

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАСТУЩЕГО ВЯЗКОУПРУГОГО АРМИРОВАННОГО СТЕРЖНЯ, ПОДВЕРЖЕННОГО СТАРЕНИЮ

И. Х. АРУТЮНЯН, М. Н. МИХАЙЛОВ, В. Д. ПОТАПОВ

(Москва)

Исследуется устойчивость растущих неоднородно стареющих вязкоупругих армированных стержней. Уравнения состояния вязкоупругого материала описываются уравнениями теории вязкоупругости неоднородно стареющих тел [1], а деформации и напряжения в арматуре связаны между собой законом Гука. Стержень находится под действием собственного веса и сосредоточенной силы, меняющейся во времени.

Получено условие устойчивости стержня на полубесконечном интервале времени. Определение устойчивости соответствует определению устойчивости динамических систем по Ляпунову. Исследована задача устойчивости стержня на конечном интервале времени. Принятая постановка задачи устойчивости на конечном интервале времени опирается на исследования устойчивости динамических систем Н. Г. Четаева.

Устойчивость неоднородно стареющих армированных вязкоупругих стержней в том случае, когда поперечное сечение и длина стержня в процессе деформирования оставались неизменными, изучалась в [2, 3].

1. Модель растущего армированного вязкоупругого стержня, подверженного старению. Рассмотрим полый стержень, который растет как в продольном, т. е. вдоль оси стержня, так и в поперечном направлении. Для простоты будем предполагать, что поперечное сечение стержня имеет две оси симметрии, причем арматура распределена симметрично относительно этих осей. Не нарушая общности, будем считать, что начальная длина стержня l_0 равна нулю.

Пусть задан закон изменения длины стержня во времени $l(t)$, причем $l(t)$ — ограниченная, кусочно-непрерывная, монотонно возрастающая функция. Обозначим через $\tau_1^*(s)$ время, по истечении которого длина растущего стержня достигает значения s . Очевидно, что $\tau_1^*(s) = l^{-1}(s)$. Здесь l^{-1} — обратная к l функция.

Будем считать, что длина армирующих элементов в рассматриваемый момент времени равна длине стержня $l(t)$. В действительности длина армирующих элементов может превышать длину основного материала, как это часто бывает, например, при изготовлении высоких железобетонных колонн. В случае необходимости эта особенность может быть учтена при составлении уравнений, описывающих процесс деформирования стержня.

Кинематика роста стержня в поперечном направлении может быть различной. Два возможных ее механизма подробно рассмотрены в [4]. Принимая тот или иной механизм роста, можно определить время зарождения основного материала $\tau^*(\rho)$ в окрестности точки с координатами $\rho = \{x, y, s\}$.

Начиная с момента времени T_0 на конце стержня происходит образование тела, которое для простоты будем считать абсолютно жестким (диском). Обозначим высоту диска к моменту времени t через $Z(t)$.

Уравнение состояния для неоднородно стареющего вязкоупругого материала при одноосном напряженном состоянии примем в форме [1]

$$\sigma(\rho, t) = E(t - \tau^*(\rho)) \varepsilon(\rho, t) - \int_{\tau^*(\rho)}^t R(t - \tau^*(\rho), \tau - \tau^*(\rho)) \varepsilon(\rho, \tau) d\tau,$$

где σ , ε — напряжение и деформация в растущем стержне; $E(t)$ — модуль упруго-мгновенных деформаций; $R(t, \tau)$ — ядро релаксации стареющего вязкоупругого материала стержня.

Напряжения σ_a и деформации ε_a в арматуре удовлетворяют закону Гука, т. е. имеет место равенство

$$\sigma_a(t, \rho) = \bar{E}_a \varepsilon_a(t, \rho),$$

где \bar{E}_a — модуль упругости армирующего материала.

2. Уравнение движения растущего армированного вязкоупругого стержня. Процесс деформирования растущего вязкоупругого стержня, при котором его ось сохраняет прямолинейное вертикальное положение, можно рассматривать как медленное движение. Будем называть его невозмущенным движением. Далее предположим, что при отсутствии внешних нагрузок и при условии невесомости стержня его ось имеет в плоскости yOs начальное искривление (начальное возмущение), описываемое функцией $w_0 = w_0(s)$. Под действием собственного веса и веса тяжелого диска стержень получает дополнительный прогиб (искромое возмущение) $w = w(t, s)$, который зависит от координаты s и времени t . В результате элементы стержня перемещаются не только в вертикальном, но и в горизонтальном направлении. Такое движение стержня будем называть возмущенным.

Изгибающий момент, действующий в плоскости yOs в сечении стержня с координатой s в момент времени t , равен

$$(2.1) \quad M(t, s) = \int_{F_a(s)} E_a \varepsilon_a(t, \rho) y dF + \int_{F(t, s)} \left[F(t - \tau^*(\rho)) \varepsilon(\rho, t) - \int_{\tau^*(\rho)}^t R(t - \tau^*(\rho), \tau - \tau^*(\rho)) \varepsilon(\rho, \tau) d\tau \right] y dF.$$

Здесь $F(t, s)$, $F_a(s)$ — площади поперечного сечения вязкоупругого материала и арматуры в сечении с координатой s в момент времени t .

