

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ФОРМЫ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОЙ  
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ УДАРЕ

*В. М. Корнев, В. Н. Солдовников*

(Новосибирск)

Исследовано взаимодействие продольных и поперечных движений круговой цилиндрической оболочки при ударе по торцу. При бесконечной и конечной скоростях распространения возмущений вдоль образующей выявлены наиболее растущие формы потери устойчивости оболочки, которые подобны, если процесс выпучивания в случае конечной скорости распространения возмущений описывать в истинном времени действия сжимающей нагрузки. Установлено, что при нагружении большой интенсивности цилиндрическую оболочку можно моделировать стержнем при продольном ударе (указаны параметры подобия). Этот факт подтверждается сравнением с экспериментальными результатами.

Упругим системам при действии нагрузок большой интенсивности свойственно избирательное усиление некоторых высших форм потери устойчивости [1]. В экспериментах, описанных в работах [2-4], наблюдалось влияние на форму выпучивания стержней и оболочек волнового процесса, вызванного внезапным приложением нагрузки к упругой системе. При учете конечности скорости распространения продольных возмущений в работе [5] с помощью разложения решения в ряд на переменном интервале [6] получено асимптотическое представление формы потери устойчивости для полубесконечного стержня. Задача, аналогичная рассмотренной здесь, решалась численно в работе [7]; вероятно, ввиду небольшой скорости удара волнообразования по длине оболочки не наблюдались. Упоминание о влиянии волнового процесса на форму выпучивания имеется в [8].

1. **Постановка задачи.** Продольные и поперечные движения круговой цилиндрической оболочки описываются следующей системой уравнений:

$$D \left( w_{xxxx} + 12 \frac{w}{R^2 h^2} \right) - \frac{\nu E h}{R(1-\nu^2)} u_x + (N w_x)_x + \rho h w_{tt} = f(x, t) \quad (1.1)$$

$$N_{xx} - c^{-2} N_{tt} = \nu \rho (h/R) w_{tt} \quad (1.2)$$

Здесь  $x, t$  — продольная координата и время;  $u, w$  — продольное и поперечное смещение срединной поверхности оболочки радиуса  $R$ , нижние индексы обозначают дифференцирование по соответствующим переменным;  $E, \nu, \rho$  — модуль Юнга, коэффициент Пуассона, плотность материала;  $D$  — цилиндрическая жесткость;  $c = \{E / [\rho(1-\nu^2)]\}^{1/2}$  — скорость звука;  $f(x, t)$  — функция, определяемая возмущениями или несовершенствами;  $N$  — продольное усилие, которое в линейном приближении определяется по формуле

$$N = [Eh / (1-\nu^2)] (u_x - \nu w / R) \quad (1.3)$$

Начальные и краевые условия при ударном постоянном во времени нагружении полубесконечной шарнирно опертой оболочки, которая покоится до удара, имеют вид

$$\begin{aligned} w = w_t = 0 \quad (t = 0, 0 \leq x < \infty), \quad w = w_{xx} = 0 \quad (x = 0) \\ N = N_0 = \text{const} \quad (t > 0, x = 0), \quad N = N_t = 0 \quad (t = 0, x > 0) \end{aligned} \quad (1.4)$$

В процессе нагружения оболочки могут присутствовать малые поперечные нагрузки, эксцентриситет приложения усилия  $N_0$ , кроме того, срединная поверхность оболочки может иметь форму, отличную от идеальной цилиндрической. Все это учитывается функцией  $f(x, t)$ , которая считается заданной.

Уравнения (1.1) и (1.2) совпадают с известными уравнениями из § 215 [9] теории колебаний круговых цилиндрических оболочек, в которых для усилий в срединной поверхности приняты линеаризованные выражения через смещения.

