3. **Антимиров М. Я., Лиепиня В. Р.** Возникновение термокапиллярной конвекции в цилиндрическом слое жидкости в условиях невесомости // Изв. АН ЛатвССР. Физика и техника.— 1978.— № 3.
4. **Андреев В. К., Родионов А. А., Рябицкий Е. А.** Возникновение термокапилляр ной конвекции в жидком цилиндре, цилиндрическом и плоском слое под действием внутренних источников тепла // ПМТФ.— 1989.— № 2.
5. **Андреев В. К., Рябицкий Е. А.** Малые возмущения термокапиллярного движения в случае цилиндра.— Красноярск, 1984.— Деп. ВИНИТИ 27.11.84, № 7788-84.

*г. Красноярск* *Поступила 5/VI 1989 г., в окончательном варианте — 7/VIII 1989 г.*

---

УДК 532.5.013.4:536.252

*Н. В. Петровская, А. К. Фадеев, В. И. Юдович*

# ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ ВРАЩАТЕЛЬНО-ГРАВИТАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ

Рассматривается задача о двумерной конвекции вязкой несжимаемой жидкости во вращающемся горизонтальном слое со свободными изотермическими границами. Приближенные решения разыскиваются методом Галеркина. Численно изучаются устойчивость и бифуркации стационарных решений при изменении числа Рэлея R. Расчет задачи методом Галеркина проводился ранее в [1—3] (см. также [4, 5]). В настоящей работе изучены переходы в классе стационарных решений и вычислены соответствующие бифуркационные значения R.

Результаты даны для галеркинской системы 62 уравнений. Равновесия определяются методом Ньютона с продолжением по параметру R. Находятся бифуркационные значения R, отвечающие либо рождению пары равновесий, либо смене типа устойчивости равновесия. Остальные параметры (числа Прандтля и Тейлора, волновое число) с использованием результатов [6] фиксированы так, что потеря устойчивости относительного механического равновесия с ростом R монотонна, вторичные стационарные решения ответвляются в докритическую область и неустойчивы.

Тем не менее обнаружено несколько ветвей устойчивых стационарных движений. Способы их возникновения при монотонном возрастании R различны. В частности, представляется интересным следующий механизм: рождение «из воздуха» пары неустойчивых равновесий и затем возврат к устойчивости в результате бифуркации Андронова — Хопфа.

**1.** Пусть вязкая теплопроводная жидкость заполняет горизонтальный слой толщины $H$ со свободными недеформируемыми границами. Температура на нижней и верхней границах слоя $T_1$ и $T_2$ соответственно. В основном режиме жидкость вращается как твердое тело с угловой скоростью $\Omega$ вокруг вертикальной оси. Движение жидкости описывается уравнениями свободной конвекции в приближении Обербека — Буссинеска [7, 4], центробежной силой пренебрегаем.

В декартовой системе координат $(x, y, z)$, вращающейся вместе со слоем, поля относительной скорости $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ и температуры принимаются не зависящими от координаты $y$. Вводится функция тока $\psi$: $v_1 = \partial\psi/\partial z$, $v_3 = -\partial\psi/\partial x$. Уравнения движения имеют следующий безразмерный вид:

$$\partial\Delta\psi/\partial t = J(\psi, \Delta\psi) + \Delta^2\psi + \tau\partial v/\partial z - G\partial T/\partial x, \tag{1.1}$$
$$\partial v/\partial t = J(\psi, v) + \Delta v - \partial\psi/\partial z, \quad \partial T/\partial t = J(\psi, T) + \mathrm{Pr}^{-1}\Delta T - \partial\psi/\partial x.$$

Здесь за единицу измерения длины, времени $t$, скорости $\mathbf{v}$ и отклонения температуры от линейного профиля $T$ выбраны $H$, $H^2/\nu$, $\nu/H$, $T_1 - T_2$; $v = v_2/\mathrm{Re}$; $\mathrm{Re} = 2\Omega H/\nu$ — вращательное число Рейнольдса; $\tau = \mathrm{Re}^2$ — число Тейлора; $\mathrm{G} = g\beta H^3(T_1 - T_2)/\nu^2$ — число Грасгофа; $\mathrm{Pr} = \nu/\chi$ — число Прандтля; $\nu$, $\beta$, $\chi$ — коэффициенты кинематической вязкости, теплового расширения и температуропроводности; $g$ — ускорение силы тяжести; $J(\psi, \theta) = (\partial\psi/\partial x)(\partial\theta/\partial z) - (\partial\psi/\partial z)(\partial\theta/\partial x)$.