При нахождении деформаций будем предполагать, что поперечное сечение стержня, положение которого в момент времени $\tau_1^*(s)$ определялось плоским внутренним контуром, перпендикулярным к изогнутой оси стержня, остается плоским и перпендикулярным к изогнутой оси стержня и в момент времени t . Другими словами, материальные точки, зародившиеся в момент времени $\tau^*(\rho)$ и оказавшиеся в одной перпендикулярной к изогнутой оси стержня плоскости с другими точками, зародившимися в промежутке $(\tau_1^*(s), \tau^*(\rho))$, остаются с ними в одной плоскости в любой момент времени t , и эта плоскость перпендикулярна к изогнутой оси стержня.

В силу этой гипотезы для деформации имеем выражение

$$(2.2) \quad \varepsilon(\rho, t) = \Delta \kappa(t, s) y,$$

где $\Delta \kappa(t, s) = \kappa(t, s) - \kappa(\tau^*(\rho), s)$, а

$$(2.3) \quad \kappa(t, s) = \frac{\partial^2}{\partial s^2} [w(t, s) + w_0(s)] \left\{ 1 - \left[\frac{\partial w(t, s)}{\partial s} + \frac{\partial w_0(s)}{\partial s} \right]^2 \right\}^{-1/2} - \frac{\partial^2 w_0(s)}{\partial s^2} \left\{ 1 - \left[\frac{\partial w_0(s)}{\partial s} \right]^2 \right\}^{-1/2}$$

— изменение кривизны стержня в момент времени t по сравнению с начальной кривизной в сечении с координатой s .

Если прогиб стержня $w(t, s) + w_0(s)$ мал, т. е. можно пренебречь величиной $\left\{ \frac{\partial}{\partial s} [w(t, s) + w_0(s)] \right\}$ по сравнению с единицей, тогда

$$(2.4) \quad \kappa(t, s) = \partial^2 w(t, s) / \partial s^2$$

и зависимость (2.1) с учетом выражений (2.2), (2.3) примет вид

$$(2.5) \quad M(t, s) = E_a J_a(s) \Delta \kappa(t, s) + EJ(t, s) \kappa(t, s) - \int_{F(t, s)} E(t - \tau^*(\rho)) \kappa(\tau^*(\rho), s) y^2 dF - \int_{F(t, s)} \int_{\tau^*(\rho)}^t R(t - \tau^*(\rho), \tau - \tau^*(\rho)) \kappa(\tau, s) d\tau y^2 \times \\ \times dF + \int_{F(t, s)} \int_{\tau^*(\rho)}^t R(t - \tau^*(\rho), \tau - \tau^*(\rho)) \kappa(\tau^*(\rho), s) d\tau y^2 dF,$$

$$\text{при этом } J_a(s) = \int_{F_a(s)} y^2 dF, \quad EJ(t, s) = \int_{F(t, s)} E(t - \tau^*(\rho)) y^2 dF.$$

Как известно,

$$(2.6) \quad R(t, \tau) = \partial L(t, \tau) / \partial \tau,$$

где $L(t, \tau) = E(\tau) - Q(t, \tau)$; $E(\tau)$ — модуль упругомгновенной деформации; $Q(t, \tau)$ — мера релаксации, причем $Q(t, t) = 0$.

Преобразуем последнее слагаемое в равенстве (2.5) с учетом соотношения (2.6)

$$\int_{F(t, s)} \int_{\tau^*(\rho)}^t R(t - \tau^*(\rho), \tau - \tau^*(\rho)) \kappa(\tau^*(\rho), s) d\tau y^2 dF = \\ = \int_{F(t, s)} \kappa(\tau^*(\rho), s) [E(t - \tau^*(\rho)) - L(t - \tau^*(\rho), 0)] y^2 dF.$$

Тогда выражение (2.5) можно представить в виде

$$M(t, s) = E_a J_a(s) \Delta \kappa(t, s) + EJ(t, s) \kappa(t, s) - \int_{F(t, s)} \left[L(t - \tau^*(\rho), 0) \kappa(\tau^*(\rho), s) - \int_{\tau^*(\rho)}^t R(t - \tau^*(\rho), \tau - \tau^*(\rho)) \kappa(\tau, s) d\tau \right] y^2 dF.$$

Учитывая конкретный механизм роста стержня, можно изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_{\tau_1^*(s)}^t \int_{\tau^*(\rho)}^t R(t - \tau^*(\rho), \tau - \tau^*(\rho)) \kappa(\tau, s) d\tau y^2(\tau^*(\rho)) dF(\tau^*(\rho)) = \\ = \int_{\tau_1^*(s)}^t \tilde{R}(t, \tau) \kappa(\tau, s) d\tau,$$

где $\tilde{R}(t, \tau) = \int_{\tau_1^*(s)}^{\tau} R(t - \tau^*(\rho), \tau - \tau^*(\rho)) y^2(\tau^*(\rho)) dF(\tau^*(\rho)).$

Функцию $\tilde{R}(t, \tau)$ можно назвать приведенным ядром релаксации вязкоупругого материала стержня в сечении с координатой s .

