ПМТФ, № 2, 1969

О РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В СРЕДЕ С ФАЗОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ

Ф. Л. Черноусько

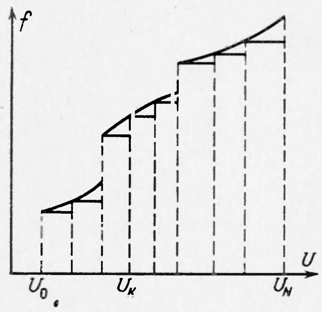
(Москва)

В работе предлагается новый способ решения одномерных нелинейных задач теплопроводности в среде с любым числом фазовых переходов (нелинейные задачи Стефана). Метод состоит в непосредственном расчете изотерм и сводится к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Приводятся численные примеры.

1. **Постановка задачи.** Уравнение распространения тепла имеет вид

$$\frac{\partial E(T)}{\partial t} = \operatorname{div}[k(T)\operatorname{grad} T] \qquad (k(T) > 0) \tag{1.1}$$

Здесь t — время, T — температура, E — внутренняя энергия среды, k — коэффициент теплопроводности. Функция $E(T)$ монотонна (не убывает) и имеет разрывы первого рода при тех значениях T, при которых изменяется фазовое состояние среды. Величина скачка функции $E(T)$ в этих точках равна удельной теплоте фазового перехода (например, удельной теплоте плавления в точке плавления). Функции $E(T)$ и $k(T)$ считаем известными.



Фиг. 1

Заменой переменной (T_0 — произвольная постоянная)

$$\int_{T_0}^{T} k(z)\,dz = u$$

приведем уравнение (1.1) к виду

$$\frac{\partial f(u)}{\partial t} = \Delta u, \quad f(u) = E(T(u)) \tag{1.2}$$

Очевидно, что u — монотонная функция T, а $f(u)$ — монотонная (неубывающая) функция u, которая может иметь разрывы первого рода. Типичный график зависимости $f(u)$ изображен на фиг. 1. В случае одномерной задачи о распространении тепла вдоль оси x уравнение (1.2) примет вид

$$\frac{\partial f(u)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.3}$$

Задача определения температуры среды сводится к нахождению решения $u(x, t)$ уравнения (1.3) при каких-либо начальных и краевых условиях. Отметим, что производные функции u будут терпеть разрывы на тех кривых в плоскости xt, где u принимает одно из значений, при которых происходит фазовый переход (т. е. одно из значений u, соответствующих точкам разрыва функции $f(u)$). Указанные кривые в плоскости xt изображают движение фронтов фазовых переходов. Поставленная задача (нелинейная задача Стефана) была объектом многих исследований (библиографию см. в [1]).

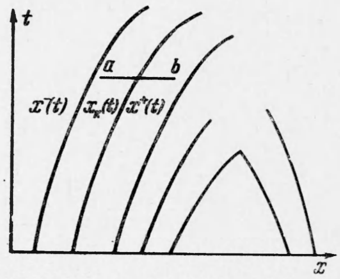
2. **Изотермы.** Изложим один подход к численному решению поставленной задачи. В области определения функции $f(u)$ выберем точки u_k при $k = 0,1, \ldots, N$ так, чтобы $u_k < u_{k+1}$ при всех k и чтобы расстояния между соседними точками были достаточно малы (эти расстояния, в частности, могут быть и равными). При этом в число точек u_k включим все точки раз-

рыва функции $f(u)$. Введем разрывную кусочно-постоянную функцию $F(u)$ с помощью равенств

$$F(u) = F_k = f(u_k) \quad \text{при} \quad u_k \leqslant u < u_{k+1} \quad (k = 0, 1, \ldots, N-1) \tag{2.1}$$

График этой функции, аппроксимирующей функцию $f(u)$, изображен на фиг. 1. Заменим уравнение (1.3) следующим уравнением:

$$\frac{\partial F(u)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.2}$$



Фиг. 2

которое будем решать в дальнейшем. В тех точках плоскости xt, где u не равно ни одному из u_k, функция $F(u)$, согласно (2.1), равна постоянной. Тогда из уравнения (2.2) следует: $\partial^2 u / \partial x^2 = 0$, т. е. u есть линейная функция x. Таким образом, при каждом фиксированном t решение $u(x, t)$ уравнения (2.2) будет кусочно-линейной функцией x с точками излома (разрыва производной $\partial u / \partial x$) при $u = u_k$, $k = 0, 1, \ldots, N$. Поэтому для определения решения $u(x, t)$ достаточно найти кривые $x = x_k(t)$ в плоскости xt, на которых $u = u_k$, $k = 0, 1, \ldots, N$. Эти кривые, на которых производная $\partial u / \partial x$ терпит разрыв, очевидно, представляют собой изотермы.