На границах слоя $z = 0$, 1 выполняются условия

$$\psi = \partial^2\psi/\partial z^2 = \partial v/\partial z = T = 0. \tag{1.2}$$

Функции $\psi$, $v$, $T$ предполагаются периодическими по $x$ с периодом $L = 2\pi/\alpha_0$. Ввиду (1.2) их можно считать определенными на всей плоскости $(x, z)$, периодическими по $z$ с периодом 2, причем

$$\psi(x, -z, t) = -\psi(x, z, t),\ v(x, -z, t) = v(x, z, t),\quad T(x, -z, t) = -T(x, z, t). \tag{1.3}$$

Ограничимся рассмотрением решений, удовлетворяющих дополнительным условиям симметрии

$$\psi(-x, z, t) = -\psi(x, z, t),\ v(-x, z, t) = -v(x, z, t),\quad T(-x, z, t) = T(x, z, t), \tag{1.4}$$

а также инвариантных относительно преобразования

$$S\colon\ (x, z) \mapsto (x + L/2, z + 1). \tag{1.5}$$

В силу (1.3), (1.4) и условий периодичности (1.5) эквивалентно преобразованию центральной симметрии относительно точки $(x_0, z_0)$, $x_0 = L/4$, $z_0 = 1/2$.

**2.** К задаче (1.1)—(1.5) применяется метод Галеркина. Приближенные решения разыскиваются в виде

$$\psi = \sum_{m,n} \psi_{mn}(t) \exp(i\alpha_0 mx + i\pi nz), \tag{2.1}$$

$$v = \sum_{m,n} v_{mn}(t) \exp(i\alpha_0 mx + i\pi nz),\ T = \sum_{m,n} T_{mn}(t) \exp(i\alpha_0 mx + i\pi nz),$$

где суммирование ведется по некоторому конечному множеству $M$ пар целых неотрицательных чисел: $(|m|, \ |n|) \in M$.

Ввиду вещественности функций $\psi$, $v$, $T$ и условий (1.3), (1.4) галеркинские коэффициенты $\psi_{mn}$, $v_{mn}$ и $T_{mn}$ вещественны и при этом

$$\psi_{m,-n} = -\psi_{mn},\ v_{m,-n} = v_{mn},\ T_{m,-n} = -T_{mn}; \tag{2.2}$$

$$\psi_{-m,n} = -\psi_{mn},\ v_{-m,n} = -v_{mn},\ T_{-m,n} = T_{mn}. \tag{2.3}$$

Из инвариантности решений относительно сдвига (1.5) следует, что

$$\psi_{mn} = v_{mn} = T_{mn} = 0, \text{ если } m + n \text{ нечетно.} \tag{2.4}$$

Таким образом, ряды Фурье (2.1) представляют собой записанные в комплексной форме разложения функций $\psi$, $v$, $T$ по гармоникам $\sin(m \times \times \alpha_0 x) \sin(n\pi z)$, $\sin(m\alpha_0 x)\cos(n\pi z)$, $\cos(m\alpha_0 x) \sin(n\pi z)$ соответственно.

Система дифференциальных уравнений для нахождения $\psi_{mn}(t)$, $v_{mn}(t)$ и $T_{mn}(t)$ приведена в [8]. Отметим, что она инвариантна относительно преобразования

$$J\colon\ (\psi_{mn}, v_{mn}, T_{mn}) \mapsto \left((-1)^m \psi_m, (-1)^m v_{mn}, (-1)^m T_{mn}\right), \tag{2.5}$$

отвечающего сдвигу координат $x \mapsto x + L/2$, и диссипативна, если в качестве $M$ выбрано любое из множеств $(N = 1, 2, 3, \ldots)$ $M_N = \{(m, n)\colon m + n \leqslant 2N,\ m + n \text{ четно}\} \cup \{(2k, 0) : k \leqslant 2N - 1\} \cup \{(0, 2k) : k \leqslant \leqslant 2N - 1\}$.