Непосредственной подстановкой находим, что для вязкоупругого армированного стержня имеет место равенство

$$(2.7) \quad M(t, s) = E_a J_a(s) \Delta \kappa(t, s) + \tilde{L}(t, t, s) \kappa(t, s) - \int_{\tau_1^*(s)}^t \frac{\partial \tilde{L}(t, \tau, s)}{\partial \tau} \kappa(\tau, s) d\tau,$$

где $\tilde{L}(t, \tau, s) = \int_{\tau_1^*(s)}^{\tau} L(t - \xi, \tau - \xi) y^2(\xi) dF(\xi).$

Далее запишем уравнение квазистатического равновесия стержня

$$(2.8) \quad \frac{\partial^2 M(t, s)}{\partial s^2} = - \frac{\partial}{\partial s} \left\{ N(t, s) \frac{\partial}{\partial s} [w(t, s) + w_0(s)] \right\},$$

где

$$N(t, s) = \int_s^{l(t)} \int_{F(t, z)} p(\rho') dF dz + qZ(t),$$

$p(\rho')$ — удельный вес материала стержня, $\rho' = \{x, y, z\}$; q — вес единицы длины диска, причем $Z(t) \equiv 0$ при $t \leq T_0$.

Если верхний конец стержня свободен, то уравнение (2.8) примет вид

$$(2.9) \quad \frac{\partial}{\partial s} \left[E_a J_a(s) \Delta \kappa(t, s) + \tilde{L}(t, t, s) \kappa(t, s) - \int_{\tau_1^*(s)}^t \frac{\partial \tilde{L}(t, \tau, s)}{\partial \tau} \kappa(\tau, s) d\tau \right] = \\ = - N(t, s) \frac{\partial}{\partial s} [w(t, s) + w_0(s)].$$

В частном случае, когда рост стержня происходит только в направлении оси s , уравнение (2.9) преобразуется к форме

$$(2.10) \quad \frac{\partial}{\partial s} \left[E_a J_a(s) \Delta \kappa(t, s) + E(t - \tau_1^*(s)) J(s) \kappa(t, s) - J(s) \int_{\tau_1^*(s)}^t R(t - \tau_1^*(s), \tau - \tau_1^*(s)) \kappa(\tau, s) d\tau - J(s) L(t - \tau_1^*(s), 0) \kappa(\tau_1^*(s), s) \right] = - N(t, s) \frac{\partial}{\partial s} [w(t, s) + w_0(s)].$$

Решения уравнений (2.9), (2.10) в случае заделки нижнего конца должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$(2.11) \quad s = 0: \quad w(t, s) = \frac{\partial w(t, s)}{\partial s} = 0, \\ s = l(t): \quad M(t, s) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < T_0, \\ \frac{1}{2} q Z^2(t) \frac{\partial}{\partial s} [w(t, s) + w_0(s)], & t > T_0. \end{cases}$$

Полученное интегродифференциальное уравнение (2.9) является уравнением возмущенного движения армированного неоднородно стареющего вязкоупругого растущего стержня.

3. Вариационная постановка задачи о продольном изгибе растущего армированного вязкоупругого стержня. При получении решения задач вязкоупругости иногда оказываются целесообразными вариационные методы [5]. Они особенно эффективны в тех случаях, когда неприменим принцип Вольтерра. Задача о наращивании вязкоупругих тел (в частности, рассматриваемая здесь задача о растущем стержне) является одним из таких примеров.

На основании принципа Лагранжа работа внутренних сил δU в теле на возможных перемещениях, согласующихся с геометрическими граничными условиями, должна быть равна работе внешних сил δA на тех же перемещениях:

$$(3.1) \quad \delta U = \delta A.$$

Рассматривая вариации мгновенных значений перемещений, а следовательно, и деформаций $\delta \varepsilon(t, \rho)$, запишем

$$\delta U = \int_{V_a(t)+V(t)} \sigma(t, \rho) \delta \varepsilon(t, \rho) dV$$

или

$$(3.2) \quad \delta U = \int_{V_a(t)} E_a \varepsilon_a(t, \rho) \delta \varepsilon(t, \rho) dV + \int_{V(t)} \left[E(t - \tau^*(\rho)) \varepsilon(t, \rho) - \int_{\tau^*(\rho)}^t R(t - \tau^*(\rho), \tau - \tau^*(\rho)) \varepsilon(\tau, \rho) d\tau \right] \delta \varepsilon(t, \rho) dV,$$

где $V(t)$ — объем, занимаемый вязкоупругим материалом; $V_a(t)$ — объем, занимаемый арматурой.