Решение задачи (1.1), (1.2), (1.4) существенно упрощается, когда продольное усилие  $N(x, t) = \text{const}$ . Это реализуется в двух случаях:

1) если оболочка настолько тонкостенная ( $h/R \ll 1$ ), что выражением в правой части уравнения (1.2) можно пренебречь; тогда решение упрощенного волнового уравнения относительно продольного усилия в оболочке при условиях (1.4) имеет вид

$$N = N_0 = \text{const}$$

2) при бесконечной скорости распространения возмущений вдоль оболочки; тогда из уравнения движения

$$u_{xx} - \nu w_x / R = u_{tt} / c^2$$

при  $c \rightarrow \infty$  следует, что  $N = N_0 = \text{const}$  (см. (1.3)).

**2. Исследование форм выпучивания при постоянном усилии.** Рассматривается уравнение динамической потери устойчивости оболочки

$$D[w_{xxxx} + 12(1 - \nu^2)R^{-2}h^{-2}w] + N_0 w_{xx} + \rho h w_{tt} = f^*(x, t) \quad (2.1)$$

Это уравнение получено путем исключения  $u_x$  из (1.1) при помощи (1.3), через  $f^*(x, t)$  обозначены те слагаемые, которые не зависят от  $w$ .

Начальные и краевые условия для уравнения (2.1) ( $L$  — длина оболочки)

$$w = w_t = 0 \quad (t = 0, 0 \leq x \leq L), \quad w = w_{xx} = 0 \quad (x = 0, L) \quad (2.2)$$

Решение задачи (2.1), (2.2) разыскивается в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(t) W_m(x), \quad W_m(x) = \sin \frac{m\pi x}{L} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (2.3)$$

Здесь  $W_m$  — формы потери устойчивости.

Рассматривается поведение оболочки при интенсивном нагружении, т. е.  $N_0 > N^*$ , где  $N^* = 4[3(1 - \nu^2)]^{1/2} DR^{-1}h^{-1}$  — критическая нагрузка Эйлера.

При действии нагрузок большой интенсивности  $N_0 > N^*$  интерес представляют те степени свободы системы (формы потери устойчивости), которым соответствует быстрое нарастание прогибов [1]. Наиболее сильно развивающаяся форма потери устойчивости растет по экспоненциальному закону с показателем  $\alpha$ , причем

$$\alpha^2 = \frac{12(1 - \nu^2)}{R^2 h^2} \frac{D}{\rho h} (\eta^4 - 1), \quad \eta^2 = \frac{N_0}{N^*} \quad (2.4)$$

Показатель  $\alpha_0$  наиболее растущей формы в стержне имеет вид

$$\alpha_0^2 = \frac{\pi^4 EI}{4\rho FL^4} \eta^4 \quad (2.5)$$

Здесь обозначения те же, что и в [1]. Номера форм потери устойчивости для (2.4) и (2.5) равны соответственно

$$m^2 = \frac{2\eta^2 [3(1-\nu^2)]^{1/2}}{\pi^2} \frac{L^2}{Rh}, \quad m_0^2 = \frac{\eta^2}{2} \quad (2.6)$$

Изучение динамических форм потери устойчивости и темпов нарастания при этом прогибов круговой цилиндрической оболочки можно проводить в экспериментах при интенсивном нагружении стержней, моделируя оболочку стержнем с параметрами, при которых  $\alpha = \alpha_0$  и  $m = m_0$  (см. (2.4) — (2.6)). Заметим, что равенство  $\alpha = \alpha_0$  приближенно выполняется, когда  $\eta^2 \gg 1$ .

**3. Анализ форм потери устойчивости с учетом взаимодействия продольных и поперечных движений.** В случае тонкостенных оболочек ( $\varepsilon = h/R \ll 1$ ) в первом приближении пренебрегаем правой частью уравнения (1.2). Тогда при исследовании решения уравнения (1.1) с учетом соотношения (1.3) можно использовать анализ нестационарных деформаций на переменном интервале [5,6].