Выведем дифференциальные уравнения для изотерм. Пусть изотерма $x_k(t)$, на которой $u = u_k$, лежит при некотором t между изотермами $x^-(t)$ и $x^+(t)$, соответствующими $u = u^-$ и $u = u^+$, т. е. $x^- < x_k < x^+$. Здесь u^- и u^+ — точки разрыва функции $F(u)$, соседние с u_k. Они могут быть равны u_{k-1}, u_k или u_{k+1}. Поскольку $u(x, t)$ — кусочно-линейная функция x, а $F(u)$ — кусочно-постоянная функция u, то будем иметь

$$\begin{aligned} u &= u_k + \frac{u^- - u_k}{x^- - x_k}(x - x_k), \quad F = F^- \qquad (x^- < x < x_k) \\ u &= u_k + \frac{u^+ - u_k}{x^+ - x_k}(x - x_k), \quad F = F^+ \qquad (x_k < x < x^+) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь F^-, F^+ — постоянные значения, принимаемые функцией $F(u)$ из (2.1) в соответствующих интервалах изменения u.

Пусть a, b — фиксированные значения x, лежащие при некотором t в интервалах (см. фиг. 2)

$$x^- < a < x_k, \qquad x_k < b < x^+$$

Проинтегрируем обе части уравнения (2.2) по x от a до b при фиксированном t. Получим

$$\int_a^b \frac{\partial F(u)}{\partial t} dx = \frac{\partial u}{\partial x}(b, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(a, t)$$

Так как a и b — постоянные, то операции дифференцирования по t и интегрирования по x в левой части полученного уравнения можно поменять местами, причем интеграл легко вычислить при помощи равенств (2.3).

Преобразуя также правую часть уравнения на основании соотношений (2.3), будем иметь

$$\frac{d}{dt}\left[(x_k - a) F^- + (b - x_k) F^+\right] = \frac{u^+ - u_k}{x^+ - x_k} - \frac{u^- - u_k}{x^- - x_k}$$

После дифференцирования по t получим

$$\frac{dx_k}{dt}(F^- - F^+) = \frac{u^+ - u_k}{x^+ - x_k} - \frac{u^- - u_k}{x^- - x_k} \tag{2.4}$$

Рассмотрим различные частные случаи. Пусть вблизи $x = x_k$ функция $u(x, t)$ либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает с ростом x. В этих случаях будем иметь соответственно

$$x^- = x_{k-1},\ u^- = u_{k-1},\ x^+ = x_{k+1},\ u^+ = u_{k+1},\ F^- = F_{k-1},\ F^+ = F_k$$
$$x^- = x_{k+1},\ u^- = u_{k+1},\ x^+ = x_{k-1},\ u^+ = u_{k-1},\ F^- = F_k,\ F^+ = F_{k-1}$$

В обоих этих случаях уравнение (2.4) примет вид

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{1}{F_{k-1} - F_k}\left(\frac{u_{k+1} - u_k}{x_{k+1} - x_k} - \frac{u_{k-1} - u_k}{x_{k-1} - x_k}\right) \tag{2.5}$$

Пусть обе соседние с x_k изотермы отвечают значению $u = u_{k-1}$, меньшему, чем u_k. Тогда в (2.3), (2.4) нужно положить

$$x^- = x_{k-1},\ x^+ = x_{k-1}',\ u^- = u^+ = u_{k-1},\ F^- = F^+ = F_{k-1}$$

В этом случае левая часть уравнения (2.4) обращается в нуль, а само уравнение приводит к противоречию, давая равенство $u_k = u_{k-1}$. В этом случае изотерма $x = x_k$ не может существовать: она мгновенно «заканчивается», а $u(x_k, t)$ делается равным u_{k-1}. Аналогично, не могут существовать такие изотермы $x_k(t)$, что обе соседние с ними отвечают значениям $u = u_{k+1} > u_k$.