Введем потенциалы

$$u_0 = \frac{1}{2} E(t - \tau^*(\rho)) \varepsilon^2(t, \rho), \quad u_a = \frac{1}{2} E_a \varepsilon_a^2(t, \rho),$$

$$u_1 = -\varepsilon(t, \rho) \int_{\tau^*(\rho)}^t R(t - \tau^*(\rho), \tau - \tau^*(\rho)) \varepsilon(\tau, \rho) d\tau.$$

Отсюда следует

$$\sigma(t, \rho) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon(t, \rho)} (u_0 + u_1), \quad \sigma_a(t, \rho) = \frac{\partial u_a}{\partial \varepsilon_a(t, \rho)}.$$

Тогда

$$\delta U = \int_{V(t)} \delta \varepsilon(t, \rho) \frac{\partial}{\partial \varepsilon(t, \rho)} (u_0 + u_1) dV + \int_{V_a(t)} \delta \varepsilon(t, \rho) \frac{\partial u_a}{\partial \varepsilon_a(t, \rho)} dV.$$

Определяя вариацию деформаций $\delta \varepsilon(t, \rho)$ выражением

$$\delta \varepsilon(t, \rho) = \delta \kappa(t, s) y, \quad \delta \kappa(t, s) \approx \partial^2 \delta w(t, s) / \partial s^2,$$

представим равенство (3.2) в виде

$$(3.3) \quad \delta U = \int_0^{l(t)} \delta \kappa(t, s) \int_{F_a(s)} E_a \varepsilon_a(t, \rho) y dF ds + \int_0^{l(t)} \delta \kappa(t, s) \int_{F(t,s)} \left[E(t - \tau^*(\rho)) \varepsilon(t, \rho) - \int_{\tau^*(\rho)}^t R(t - \tau^*(\rho), \tau - \tau^*(\rho)) \varepsilon(\tau, \rho) d\tau \right] y dF ds$$

$$\text{или } \delta U = \int_0^{l(t)} M(t, s) \delta \kappa(t, s) ds.$$

Очевидно, что равенство (3.1) является условием минимальности функционала

$$\mathcal{E} = U - A, \quad \text{где } A \text{ — работа внешних сил; } U = \int_{V_a(t)} u_a dV + \int_{V(t)} (u_0 + u_1) dV.$$

Рассматривая стержень, для которого выполняются краевые условия (2.11), найдем работу A внешних сил, совершаемую ими при деформировании стержня. Она складывается из работы распределенных сил собственного веса и веса диска. Ограни-

чиваясь случаем малых перемещений, получим

$$\begin{aligned}
 A(t) = & \frac{1}{2} \int_{V_a(t)+V(t)} p(\rho) \int_0^s \left\{ \left[\frac{\partial w(t, \xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial w_0(\xi)}{\partial \xi} \right]^2 - \left[\frac{\partial w(\tau^*(\rho'), \xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial w_0(\xi)}{\partial \xi} \right]^2 \right\} d\xi dV + \\
 & + q \int_0^{Z(t)} \left\{ - \int_0^{l(t)} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w(t, \xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial w_0(\xi)}{\partial \xi} \right)^2 \right] d\xi + \right. \\
 & + \int_0^{l(\tau^*(Z))} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w(\tau^*(Z), \xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial w_0(\xi)}{\partial \xi} \right)^2 \right] d\xi + \frac{Z}{2} \left[\left(\frac{\partial w(t, s)}{\partial s} + \frac{\partial w_0(s)}{\partial s} \right)^2 \right]_{s=l(t)} - \\
 & \left. - \left(\frac{\partial w(\tau^*(Z), s)}{\partial s} + \frac{\partial w_0(s)}{\partial s} \right)^2 \right]_{s=l(\tau^*(Z))} \Big\} dZ,
 \end{aligned}$$

где $\tau^*(Z)$ — момент зарождения элементов жесткого диска с координатой Z ; $\tau^*(\rho')$ — момент зарождения элемента стержня с координатами $\rho' = \{x, y, \xi\}$. Здесь предполагается, что $Z(t) = 0$ при $t \leq T_0$.

Вариация работы внешних сил равна

$$\begin{aligned}
 (3.4) \quad \delta A(t) = & \int_{V_a(t)+V(t)} p(\rho) \int_0^s \left[\frac{\partial w(t, \xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial w_0(\xi)}{\partial \xi} \right] \frac{\partial \delta w(t, \xi)}{\partial \xi} d\xi dV + \\
 & + q \int_0^{Z(t)} \left\{ \int_0^{l(t)} \left[\frac{\partial w(t, \xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial w_0(\xi)}{\partial \xi} \right] \frac{\partial \delta w(t, \xi)}{\partial \xi} d\xi + \right. \\
 & \left. + Z \left[\frac{\partial w(t, s)}{\partial s} + \frac{\partial w_0(s)}{\partial s} \right] \frac{\partial \delta w(t, s)}{\partial s} \right]_{s=l(t)} \Big\} dZ.
 \end{aligned}$$

Если вариация прогиба $\delta w(t, s)$ удовлетворяет при $s = 0$ условиям $\delta w(t, s) = \partial \delta w(t, s) / \partial s = 0$, то можно показать, что рассмотренная вариационная задача эквивалентна краевой задаче (2.9), (2.14).