Решение волнового уравнения (1.2) при начальных условиях (1.4) будем разыскивать в виде

$$N = N_* + \varepsilon N_1 \quad (3.1)$$

Здесь слагаемое  $N_*$  описывает распространение краевого режима в стержне (см. (1.4))

$$N_* = N_0 \quad (x < ct), \quad N_* = 0 \quad (x \geq ct) \quad (3.2)$$

Второе слагаемое — решение неоднородного уравнения (1.2) с известной правой частью

$$N_1 = -\frac{\nu \rho c}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} w_{tt}^*(\xi, \tau) d\xi \quad (3.3)$$

Для получения функции  $w_{tt}^*$  в (3.3) функцию  $w_{tt}$  продолжают нечетным образом на всю ось  $x$ . Если  $w_{tt} \equiv 0$  при  $x \geq ct$ , то  $N_1 \equiv 0$  при  $x \geq ct$ .

Представление решения уравнения (1.2) в виде (3.1) справедливо до тех пор, пока  $N_0/N_1 \geq 1$ . Необходимо отметить, что малость второго слагаемого в (3.1) обеспечивается тонкостенностью оболочки.

Как известно, изгибные возмущения, определяемые уравнением (1.1) при  $x > ct$ , несущественны. Кроме того, при более точной постановке задачи получаются уравнения типа динамических уравнений Тимошенко для балки, из которых следует, что скорость распространения изгибных возмущений  $c_*$  конечна и меньше  $c$  ( $c_* < c$ ). Поэтому решение уравнения (1.1) будем исследовать с помощью рядов, определенных на переменном интервале [6].

После исключения  $u_x$  из уравнения (1.1) с помощью соотношения (1.3) получается

$$D[w_{xxxx} + 12(1-\nu^2)R^{-2}h^{-2}w] + (Nw_x)_x + \rho h w_{tt} = f^*(x, t) \quad (3.4)$$

Здесь  $f^*(x, t)$  — функция, зависящая от продольного усилия  $N$ . Если правая часть  $f(x, t) \equiv 0$  при  $x < ct$  в (1.1), то  $f^*(x, t) \equiv 0$  при  $x > ct$  в (3.4). Следовательно, для уравнения (3.4) формулируется задача на переменном интервале. Краевые условия этой задачи имеют вид

$$w = w_{xx} = 0 \quad (x = 0), \quad w = w_x = 0 \quad (x = l = ct) \quad (3.5)$$

Начальные условия — нулевые, а именно

$$w = w_t = 0 \quad (t = 0) \quad (3.6)$$

При разложении решения задачи (3.4) — (3.6) в ряд потребуются формы потери устойчивости оболочки. Исследуем эти формы

$$D [W_{xxxx}^0 + 12(1 - \nu^2)R^{-2}h^{-2}W^0] + \lambda W_{xx}^0 = 0 \quad (3.7)$$

$$W^0 = W_{xx}^0 = 0 \quad (x = 0), \quad W^0 = W_x^0 = 0 \quad (x = l)$$

Корни  $k_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) характеристического уравнения для (3.7) при  $\lambda \rightarrow \infty$  становятся чисто мнимыми

$$k_{1,2} = \pm ik_0, \quad k_{3,4} = \pm ik_1, \quad k_0 \sim \sqrt{\lambda}, \quad k_1 \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow \infty)$$

Непосредственные вычисления показывают, что асимптотики при  $\lambda \rightarrow \infty$  собственных форм стержня и цилиндрической оболочки совпадают. Асимптотика этих форм  $W^0 = \sin m\pi x/l$  удовлетворяет условиям шарнирного опирания на обоих концах при  $x = 0, l$ ,  $W^0 = W_{xx}^0 = 0$ .