**3.** Расчет стационарных решений сделан для системы 62 галеркинских уравнений при $M = M_4$ с учетом (2.2)—(2.4). Отметим, что в случае невращающейся жидкости этого достаточно для правильного качественного воспроизведения бифуркационного портрета полных уравнений Буссинеска в рассматриваемой области параметров [9].

Равновесия галеркинской системы вычисляются методом Ньютона с продолжением по параметру — числу Рэлея $\mathrm{R} = \mathrm{Pr}\cdot \mathrm{G}$. Строятся кривые равновесий в прямом произведении фазового пространства системы на ось значений R. Остальные параметры задачи фиксированы: $\mathrm{Pr} = 0{,}05$, $\tau = 4$, $\alpha_0 = \pi/4$. Устойчивость равновесий определяется по спектру матрицы линейной системы для возмущений. Разыскиваются бифуркационные значения R, отвечающие рождению пары равновесий или смене типа устойчивости равновесия. Соответствующие точки ветвления разбивают кривую равновесий на отдельные участки — ветви равновесий.

Результаты представлены на рис. 1—3, где по вертикали отложен один из галеркинских коэффициентов $T_{02}$, $\psi_{11}$, а по горизонтали — число Рэлея. Для большей наглядности масштаб на рисунках не соблюден, сохранено лишь взаимное расположение ветвей равновесий. Для всех точек вычислены бифуркационные значения R: 667,7 ($A$), 665,0 ($B$), 20480 ($C$), 73690 ($D$), 795,7 ($E$), 1550 ($F$), 175000 ($G$), 19680 ($H$), 450000 ($K$), 57500 ($L$), 1051,5 ($M$), 1054,1 ($N$), 1933,4 ($P$), 1080 ($Q$), 1070 ($R$), 1800 ($S$), 1939,4 ($T$), 1580,8 ($U$).

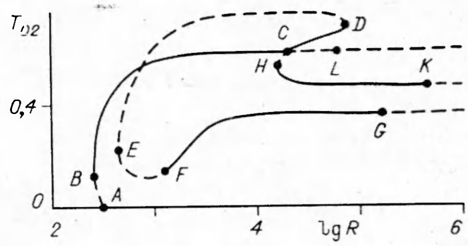


Рис. 1

3.1. Потеря устойчивости основного режима движения (твердотельного вращения жидкости) с ростом R может быть монотонной или колебательной [4, 7]. При выбранных Pr, $\tau$, $\alpha_0$ потеря устойчивости монотонная.

Для нормальных возмущений, зависящих от ($x$, $z$) посредством множителя $\exp(im\alpha_0 x + in\pi z)$, критические R монотонной неустойчивости определяются равенством

$$\mathrm{R}_{m,n}(\alpha_0, \tau) = \left[(m^2\alpha_0^2 + n^2\pi^2)^3 + \tau n^2\pi^2\right]/(m\alpha_0)^2. \tag{3.1}$$

При $\alpha_0 = \pi/4$, что приблизительно отвечает минимуму критического $\mathrm{R}_{3,1}$, и $\tau = 4$ из (3.1) получаем $\mathrm{R}_{3,1} = 667{,}7$; $\mathrm{R}_{5,1} = 1051{,}5$; $\mathrm{R}_{1,1} = 1933{,}4$. Если $\mathrm{R} < \mathrm{R}_{3,1}$, основной режим движения устойчив. Когда R, возрастая, проходит через критическое значение $\mathrm{R}_{m,n}$, от основного решения ответвляется пара вторичных стационарных решений. Им отвечают движения жидкости, периодические по $x$ и $z$ с волновыми числами $\alpha = m\alpha_0$ и $\gamma = n\pi$, переходящие друг в друга при сдвиге $x \mapsto x + \pi/\alpha$. Соответствующие равновесия галеркинской системы принадлежат инвариантному подпространству $P_{m,n}$, на котором равны нулю все галеркинские коэффициенты, кроме $\psi_{km,\,ln}$, $v_{km,ln}$, $T_{km,ln}$, $v_{2km,0}$, $T_{0,2ln}$ ($k$ и $l$ — натуральные числа). Сдвиг $x \mapsto x + \pi/\alpha$ определяет на $P_{m,\,n}$ преобразование координат $J_{m,n}$ аналогично (2.5), причем $J_{1,1} = J$. Возникающие при $\mathrm{R} = \mathrm{R}_{m,n}$ равновесия преобразованием $J_{m,n}$ переводятся друг в друга. Далее через $O_{m,n}$ обозначается то из них, которому отвечает положительное значение $\psi_{mn}$.