Пусть из трех соседних изотерм две, $x_k(t)$ и $x_k'(t)$, отвечают одному и тому же значению $u = u_k$, а третья, $x_{k-1}(t)$,— меньшему значению $u = u_{k-1}$. Пусть, для определенности, последняя из указанных изотерм лежит слева от первых двух, т. е. положим в равенствах (2.3), (2.4)

$$x^- = x_{k-1},\ x^+ = x_k',\ u^- = u_{k-1},\ u^+ = u_k,\ F^- = F_{k-1},\ F^+ = F_k$$

Тогда уравнение (2.4) примет вид

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{u_k - u_{k-1}}{(F_k - F_{k-1})(x_k - x_{k-1})} > 0 \tag{2.6}$$

Отметим, что в данном случае изотерма $x_k(t)$, согласно (2.6), всегда движется вправо в плоскости xt. В отличие от уравнения (2.5), правая часть уравнения (2.6) зависит лишь от левой соседней изотермы x_{k-1} и не зависит от правой соседней изотермы x_k'. Таким образом, в этом случае изотерма $x_k(t)$ «не чувствует» того, что происходит справа от нее.

Пусть четыре соседние изотермы x_{k-1}, x_k, x_k', x_{k-1}' расположены так, что $x_{k-1} < x_k < x_k' < x_{k-1}'$, причем этим изотермам отвечают соответственно значения u_{k-1}, u_k, u_k, u_{k-1}. Для изотермы $x_k(t)$ тогда будет справедливо уравнение (2.6), а для изотермы $x_k'(t)$ — аналогичное уравнение

$$\frac{dx_k'}{dt} = \frac{u_k - u_{k-1}}{(F_k - F_{k-1})(x_k' - x_{k-1}')} < 0 \tag{2.7}$$

Из уравнений (2.6), (2.7) видно, что изотермы $x_k(t)$ и $x_k'(t)$ не влияют друг на друга и сближаются (движутся навстречу друг другу). В момент их пересечения отрезок $[x_k, x_k']$ оси x, на котором $u = u_k$, стягивается в точку. После этого обе изотермы заканчиваются, а отрезок оси x, на котором $u = u_k$, перестает существовать. Схематически слияние изотерм показано в правой части фиг. 2. Физический смысл этого явления очень прост. Если имеется область повышенной температуры ($u = u_k$), с обеих сторон от которой температура более низкая, то в результате процесса теплопроводности эта область уменьшается и в конце концов исчезает.

Осталось рассмотреть еще случай, когда из трех соседних изотерм две отвечают одному и тому же значению $u = u_k$, а третья, лежащая слева или справа от первых двух, — большему значению $u = u_{k-1}$. Этот случай был бы вполне аналогичен рассмотренному выше, если бы кусочно-постоянная функция $F(u)$ из (2.1) была бы выбрана непрерывной слева, а не справа. При сделанном выборе функции $F(u)$ оказывается, что средняя из трех рассматриваемых изотерм мгновенно заканчивается, как и в одном из ранее рассмотренных случаев.

3. **Краевые и начальные условия.** Полученные выше уравнения (2.4) — (2.7) справедливы для внутренних изотерм $x_k(t)$, т. е. таких, которые заключены между двумя другими изотермами. Для вывода уравнений граничных изотерм необходимо привлечь краевые условия. Пусть решение задачи (1.3) или (2.2) ищется в области плоскости xt, ограниченной неравенствами $g_1(t) \leqslant x \leqslant g_2(t)$, $t \geqslant 0$, где g_1, g_2 — заданные функции.

Пусть на кривой $x = g_1(t)$ задано краевое условие одного из трех типов

$$u = h_1(t), \quad \partial u/\partial x = h_2(t), \quad \partial u/\partial x = h_3(u, \ t) \tag{3.1}$$

Рассмотрим изотерму $x_k(t)$, отвечающую значению $u = u_k$. Пусть при некотором t она заключена между границей $x = g_1(t)$ и изотермой $x_{k+1}(t)$, т. е. $g_1 < x_k < x_{k+1}$. Пусть v и q — значения u и $\partial u/\partial x$ на границе $x = g_1(t)$, причем $u_{k-1} < v < u_k$. Тогда аналогично уравнению (2.4) получим

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{1}{F_{k-1} - F_k}\left(\frac{u_{k+1} - u_k}{x_{k+1} - x_k} - q\right) \tag{3.2}$$