Представим решение задачи (3.4) — (3.6) в виде

$$w = \sum_m W_m(x, t) q_m(t) \quad (3.8)$$

где  $W_m(x, t)$  — собственные функции следующей задачи:

$$D [W_{xxxx} + 12(1 - \nu^2)R^{-2}h^{-2}W] + \Lambda [1 + \varepsilon s(x, t)] W_{xx} = 0$$

$$W = W_{xx} = 0 \quad (x = 0, l), \quad s(x, t) = N_1 / N_0 \quad (3.9)$$

Для получения собственных функций и чисел задачи (3.9) используется теория возмущений [10]

$$W_m(x, t) = W_m^0(x, t) + \varepsilon W_m^{(1)}(x, t) + \dots, \quad \Lambda_m = \lambda_m + \varepsilon \lambda_m^{(1)} + \dots \quad (3.10)$$

Здесь  $W_m^0$  и  $\lambda_m$  — асимптотики собственных форм потери устойчивости и собственных чисел задачи (3.7). В уравнении (3.9) и соотношениях (3.10)  $t$  рассматривается как параметр.

Подставим ряд (3.8) в уравнение (3.4), пренебрежем производными по времени порядка  $\varepsilon$  в ряду (3.10); это значит, что всю полезную информацию о развитии форм потери устойчивости во времени несет функция  $q_m(t)$ . Воспользуемся условием ортогональности  $W_m(x, t)$  на переменном интервале, для  $q_m(t)$  получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

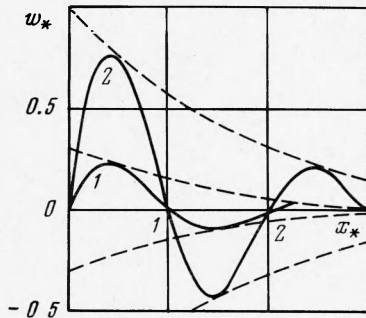
$$\rho h q_m'' + \left\{ D \left[ \left( \frac{m\pi}{l} \right)^4 + \frac{12(1 - \nu^2)}{R^2 h^2} \right] - N_0 \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 + \varepsilon s^*(t) \right\} q_m = f_m(t) \quad (3.11)$$

Здесь малое слагаемое  $\varepsilon s^*(t)$  связано с переменностью продольного усилия  $N$  (см. (3.1)) и учитывает взаимодействие различных форм потери устойчивости оболочки (степеней свободы системы). Для достаточно тонких оболочек ( $\varepsilon \ll 1$ ) это слагаемое можно опустить. Из упрощенного уравнения (3.11) находим наиболее растущие формы потери устойчивости оболочки [5]. Легко показать, что для этих форм отношение  $l/m$  остается

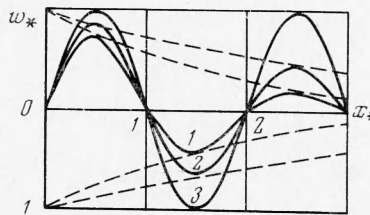
постоянным (см. (2.4) и (2.6))

$$l^* = \frac{l}{m} = \frac{\pi (Rh)^{1/2}}{\eta [42(1-\nu^2)]^{1/4}} \quad (3.12)$$

Выявленная форма потери устойчивости всегда реализуется в оболочке ввиду наличия нелинейного слагаемого  $\varepsilon s^*(t)$  в (3.11), даже если начальные неуровниности стимулируют развитие одной или нескольких форм потери устойчивости. Влияние начальных неуровниностей, возмущений в процессе движения и переменности усилия  $N$  описывают функции  $f_m(t)$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

Из соотношения (3.12) следует, что в первом приближении узлы (нули функции прогиба) не смещаются, что согласуется с экспериментальными результатами из [4]. Поэтому приближенное решение уравнения (3.4) ищем в виде

$$(3.13)$$

$$w(x, \tau) = Q(\tau)W^*(x), \quad W^*(x) = \sin \pi x / l^* \quad (0 \leq x \leq l), \quad W^*(x) = 0 \quad (x > l)$$

Здесь  $\tau$  — истинное время действия сжимающего усилия  $N$ , т. е.

$$\tau = t - x / c \quad (3.14)$$

Перейдем в уравнении (3.4) к переменным  $x$  и  $\tau$ . Пренебрегая второстепенными членами ( $h / l^* \ll 1$ ), получим уравнение, формально совпадающее с (3.4), где  $t$  заменено на  $\tau$ . Ищем решение этого уравнения в виде (3.13) методом Бубнова — Галеркина. Таким образом, функцию  $Q(\tau)$  находим из решения задачи

$$Q'' - \alpha^2 Q = F(\tau), \quad Q = Q' = 0, \quad \tau = 0$$

Решение этой задачи очевидно.

