе Рэлея $Ra = 10^4$ показан на рис. 12. При указанной величине Ra среднее число Нуссельта растет с увеличением объемной доли наночастиц в жидкости. Этот рост происходит благодаря улучшению эффективной теплопроводности наножидкости с увеличением концентрации наночастиц.

Выводы

В работе проведено численное исследование естественной конвекции наножидкости в кольцевом канале с двумя дискретными нагревателями на его стенке. Было изучено влияние объемной доли наночастиц, числа Рэлея и длины нагревателей на теплообмен.

По результатам этого исследования можно сделать следующие выводы:

1. Теплоотдача и температура нагревателей зависят от числа Рэлея, объемной доли наночастиц и от длины нагревателей.

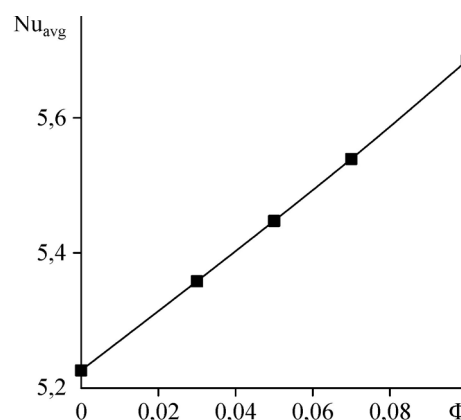


Рис. 12. Влияние объемной доли наночастиц (Cu) на число Нуссельта при $Ra = 10^4$.

2. Размер нагревателей оказывает существенное влияние на интенсивность теплоотдачи.
3. Максимальная температура понижается с увеличением числа Ra, при этом конвективный режим теплообмена является преобладающим.
4. Максимальная температура понижается с увеличением объемной доли наночастиц.
5. Теплоотдача понижается с увеличением размера нагревателя (верхнего или нижнего).
6. Теплоотдача интенсивнее на нагревателе, расположенном у нижней стенки.
7. Усиление теплоотдачи наблюдается для нагревателя с малым размером.
8. Влияние наночастиц на теплоотдачу наблюдается для всех чисел Рэлея.
9. Теплоотдача усиливается с ростом объемной доли наночастиц.

Список обозначений

$A_r = H/D$ — соотношение сторон,	Ra — число Рэлея,
D — длина, м,	r^*, z^* — радиальная и осевая координаты, соответственно,
g — ускорение силы тяжести, m/c^2 ,	r_i, r_0 — внутренний и внешний диаметры, м,
k — теплопроводность, Вт/(м·К),	t — безразмерное время,
L — высота канала, м,	T^* — температура, К,
L_1 — характерная длина нижнего нагревателя, м,	T — безразмерная температура,
L_2 — характерная длина верхнего нагревателя, м,	u^* — радиальная компонента скорости, м/с,
Nu_{avg} — среднее число Нуссельта,	v^* — осевая компонента скорости, м/с,
P — безразмерное давление,	u, v — радиальная и осевая безразмерные скорости соответственно,
Pr — число Прандтля,	
Q — тепловой поток, Вт/м ² ,	

Греческие символы

α — температуропроводность жидкости, м ² /с,	$\varepsilon_1 = L_1/L$ — безразмерная длина верхнего нагревателя,
β — коэффициент теплового расширения жидкости, К ⁻¹ ,	$\varepsilon_2 = L_2/L$ — безразмерная длина нижнего нагревателя,
λ — отношение радиусов,	Φ — объемная доля наночастиц,
ρ — плотность жидкости, кг/м ³ ,	ν — кинематическая вязкость жидкости, м ² /с,
τ — время, с,	ψ — безразмерная функция тока.
$\varepsilon = L_1/L_2$ — отношение длин нагревателей,	

Индексы

f — жидкость (чистая вода),	nf — наножидкость,
C — холодный,	r, z — радиальное и осевое направления соответственно,
H — горячий,	s — твердая фаза (наночастицы меди).

Список литературы

1. Choi U.S. Enhancing thermal conductivity of fluids with nanoparticles // ASME Fluids Engng Division. 1995. Vol. 231. P. 99–105.
2. Khanafer K., Vafai K., Lightstone M. Buoyancy-driven heat transfer enhancement in a two-dimensional enclosure utilizing nanofluids // Int. J. Heat Mass Transfer. 2003. Vol. 46. P. 3639–3653.
3. Masoumi N., Sohrabiand N., Behzadmehr A. A new model for calculating the effective viscosity of nanofluids // J. Physics D. Applied Physics. 2009. Vol. 42. P. 055501-1–055501-6.
4. Murshed S.M.S., Leong K.C., Yang C. Investigations of thermal conductivity and viscosity of nanofluids // Int. J. Thermal Sci. 2008. Vol. 47. P. 560–568.
5. Abu-Nada E. Effects of variable viscosity and thermal conductivity of CuO-water nanofluid on heat transfer enhancement in natural convection, mathematical model and simulation // ASME J. Heat Transfer. 2010. Vol. 132. P. 1–9.
6. Abu-Nada E., Masoud Z., Hijazi A. Natural convection heat transfer enhancement in horizontal concentric annuli using nanofluids // Int. Communications in Heat Mass Transfer. 2008. Vol. 35. P. 657–665.
7. Habibi-Matin M., Pop I. Natural convection flow and heat transfer in an eccentric annulus filled by Copper nanofluid // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2013. Vol. 61. P. 353–364.

8. **Habibi Matin M., Pop I.** Numerical study of mixed convection heat transfer of a nanofluid in an eccentric annulus // Numerical Heat Transfer. Part A. 2014. Vol. 65. P. 84–105.
9. **Mehrizi A.A., Farhadi M., Shayamehr S.** Natural convection flow of Cu-water nanofluid in horizontal cylindrical annuli with inner triangular cylinder using lattice Boltzmann method // Int. Communications in Heat Mass Transfer. 2013. Vol. 44. P. 147–156.
10. **Sankar M., Do Y.** Numerical simulation of free convection heat transfer in a vertical annular cavity with discrete heating // Int. Communications in Heat and Mass Transfer. 2010. Vol. 37. P. 600–606.
11. **Sankar M., Do Y., Ryu S., Jang B.** Cooling of heat sources by natural convection heat transfer in a vertical annulus // Numerical Heat Transfer. Part A. 2015. Vol. 68, No. 8, P. 847–869.
12. **Mebarek-Oudina F.** Numerical modeling of the hydrodynamic stability in vertical annulus with heat Source of different lengths // Engng Sci. and Technology. 2017. Vol. 20, No. 4. P. 1324–1333.
13. **Mebarek-Oudina F., Bessaïh R.** Oscillatory magnetohydrodynamic natural convection of liquid metal between vertical coaxial cylinders // J. Applied Fluid Mechanics. 2016. Vol. 9, No. 6. P. 1655–1665.
14. **Patankar S.V.** Numerical heat transfer and fluid flow. N.-Y.: McGraw-Hill, 1980. 214 p.
15. **Mebarek-Oudina F., Bessaïh R.** Numerical modeling of MHD stability in a cylindrical configuration // J. Franklin Institute. 2014. Vol. 351, No. 2. P. 667–681.
16. **Sankar M., Park J., Do Y.** Natural convection in a vertical annuli with discrete heat sources // Numerical Heat Transfer. Part A. 2011. Vol. 59. P. 494–516.

*Статья поступила в редакцию 30 июня 2017 г.,
после доработки — 5 февраля 2018 г.,
принята к публикации 23 мая 2018 г.*