Здесь q определяется следующими равенствами, отвечающими трем случаям краевых условий (3.1)

$$q = \frac{u_k - h_1(t)}{x_k - g_1(t)}, \quad q = h_2(t), \quad q = h_3[u_k + (g_1(t) - x_k)\, q, \ t] \tag{3.3}$$

В первых двух случаях q задается явными выражениями (3.3), а в третьем случае для определения q нужно разрешить трансцендентное уравнение. Подставляя величину q из (3.3) в уравнение (3.2), получим искомое уравнение для граничной изотермы $x_k(t)$. Это уравнение будет справедливо до тех пор, пока выполнены неравенства

$$u_{k-1} < v = u(g_1(t_1), \ t) = u_k + (g_1(t) - x_k)\, q < u_k \tag{3.4}$$

Если в некоторый момент времени t_0 нарушается левое из неравенств (3.4), т. е. $v = u_{k-1}$ при $t = t_0$, то в этот момент времени с границы $x = g_1(t)$ выходит новая изотерма $x_{k-1}(t)$. Эта изотерма при $t > t_0$ будет граничной, а изотерма $x = x_k(t)$ станет внутренней. Для новой изотермы $x_{k-1}(t)$ имеем очевидное начальное условие $x_{k-1}(t_0) = g_1(t_0)$. Если же в момент $t = t_0$ нарушается правое из неравенств (3.4), то $v = u_k$ и $x_k = g_1$ при $t = t_0$. В этом случае изотерма $x_k(t)$ упирается в границу и исчезает, а внутренняя изотерма $x_{k+1}(t)$ становится граничной при $t > t_0$.

Пусть в момент $t = t_0$ изотерма $x_k(t)$ пересекается с границей $x = g_1(t)$, на которой задано первое из граничных условий (3.1). Тогда $u_k = h_1$ и $x_k = g_1$ при $t = t_0$, и поэтому первое из выражений (3.3) для q превращается в неопределенность. Уравнение (3.2) имеет при $t = t_0$

особую точку. Раскрывая неопределенность для q по правилу Лопиталя, получим

$$q(t_0) = \frac{dh_1/dt}{dg_1/dt - dx_k/dt} \quad \text{при} \quad t = t_0 \tag{3.5}$$

Подставляя выражение (3.5) для q в уравнение (3.2) и полагая в нем $t = t_0$, получим алгебраическое (квадратное) уравнение для производной dx_k/dt в момент $t = t_0$. Разрешая это уравнение, найдем dx_k/dt при $t = t_0$ и тем самым получим возможность выйти из особой точки $t = t_0$.

Таким образом удается изучить поведение изотерм вблизи особых точек, которые могут возникать при их пересечении с границами области. Подробнее этот вопрос для конкретных примеров рассмотрен в п. 5.

Совершенно аналогично разбираются и другие случаи поведения изотерм вблизи границ $x = g_1(t)$ и $x = g_2(t)$. Могут быть рассмотрены и более сложные краевые условия, чем (3.1), например условия на неизвестных границах.

Начальное условие для уравнения (1.3) обычно задается в виде $u = h(x)$ при $t = 0$, где h — заданная функция. Чтобы получить начальные условия для изотерм $x = x_k(t)$, найдем корни уравнений $h(x) = u_k$ при $k = 0, 1, \ldots, N$. Если x_k, x_k', x_k'' и т. д.— корни этого уравнения для некоторого фиксированного k, то эти корни и будут начальными данными $x_k(0)$, $x_k'(0)$, $x_k''(0)$ и т. д. для изотерм, соответствующих значению u_k.

Число изотерм, начинающихся при $t = 0$ и отвечающих значению $u = u_k$, равно числу корней уравнения $h(x) = u_k$. Если функция $h(x)$ разрывна, то из точки ее разрыва может выходить сразу несколько изотерм, отвечающих тем значениям u_k, которые заключены между предельными значениями функции $h(x)$ слева и справа от точки разрыва.

4. **Обсуждение метода и его обобщения.** Как показано выше, решение краевой задачи для нелинейного уравнения в частных производных (2.2) с разрывной функцией $F(u)$ вида (2.1) свелось к решению нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений для изотерм $x = x_k(t)$, отвечающих точкам разрыва $u = u_k$ функции $F(u)$. Показано, как составляются эти уравнения в различных случаях для внутренних и граничных изотерм (уравнения (2.5) — (2.7), (3.2)).