4. Устойчивость растущего армированного вязкоупругого стержня на полубесконечном интервале. В дальнейшем будем считать, что в каждый фиксированный момент времени соблюдается условие устойчивости упругого стержня. Поэтому

$$1 < \lambda_1, t \leq T_0; \quad 1 < \lambda_2, t > T_0,$$

где λ_1 и λ_2 — минимальные собственные значения следующих краевых задач:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[EJ_{\text{пр}}(t, s) \frac{\partial^2 w(t, s)}{\partial s^2} \right] + \lambda_1 N_p(t, s) \frac{\partial w(t, s)}{\partial s} = 0, \quad t \leq T_0,$$

$$s = 0: w(t, s) = \frac{\partial w(t, s)}{\partial s} = 0; \quad s = l(t): \frac{\partial^2 w(t, s)}{\partial s^2} = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[EJ_{\text{пр}}(t, s) \frac{\partial^2 w(t, s)}{\partial s^2} \right] + N_p(t, s) \frac{\partial w(t, s)}{\partial s} + \lambda_2 q Z(t) \frac{\partial w(t, s)}{\partial s} = 0, \quad t > T_0,$$

$$s = 0: w(t, s) = \frac{\partial w(t, s)}{\partial s} = 0; \quad s = l(t): EJ_{\text{пр}}(t, s) \frac{\partial^2 w(t, s)}{\partial s^2} = q \frac{Z^2(t)}{2} \frac{\partial w(t, s)}{\partial s},$$

$EJ_{\text{пр}}(t, s) = E_a J_a(s) + \int_{F(t, s)} E(t - \tau^*(\rho)) y^2 dF$ — приведенная жесткость поперечного сечения стержня; $N_p(t, s)$ — нормальная сила, создаваемая собственным весом стержня.

Предположим, что для механических и геометрических характеристик стержня и сосредоточенной силы $qZ(t)$ справедливы следующие предельные соотношения ($R^0(t - \tau)$ — некоторое разностное ядро):

$$(4.1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} E(t - \tau^*(\rho)) = E_0, \quad \lim_{\substack{\tau \rightarrow \infty \\ t > \tau}} R(t - \tau^*(\rho), \tau - \tau^*(\rho)) = R^0(t - \tau),$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} l(t) = l_0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} F(t, s) = F_0(s),$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} EJ_{\text{пр}}(t, s) = EJ_0(s), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} qZ(t) = qZ_0.$$

Тогда, не пользуясь методикой, предложенную в [3], можно показать, что в этом случае растущий вязкоупругий стержень, обладающий свойством старения, устойчив на полубесконечном промежутке времени в смысле Ляпунова, если устойчив упругий стержень, геометрические характеристики которого определяются предельными значениями (4.1), а модуль упругости основного материала равен длительному модулю упругости

$$E_* = E_0 - \int_0^{\infty} R^0(\eta) d\eta.$$

5. Устойчивость растущего армированного вязкоупругого стержня на конечном интервале. Принципиальное значение в оценке поведения растущего вязкоупругого стержня приобретает исследование его устойчивости на конечном интервале времени. Отметим, что здесь возможны различные постановки задачи. Рассмотрим две из них.

1. Пусть задан конечный интервал времени $[0, T]$. Требуется определить критические значения параметров, определяющих рост стержня (например, значения скоростей, характеризующих рост стержня в продольном и поперечном направлениях, закон изменения действующей нагрузки во времени и т. д.), при которых максимальный дополнительный прогиб $w(t, s)$ не превышает наперед заданного значения w^* :

$$\sup_s \sup_t |w(t, s)| \leq w^*, \quad t \in [0, T], \quad s \in [0, l(t)].$$

2. Известна величина предельно допустимого значения прогиба w^* . Требуется определить момент времени t^* , называемый критическим временем, когда максимальная величина прогиба стержня впервые становится равной w^* :

$$\max_t \bar{w}(t) = w^*, \quad \bar{w}(t) = \max_s |w(t, s)|, \quad s \in [0, l(t)].$$

Для исследования поставленной задачи устойчивости необходимо получить решение краевой задачи (2.9), (2.11) или вариационной задачи (3.4).

Рассмотрим растущий стержень с поперечным сечением в виде кругового кольца, внутренний радиус которого r_0 постоянен, а внешний радиус произвольного сечения с координатой s изменяется по закону $r = r(t, s)$. Пусть ядро релаксации стареющего вязкоупругого материала есть [6]

$$(5.1) \quad R(t, \tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} \{ \omega(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}] \}, \quad E(t) = E_0 = \text{const},$$

где $\omega(\tau)$ — функция старения; γ — некоторая константа.

Тогда имеем

$$\tilde{L}(t, \tau, s) = \mu_1(\tau, s) + \mu_2(\tau, s)e^{-\gamma(t-\tau)},$$

где

$$\mu_1(\tau, s) = \pi \int_{r_0}^{r(\tau, s)} [E_0 - \omega(\tau - \tau^*(r, s))] r^3 dr,$$

$$\mu_2(\tau, s) = \pi \int_{r_0}^{r(\tau, s)} \omega(\tau - \tau^*(r, s)) r^3 dr,$$

$\tau^*(r, s)$ — момент зарождения тонкого кольцевого элемента радиуса r в сечении с координатой s .