При $\mathrm{R} = \mathrm{R}_{3,1}$ и $\mathrm{R} = \mathrm{R}_{1,1}$ вторичные равновесия ответвляются в докритическую область, а при $\mathrm{R} = \mathrm{R}_{5,1}$ — в закритическую; все они неустойчивы. Тем не менее в вычислениях обнаружены несколько ветвей устойчивых равновесий (см. ниже).

На рисунках ветви вторичных равновесий $O_{3,1}$, $O_{5,1}$, $O_{1,1}$ обозначены $AB$, $MN$ и $PQ$. Линиям с точками $A$, $B$, $C$, $L$ (см. рис. 1) и $M$, $N$, $V$ (см. рис. 2, 3) отвечают равновесия на инвариантных подпространствах $P_{3,1}$

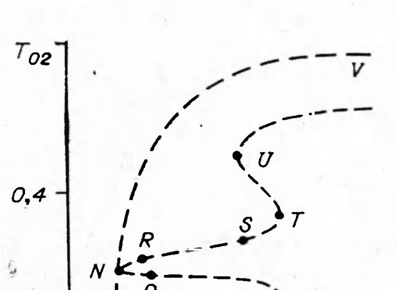


Рис. 2

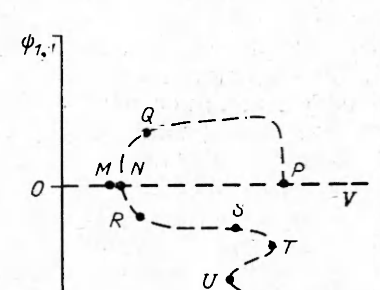


Рис. 3

и $P_{5,1}$ соответственно, остальным линиям — равновесия, у которых все фазовые координаты, вообще говоря, отличны от нуля.

3.2. Возникновение устойчивых равновесий связано с потерей устойчивости основного режима движения при $R = R_{3,1}$. На рис. 1 ветви таких равновесий изображены сплошной линией, а неустойчивых — штриховой. Буквы — точки ветвлений равновесий, соответствующие им R указывались ранее. Для каждой ветви укажем количество характеристических чисел равновесия, лежащих правее мнимой оси: 1 ($AB$), 0 ($BC$), 1 ($CL$), 0 ($CD$), 1 ($ED$), 2 ($EF$), 0 ($FG$), 1 ($HC$), 0 ($HK$), 1 ($MN$), 1 ($NQ$), 3 ($PQ$), 1 ($NR$), 3 ($RS$), 1 ($ST$), 2 ($TU$).

В точке $A$ происходит потеря устойчивости основного режима движения при $R = R_{3,1}$. Неустойчивые вторичные равновесия $O_{3,1}$ ответвляются в докритическую область (ветвь $AB$). С ростом R «из воздуха» возникает пара стационарных решений (точка $B$). Одно из них (ветвь $BC$) устойчиво. В точке $C$ эти равновесия теряют устойчивость в результате двусторонней бифуркации (простое характеристическое число равновесия проходит через нуль). При этом новые равновесия (ветвь $CD$) наследуют устойчивость ветви $BC$; на подпространстве $P_{3,1}$ устойчивость равновесий старой ветви сохраняется. В точке $L$ тип устойчивости равновесия изменяется в результате бифуркации рождения предельного цикла.

Еще одна бифуркация рождения «из воздуха» пары равновесий наблюдается в точке $H$. Равновесия ветви $HK$ устойчивы. Потеря их устойчивости в точке $K$ является колебательной и сопровождается возникновением предельного цикла.

Устойчивые равновесия ветви $FG$ возникают с ростом R в результате двух последовательных бифуркаций. Сначала в точке $E$ «из воздуха» возникает пара неустойчивых равновесий. Равновесия ветви $EF$ имеют два положительных характеристических числа, которые далее сливаются и образуют комплексно-сопряженную пару, а в точке $F$ возвращаются в левую полуплоскость. Потеря устойчивости равновесий в точке $G$ также происходит в результате бифуркации рождения предельного цикла.