Изотермы могут заканчиваться (исчезать) как внутри области, так и на ее границах. На границах области могут начинаться новые изотермы, и в этом случае для них можно указать начальные условия. Неопределенности, возникающие в уравнениях изотерм при их пересечении с границами, могут быть раскрыты. Наконец, отметим, что граничные изотермы могут превращаться во внутренние и наоборот. Таким образом, поставленная задача сводится к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, вид и порядок которой меняется во времени по определенным правилам. Эта система может легко интегрироваться известными численными методами, например методом Рунге — Кутта. После решения задачи и определения всех изотерм $x_k(t)$ решение $u(x, t)$ определяется как кусочно-линейная функция x, принимающая значения $u = u_k$ при $x = x_k(t)$.

Предложенный метод дает в принципе точное решение уравнения (2.2). Поэтому вопрос о сходимости метода сводится к следующему вопросу: в каком смысле и при каких условиях решение уравнения (2.2) близко к решению уравнения (1.3), если кусочно-постоянная функция $F(u)$ близка к функции $f(u)$ в смысле метрики C, т. е. по максимуму модуля разности?

Из физических соображений представляется очевидным, что при $F(u) \to f(u)$ решение уравнения (2.2) стремится к решению уравнения (1.3) (за исключением, возможно, некоторых особых случаев). Это следует из того, что две среды с близкими свойствами должны вести себя почти одинаково. Однако представляло бы интерес строгое математическое обоснование сходимости.

Изложенный метод почти без изменений применим и в задачах с цилиндрической и сферической симметриями. В этих случаях уравнение (1.3) имеет вид

$$\frac{\partial f(u)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\nu}{x}\frac{\partial u}{\partial x} \tag{4.1}$$

где $\nu = 1, 2$ соответственно при цилиндрической и сферической симметриях, а x — расстояние от оси или центра симметрии. В этих случаях решение $u(x, t)$ между изотермами будет удовлетворять линейному уравнению, которое получится, если приравнять нулю правую часть уравнения (4.1). Решая это уравнение, получим

$$u = c_1 + c_2 \ln x \quad (\nu = 1), \; u = c_1 + c_2 x^{-1} \quad (\nu = 2) \tag{4.2}$$

Произвольные постоянные c_1, c_2 определяются условиями на изотермах (т. е. условиями типа $u = u_k$ при $x = x_k$). Определяя эти постоянные для случая, рассмотренного в п. 2, получим вместо первого из соотношений (2.3) следующие равенства:

$$\begin{aligned} u &= u_k + \frac{(u^- - u_k)\ln(x / x_k)}{\ln(x^- / x_k)} \quad (\nu = 1) \\ u &= u_k + \frac{(u^- - u_k)(1 / x - 1 / x_k)}{1 / x^- - 1 / x_k} \quad (\nu = 2) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Аналогичные равенства получаются и вместо второго соотношения (2.3). Умножая уравнение (4.1) на x^ν и интегрируя его от a до b, получим

$$x_k^{\nu} \frac{dx_k}{dt}(F^- - F^+) = \left(x^\nu \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_a^b$$

Вычисляя двойную подстановку в правой части полученного уравнения при помощи равенств (4.3), заменяющих здесь соотношения (2.3), будем иметь

$$\begin{aligned} x_k \frac{dx_k}{dt}(F^- - F^+) &= \frac{u^+ - u_k}{\ln(x^+ / x_k)} - \frac{u^- - u_k}{\ln(x^- / x_k)} \\ x_k^2 \frac{dx_k}{dt}(F^- - F^+) &= \frac{u^+ - u_k}{1 / x_k - 1 / x^+} - \frac{u^- - u_k}{1 / x_k - 1 / x^-} \end{aligned} \tag{4.4}$$

в случаях $\nu = 1$ и $\nu = 2$ соответственно. Уравнения (4.4) заменяют здесь уравнения (2.4). Аналогично изменяются и остальные уравнения пп. 2—3, но ход рассуждений и изложенная схема решения полностью сохраняются.