Для ядер релаксации вида (5.1) интегродифференциальное уравнение (2.9) приводится к следующему дифференциальному уравнению в частных производных:

$$[E_a J_a (\ddot{x} + \gamma \dot{x}) + (\mu_1 + \mu_2) \dot{x} + (\dot{\mu}_1 + \dot{\mu}_2 + \gamma \mu_1) x]' = -[N(w + w_0)]' - \gamma [N(w + w_0)]'$$

с граничными условиями (2.11) и начальными условиями, вытекающими из уравнения (2.9):

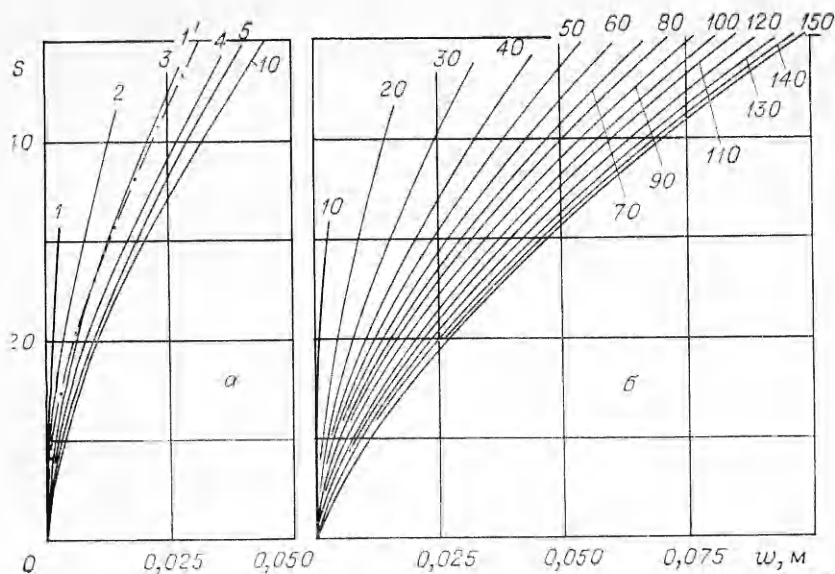
$$t = \tau_1^*(s): [(\mu_1 + \mu_2) x]' = -N(w + w_0)'$$

$$[E_a J_a \dot{x} + (\mu_1 + \mu_2) x + \gamma \mu_1 x]' = -[N(w + w_0)]' - \gamma N(w + w_0)'$$

Здесь точкой обозначена производная по времени t , а штрихом — по координате s .

6. Численный пример и анализ полученных результатов. Рассмотрим стержень кольцевого поперечного сечения, внутренний радиус которого сохраняется постоянным по длине, а внешний радиус и длина меняются во времени по законам

$$(6.1) \quad r(t, s) = r_0 + \frac{k}{\alpha} v_0 \{ 1 - \exp[-\alpha(t - \tau_1^*(s))] \};$$



Ф и г. 1

$$(6.2) \quad l(t) = \frac{v_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}),$$

где k , α , v_0 — некоторые константы.

Функцию $\omega(\tau)$ примем в форме

$$\omega(\tau) = c_0 + A_0 e^{-\beta \tau}, \quad c_0, A_0 - \text{const.}$$

Дополнительный прогиб находится как решение вариационной задачи, причем начальный и дополнительный прогибы стержня представляются в виде конечных сумм (n — натуральное число)

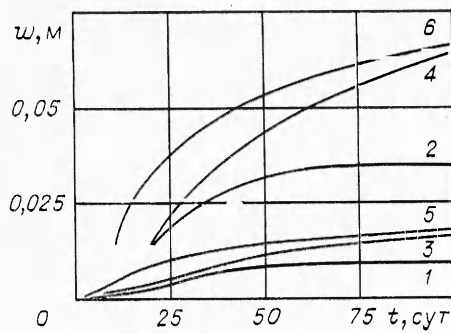
$$(6.3) \quad w_0(s) = \sum_{i=1}^n a_{i0} s^{i+1}, \quad w(t, s) = \sum_{i=1}^n a_i(t) s^{i+1}.$$

Вычисление интегралов по длине, фигурирующих в соотношениях (3.3), (3.4), производится с помощью формулы Симпсона, а интегралы по времени заменяются конечными суммами с помощью формул трапеций. Как показали численные исследования, для получения удовлетворительных результатов можно ограничиться удержанием в выражениях (6.3) двух-трех первых членов, а по длине разбивать стержень на 8—16 равных частей. Что же касается выбора шага по времени, то он зависит как от скорости роста стержня, так и от реологических свойств материала и потому в каждом конкретном случае должен выбираться особо.

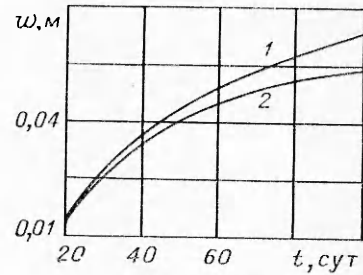
На фиг. 1—5 представлены результаты решения задачи для стержня со следующими характеристиками: $E_0 = 2 \cdot 10^4$ МПа, $A_0 = 1,5 \cdot 10^4$ МПа, $c_0 = 0,15 \cdot 10^4$ МПа, $v_0/\alpha = 50$ м, $p = 25$ кН/м³, $q = 0$, $a_{10} = 4 \cdot 10^{-5}$ м, $a_{20} = \dots = 0$, $\beta = 0,005$ 1/сут, $r_0 = 0,25$ м, $k = 0,005$.