Типичные формы выпучивания оболочек в разные моменты времени приведены в координатах  $w_* = w / Q(t_2)$  и  $x_* = x / l^*$  на фиг. 1 и фиг. 2; штриховые кривые показывают распределение амплитуд выбранной формы потери устойчивости вдоль оболочки. На фиг. 1 кривая 1 получена при  $t = t_1$ , кривая 2 — при  $t = t_2 = 1.4 t_1$ . Влияние взаимодействия продольных и поперечных движений иллюстрируется фиг. 2. При конечной скорости распространения продольных возмущений  $c = c_1$  форма выпучивания имеет вид кривой 1. При  $c = 2c_1$  получаем кривую 2 и, наконец, при бесконечной скорости распространения продольных возмущений ( $c \rightarrow \infty$ ) получена кривая 3 (все кривые построены для одного и

того же момента времени  $t = t_2$ ). Последняя кривая совпадает с наиболее растущей формой выпучивания, полученной М. А. Лаврентьевым и А. Ю. Ишлинским [1]. Отметим, что возмущенная область ( $w \neq 0$ ), соответствующая кривой 1 на фиг. 2 (и кривой 2 на фиг. 1), распространяется до  $x = 7l^*$ ; поперечное движение, описываемое кривой 2 на фиг. 2, наблюдается до  $x = 14l^*$ ; согласно работе [1] в поперечном движении участвует сразу вся оболочка.

Качественные особенности выявленной формы потери устойчивости согласуются с экспериментами по продольному ударному нагружению стержней (фиг. 6, 7 работы [2] и фиг. 1, 3 работы [3]) и цилиндрических оболочек (фиг. 6, 7 в работе [4]). Сравнение с экспериментами допустимо только до момента времени, когда приходит отраженная волна. В экспериментах работы [4] это время порядка 60 мксек.

Поступила 6 VII 1971

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем. Докл. АН СССР, 1949, т. 64, № 6.
2. Lindberg Н. Е. Buckling of a very thin cylindrical shell due to an impulsive pressure. Trans. ASME, Ser. E., J. Appl. Mech., 1964, vol. 31, No. 2. (Рус. перев.: Прикл. механ., Тр. Америк. о-ва инж.-механ., Сер. E, 1964, т. 31, № 2).
3. Малышев Б. М. Устойчивость стержней при ударном сжатии. Инж. ж. МТТ, 1966, № 4.
4. Lindberg Н. Е., Herbert R. E. Dynamic buckling of a thin cylindrical shell under axial impact. Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., 1966, vol. 88, No. 1. (Рус. перев.: Прикл. механ., Тр. Америк. о-ва инж.-механ., Сер. E, 1966, т. 88, № 1).
5. Корнев В. М. О формах потери устойчивости упругого стержня при ударе. ПМТФ, 1968, № 3.
6. Слепьян Л. И. Исследование нестационарных деформаций с помощью рядов, определенных на переменном интервале. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 4.
7. Борисенко В. И., Клокова А. И. Закрытая деформация цилиндрической оболочки при ударе. Прикл. механ., 1966, т. 2, вып. 10.
8. Корнев В. М. О формах потери устойчивости упругой круговой цилиндрической оболочки при продольном ударе. В сб. «Переходные процессы деформации оболочек и пластин», Таллин, Изд-во АН ЭССР, 1967.
9. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М., Физматгиз, 1967.
10. Титчмарш Э. Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, т. 2. М., Изд-во иностр. лит., 1961.