Приведем еще одну интерпретацию предложенного выше метода. В уравнении (1.3) будем считать функцию $f(u)$ дифференцируемой, а решение $u(x, t)$ — монотонной функцией x. Сделаем замену независимых переменных и искомой функции

$$\tau = t, \quad y = u(x, t), \quad x = X(y, \tau) \tag{4.5}$$

и будем искать X как функцию аргументов y, τ. Для частных производных получим

$$u_t = - X_\tau / X_y, \quad u_x = 1 / X_y, \quad u_{xx} = X_y^{-1}(1 / X_y)_y$$

Уравнение (1.3) в новых переменных примет вид

$$-f'(y) X_\tau = (1 / X_y)_y$$

Если в этом уравнении заменить производные по y конечно-разностными отношениями, т. е. применить метод прямых, то получим уравнения вида (2.4). Таким образом, предложенный метод можно трактовать как вариант метода прямых для уравнения в новых переменных (4.5).

Отметим некоторые особенности и достоинства предложенного метода. Поскольку метод сводится к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, то он прост для реализации на ЭВМ. Метод позволяет решать задачи при произвольных нелинейных функциях $f(u)$, имеющих любое число разрывов.

Расчет фронтов фазовых переходов производится автоматически, поскольку они входят в число изотерм, и не представляет никаких трудностей. Выбор кусочно-постоянной функции $F(u)$, аппроксимирующей функцию $f(u)$, в значительной степени произволен, и этим можно воспользоваться для получения лучшей точности.

Если функция $f(u)$ в одном интервале изменения u растет медленно, а в другом — быстро, то точки u_k следует располагать более редко в первом и более густо во втором интервале, так, чтобы скачки функции $F(u)$ были примерно одинаковы. Если решение $u(x, t)$ имеет в некоторых областях плоскости x, t резкие градиенты, то это автоматически будет учитываться сближением изотерм и не приведет к потере точности.

С помощью предложенного метода удобно решать задачи оптимального управления нелинейными тепловыми процессами, так как эти задачи будут сразу сведены к вариационным задачам для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Таким образом, предлагаемый метод, легко учитывающий любые нелинейности и фазовые переходы, обладает в некоторых случаях определенными преимуществами перед известными (например, конечно-разностными) методами. Метод может быть полезен при решении задач нелинейной теплопроводности, задач Стефана и других задач физики и механики, описываемых нелинейными уравнениями параболического типа. Метод может быть распространен и на задачи с несколькими пространственными переменными, однако схема счета при этом значительно усложняется.

Отметим еще одно обобщение метода, на которое обратил внимание автора Л. А. Чудов. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = L_i(v), \quad v = (v_1, \ldots v_n), \; i = 1, \ldots n \tag{4.6}$$

Здесь $v(t, x)$ — векторная искомая функция, L_i — произвольные нелинейные дифференциальные операторы, содержащие производные любого порядка от v по скалярной пространственной переменной x.

Операторы L_i могут зависеть явно от x и t. Пусть $x_{ij}(t)$ — линия уровня функции $v_i(x, t)$, на которой она принимает заданное постоянное значение $v_i(x, t) = v_{ij}$.

Тогда на этой линии

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x}\frac{dx_{ij}}{dt} = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots n;\; j = 1, 2 \ldots)$$

Используя (4.6), получим отсюда уравнения для линий уровня

$$\frac{dx_{ij}}{dt} - \frac{\partial v_i / \partial t}{\partial v_i / \partial x} - \frac{L_i(v)}{\partial v_i / \partial x} \quad (i = 1, 2 \ldots n;\; j = 1, 2 \ldots) \tag{4.7}$$

Правая часть уравнений (4.7) может заменяться различными конечно-разностными аппроксимациями, использующими выбранную сетку значений функций v_{ij} и значения $x = x_{ij}(t)$ на линиях уровня. Система (4.7) тогда будет аналогична уравнениям (2.5).

5. **Примеры.** Ниже приводятся численные решения одной и той же краевой задачи для двух сред с функциями $f(u)$ вида

$$f_1(u) = u, \quad f_2(u) = \begin{cases} 0.75\,u & \text{при } u < 0.8 \\ 0.4 + 0.5\,u + 0.2\,u^2 & \text{при } 0.8 \leqslant u < 1.5 \\ u + 0.4\,u^2 & \text{при } u \geqslant 1.5 \end{cases} \tag{5.1}$$

Графики этих функций изображены на фиг. 3.