Интересно отметить, что величина прогиба даже упругого стержня может зависеть в пределе от характера его роста. Так, если рассмотреть нерастущий стержень длиной 50 м, внешним диаметром 1,0 м и нагруженный собственным весом, то линия дополнительного прогиба очерчивается кривой I' на фиг. 1, а. Теперь допустим, что рост стержня происходит только в осевом направлении, а его внешний диаметр остается неизменным и равным 1,0 м. В этом случае по мере роста стержня его линия дополнительного прогиба приближается к той же самой кривой I' . Если же рост стержня осуществляется в соответствии с выражениями (6.1), (6.2), то независимо от величины параметра α ($\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \infty$) линии дополнительного прогиба стержня в моменты времени $t' = \alpha t = 1; 2; 3; 4; 5; 10$ имеют вид, показанный на фиг. 1, а кривыми 1—5 и 10. На фиг. 2 показано изменение во времени дополнительного прогиба для сечений А и В с координатами, соответственно равными 19,6735 м (кривая 1) и 43,2332 м (кривая 2) при $v_0 = 5$ м/сут, $\alpha = 0,1$ 1/сут.

Поведение растущего вязкоупругого стержня существенно отличается от поведения растущего упругого стержня. На фиг. 1, б представлены очертания линий дополнительного прогиба, полученные при $\alpha = 0,1$ 1/сут, $v_0 = 5$ м/сут, для $t = 10; 20, \dots, 150$ сут, а на фиг. 2 — кривыми 3, 4 изменение во времени дополнительного прогиба для сечений А и В. Для сравнения на фиг. 2 приведены аналогичные кривые 5, 6, полученные при $\alpha = 0,2$ 1/сут и $v_0 = 10$ м/сут. Как видно, скорость роста стержня оказывает существенное влияние на величину прогиба стержня в каждом сечении.



Ф и г. 2



Ф и г. 3

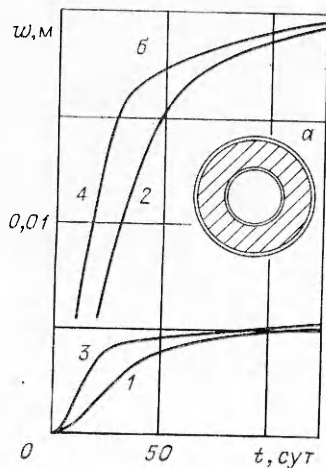
Для оценки влияния скорости старения материала на характеристики прогиба растущего стержня на фиг. 3 показано изменение во времени дополнительного прогиба для сечения B при $\beta = 0,005$ и $0,020$ 1/сут (кривые 1, 2 соответственно), при этом $\alpha = 0,1$ 1/сут, $v_0 = 5$ м/сут. Как видно, увеличение скорости старения материала приводит к значительному снижению прогибов стержня.

Далее рассмотрим вязкоупругий стержень, рост которого происходит в форме, представляющей собой две цилиндрические трубы толщиной 1 см каждая (фиг. 4, a) и диаметрами срединной поверхности, равными соответственно 0,49 и 1,01 м. Эти оболочки вложены одна в другую так, что их продольные оси совпадают. Пространство между ними заполняется вязкоупругим стареющим материалом, причем изменение во времени занимаемого им объема осуществляется в соответствии с выражениями (6.1), (6.2). Материал оболочек упругий с модулем упругости $E_a = 2,1 \cdot 10^5$ МПа. Получающийся таким образом стержень можно считать армированным стержнем при условии связи между оболочками и вязкоупругим материалом, для определения прогиба которого могут быть использованы записанные выше уравнения.

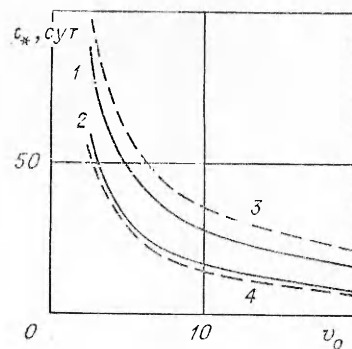
На фиг. 4, b представлены зависимости между дополнительными прогибами стержня в сечениях A и B и временем, отвечающие скоростям роста $\alpha = 0,1$ 1/сут, $v_0 = 5$ м/сут (кривые 1, 2), $\alpha = 0,2$ 1/сут, $v_0 = 10$ м/сут (кривые 3, 4), причем $\beta = 0,005$ 1/сут. Из фиг. 4, b следует, что армирование стержня приводит к заметному уменьшению прогибов стержня, а влияние скоростей роста на величины прогибов качественно оказывается таким же, как и в неармированном растущем стержне.