Первый случай отвечает обычному линейному уравнению теплопроводности, а второй имеет место для среды с двумя фазовыми переходами. Граничные и начальные условия для обоих случаев зададим в виде

$$\partial u / \partial x = 0 \text{ при } x = 0, \; u = 2t + 1 \text{ при } x = 1, \; u = x^2 \text{ при } t = 0 \tag{5.2}$$

Точки u_k в равенствах (2.1) выбирались равноотстоящими, т. е. $u_k = kH$, где $H = 0.05$. В области $t \geqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, в которой ищется решение, функция $u(x, t)$ в данных примерах монотонна по x и по t. Поэтому изотермы располагаются в плоскости xt так, что $x_k(t) < x_l(t)$ при $k < l$. С ростом t изотермы движутся влево, причем на правой границе $x = 1$ возникают новые изотермы, а на левой границе $x = 0$ они заканчиваются (см. фиг. 4). Пусть в некоторый момент t в интервале $0 < x < 1$ лежат изотермы $x_k(t)$ с индексами $i \leqslant k \leqslant j$, причем i — номер крайней слева, а j — крайней справа изотермы. Учитывая общие равенства (2.5), (3.2), (3.3) и условия (5.2), запишем уравнения изотерм

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{H}{(F_{i-1} - F_i)(x_{i+1} - x_i)} < 0 \tag{5.3}$$

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{H}{F_k - F_{k-1}} \left(\frac{1}{x_k - x_{k-1}} - \frac{1}{x_{k+1} - x_k} \right) \quad (i < k < j)$$

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{H}{F_j - F_{j-1}} \left[\frac{1}{x_j - x_{j-1}} - \frac{(2t+1)/H - j}{1 - x_j} \right]$$

Для получения начальных условий составим уравнение

$$u(x, 0) = x^2 = u_k = kH \qquad (H = 0.05)$$

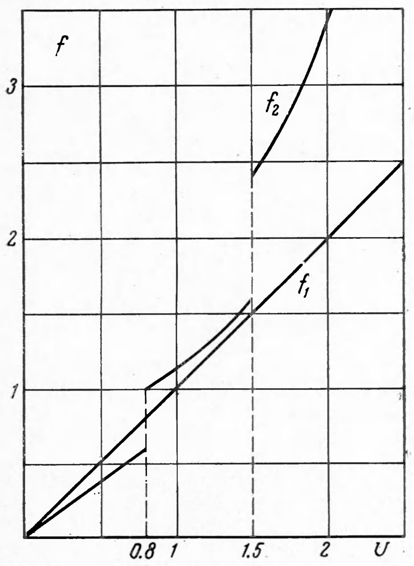
Отсюда получим начальные условия для тех изотерм, которые начинаются на отрезке [0,1] оси x, а именно

$$x_k(0) = \sqrt{kH}, \quad H = 0.05, \ i \leqslant k \leqslant j, \ i = 1, \ j = 20 \tag{5.4}$$

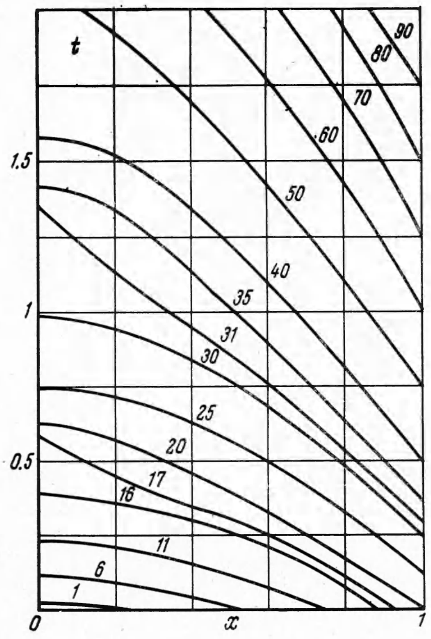
Изотермы с номером $j > 20$ начинаются на прямой $x = 1$ в момент t, определяемый равенством $u(1, t) = 2t + 1 = jH$,

т. е. для них

$$x_j(t_j) = 1, \quad t_j = 1/2\,(jH - 1) \tag{5.5}$$



Фиг. 3



Фиг. 4

При возникновении новой изотермы она становится правой граничной, т. е. j-й в обозначениях (5.3). Последнее уравнение (5.3) имеет особенность при условии (5.5). Раскрывая неопределенность в (5.3) (см. п. 3), получим при $t = t_j$

$$z = a_1 + a_2 / z \tag{5.6}$$

Здесь введены обозначения

$$z = \frac{dx_j(t_j)}{dt}, \quad a_1 = \frac{H}{(F_j - F_{j-1})[1 - x_{j-1}(t_j)]} > 0$$
$$a_2 = 2/(F_j - F_{j-1}) > 0 \tag{5.7}$$