На фиг. 5 графически показаны зависимости $t_* \sim v_0$ для неармированного (кривые 1, 2) и армированного (кривые 3, 4) растущих стержней, отвечающие соответственно величинам допустимого прогиба $|w| : 0,05; 0,03; 0,02; 0,01$. Как видно, увеличение скорости роста стержня приводит к существенному снижению значения критического времени, причем чем больше величина $|w|$, тем более резкое уменьшение времени t_* наблюдается по мере возрастания v_0 .

В заключение сделаем одно замечание относительно определения начального прогиба стержня $w_0(s)$. Допустим, что по мере роста стержня в осевом направлении замеряется его прогиб по длине, а затем находится кривизна для каждого сечения. При отсутствии диска на свободном конце стержня изгибающий момент при $s = l(t)$ равен нулю. Следовательно, кривизна стержня в этом сечении равна кривизне $\kappa_0(s)$, зависящей только от начального прогиба $w_0(s)$. Зная кривизны $\kappa_0(s)$ для каждого сечения стержня, можно найти функцию $w_0(s)$, если считать известной величину производной $\partial w_0(s)/\partial s$ при $s = 0$ (величину $w_0(0)$ можно положить равной нулю). В том случае, когда на конце стержня имеется жесткий диск, находится значение кривизны оси стержня



Ф и г. 4



Ф и г. 5

на его конце, из которой вычитается приращение кривизны, обусловленной изгибающим моментом, создаваемым диском в крайнем верхнем сечении. Указанная разность будет, очевидно, равна кривизне $\kappa_0(s)$.

Как видим, определение начального прогиба $w_0(s)$ в растущем стержне встречает некоторые трудности. Их можно преодолеть, решив следующую задачу, которая не только представляет интерес с точки зрения отыскания начального прогиба растущего стержня, но и позволяет получить решение реальной технологической задачи.

Предположим, что в процессе роста стержня производится измерение его прогиба во времени и по длине. После завершения роста стержня (по истечении отрезка времени $[0, t_1]$) прогиб продолжает изменяться во времени вследствие вязких свойств материала. Необходимо предсказать, какой величины он достигнет по истечении промежутка времени $[0, t]$, $t > t_1$. Для получения ответа на такой вопрос можно сначала решить обратную задачу для отрезка времени $[0, t_1]$, т. е. по известным прогибам стержня путем решения краевой задачи (2.9), (2.11) найти прогиб $w_0(s)$, а затем решить прямую краевую задачу, т. е. определить функцию $w(t, s)$ по найденной функции $w_0(s)$ для промежутка времени $[0, t]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно стареющих тел.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 3.
2. Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б. Об устойчивости неоднородно вязкоупругих армированных стержней.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 6.
3. Дроздов А. Д., Колмановский В. Б., Потанов В. Д. Устойчивость стержней из неоднородно стареющего вязкоупругого материала.— ДАН АрмССР, 1983, т. 77, № 2.
4. Арутюнян Н. Х., Потанов В. Д. Об устойчивости растущего вязкоупругого стержня, подверженного старению.— ДАН СССР, 1983, т. 270, № 4.
5. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977.
6. Арутюнян Н. Х., Метлов В. В. Некоторые задачи теории ползучести неоднородно стареющих тел с изменяющимися границами.— Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 5.

Поступила 11/VII 1983 г.

УДК 539.374

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ О ПРЕДЕЛЬНЫХ НАГРУЗКАХ ДЛЯ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОГО АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА

А. И. ЧАНЫШЕВ

(Новосибирск)

С использованием результатов [1, 2] рассмотрены и исследованы уравнения плоской деформации жесткопластического анизотропного тела. Получены характеристики, соотношения на характеристиках. В качестве примера решена задача Прандтля о сдавливании штампа в жесткопластическую анизотропную среду. Исследована зависимость предельной нагрузки от свойств анизотропного тела.

Для простоты изложения материала будем предполагать, что анизотропное тело в упругости в фиксированной системе координат x, y подчиняется следующему закону деформирования*:

$$(1) \quad \varepsilon_x = a_{11}\sigma_x - a_{12}\sigma_y, \quad \varepsilon_y = -a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y, \quad \varepsilon_{xy} = a_{33}\tau_{xy},$$

где a_{ij} — упругие податливости ($a_{ij} > 0$), причем $a_{11} \neq a_{22}$.

Определим собственные значения и собственные тензоры T_k ($T_k = \|t_{ij}^k\|$) тензора упругих податливостей [1]:

$$\lambda_1 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2}\right)^2 + a_{12}^2}, \quad \lambda_2 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2}\right)^2 + a_{12}^2}, \quad \lambda_3 = a_{33},$$

$$T_1: \quad t_x^1 = \pm \frac{\sqrt{2} a_{12}}{\sqrt{a_{12}^2 + (a_{11} - \lambda_1)^2}}, \quad t_y^1 = \pm \frac{\sqrt{2} (a_{11} - \lambda_1)}{\sqrt{a_{12}^2 + (a_{11} - \lambda_1)^2}}, \quad t_{xy}^1 = 0,$$

* Предположение о форме закона Гука в виде (1) не ограничивает общности последующих построений.