Из двух корней квадратного уравнения (5.6) выберем отрицательный

$$z = \frac{dx_j(t_j)}{dt} = \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 + 4a_2}}{2} < 0 \tag{5.8}$$

отвечающий движению изотермы влево от границы $x = 1$ в плоскости x, t. Соотношения (5.7), (5.8) определяют асимптотику изотермы $x_j(t)$ в момент ее возникновения, т. е. при условии (5.5).

Можно показать, что точка $t = t_j$, $x_j = 1$ является особой точкой типа седла для системы (5.3), и из этой точки по направлению (5.8) выходит только одна изотерма. Других особенностей система (5.3) не имеет. Исчезновение изотерм в рассматриваемых примерах происходит на границе $x = 0$, когда убывающая функция $x_i(t)$ обращается в нуль. Тогда роль i-й, т. е. левой граничной изотермы в уравнениях (5.3), будет играть изотерма x_{i+1}.

При расчетах на ЭВМ система уравнений изотерм (5.3) интегрировалась численно по методу Рунге — Кутта с постоянным шагом, равным $5 \cdot 10^{-4}$ для первого примера из (5.1) и $2.5 \cdot 10^{-4}$ для второго примера. Начальные условия и числа i, j при $t = 0$ задавались в виде (5.4).

На каждом шаге интегрирования проверялось условие исчезновения i-й изотермы (условие $x_i \leqslant 0$) и условие возникновения новой $(j + 1)$-й изотермы (условие $t \geqslant t_{j+1} = 1/2\,[(j + 1)\,H - 1]$). При выполнении первого условия увеличивалось на единицу число i, а при выполнении второго условия увеличивалось на единицу число j. При возникновении новой изотермы ее поведение вблизи особой точки задавалось при помощи приведенной выше асимптотики. После расчета изотерм решение $u(x, t)$ можно определить путем линейной интерполяции по x между соседними изотермами.

В первом из рассчитанных примеров (см. (5.1)), когда $f_1(u) = u$, имеется точное решение краевой задачи (5.2) для уравнения (1.3). Это решение имеет вид $u(x, t) = x^2 + 2t$, а изотермы в плоскости x, t являются здесь параболами. Наличие простого точного решения позволяет оценить погрешность метода. Для первого примера приво-

	$t = 1$			$t = 2$		
$x =$	0.0770	0.5004	0.8945	0.0799	0.5009	0.9747
$u^0 =$	2.0000	2.2500	2.8000	4.0000	4.2500	4.9500
$u =$	2.0059	2.2504	2.8001	4.0064	4.2509	4.9500

дим для сравнения результаты численного решения u° с точным решением $u = x^2 + 2t$. Чтобы исключить погрешности интерполяции, значения аргументов x, t здесь выбирались лежащими на одной из численно построенных изотерм. Значения численного решения определялись по формуле $u^\circ = kH = 0{,}05k$, где k — номер изотермы, на которой взята точка. Как видно из таблицы, совпадение численного решения с точным оказалось хорошим. Построенные изотермы здесь также оказались близки к точным изотермам — параболам.

Второй пример соответствовал нелинейной разрывной функции $f_2(u)$ из (5.1) (см. фиг. 3). Некоторые изотермы, полученные в результате численного расчета этого примера, изображены на фиг. 4. Числа у кривых указывают номер изотерм, и на k-й изотерме по-прежнему $u = kH = 0.05k$. 16-я и 30-я изотермы, на которых $u = 0.8$ и $u = 1.5$ являются, согласно (5.1), фронтами фазовых переходов (функция $f_2(u)$ здесь испытывает разрыв). Эти изотермы отделяют состояния среды с различными свойствами, что наглядно иллюстрируется поведением поля изотерм на фиг. 4.

Автор выражает благодарность студенту Московского физико-технического института В. М. Картвелишвили, который составил программу и выполнил расчеты на ЭВМ БЭСМ-3М.

Автор благодарит Л. А. Чудова за полезные замечания.

Поступила 4 XI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Рубинштейн Л. И. Проблема Стефана. Рига, Изд-во «Звайгзне», 1967.