3.3. Последующие бифуркации основного режима движения порождают лишь неустойчивые равновесия. Результаты их расчета приведены на рис. 2, 3; обозначения те же, что и на рис. 1. Точкам $M$, $P$ соответствуют критические значения $R = R_{5,1}$ и $R = R_{1,1}$, вторичным равновесиям $O_{5,1}$ и $O_{1,1}$ — ветви $MN$ и $PQ$. Представляет интерес точка ветвления $N$, в которой равновесия $O_{5,1}$ имеют простое нулевое характеристическое число. В этой точке от $O_{5,1}$, лежащего на инвариантном подпространстве $P_{5,1}$, ответвляется пара равновесий, не принадлежащих $P_{5,1}$. Ветвь $NQ$ в точке $Q$ соединяется с ветвью вторичных равновесий $PQ$. Отметим, что на рис. 3 равновесия, принадлежащие $P_{5,1}$, проектируются на ось $\psi_{1,1} = 0$.

В вычислениях обнаружены и другие точки ветвления равновесий. В частности, точкам $Q$, $R$, $S$ отвечает бифуркация рождения предельного цикла, а точкам $T$, $U$ — бифуркации рождения и гибели пары равновесий. Однако ни один из этих переходов не приводит к возникновению устойчивых равновесий.

4. Сформулируем основные выводы. В рассмотренной области параметров в фазовом пространстве системы существует довольно большое число равновесий с различными волновыми числами, кратными основному $\alpha_0$. В частности, обнаружены четыре ветви устойчивых равновесий.

Различны также способы возникновения устойчивых равновесий при монотонном возрастании R. Они могут возникать вместе с неустойчивыми равновесиями при бифуркации рождения пары равновесий «из воздуха», из неустойчивого равновесия в результате бифуркации рождения цикла, а также при двусторонней бифуркации, связанной с обменом устойчивостью между двумя равновесиями, одно из которых лежит, а другое не лежит на инвариантном подпространстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Veronis G.** Large amplitude Benard convection in a rotating fluid // J. Fluid Mech.— 1968.— V. 31, N 1.
2. **Герценштейн С. Я., Шмидт В. М.** Нелинейное развитие и взаимодействие возмущений конечной амплитуды при конвективной неустойчивости вращающегося плоского слоя // ДАН СССР.— 1975.— Т. 225, № 1.
3. **Герценштейн С. Я., Шмидт В. М.** Нелинейное взаимодействие конвективных волновых движений и возникновение турбулентности во вращающемся горизонтальном слое // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1977.— № 2.
4. **Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.** Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости.— М.: Наука, 1972.
5. **Беляев Ю. Н., Яворская И. М.** Конвективные течения во вращающихся сферических слоях // Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа.— 1982.— Т. 17.
6. **Петровская Н. В., Юдович В. И.** Вторичные стационарные и периодические режимы конвекции во вращающемся слое со свободными недеформируемыми границами//Задачи гидромеханики и тепломассообмена со свободными границами.— Новосибирск: НГУ, 1987.
7. **Chandrasekhar S.** The instability of a layer of fluid heated below and subject to Coriolis forces // Proc. Roy. Soc. London.— 1953.— V. A217, N 1130.
8. **Петровская Н. В., Фадеев А. К., Юдович В. И.** Численное исследование конвекции во вращающемся слое.— Ростов н/Д, 1987.— Деп. в ВИНИТИ 11.02.87, N 996-В87.
9. **Петровская Н. В.** О применении метода Галеркина к исследованию переходов в задаче рэлеевской конвекции // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1984.— № 2.

*г. Ростов-на-Дону* *Поступила 17/VII 1989 г.*

---

УДК 533.6.01

*Н. Ж. Джайчибеков, С. К. Матвеев*

# ПРИМЕНЕНИЕ ТРЕХКОМПОНЕНТНОЙ МОДЕЛИ К РАСЧЕТУ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ ГАЗОВЗВЕСЬЮ И РАЗРЕЖЕННЫМ ГАЗОМ

Для описания задачи обтекания тел газовзвесью (газом с твердыми частицами) в [1] предложена четырехкомпонентная модель. Газовзвесь представляется смесью четырех компонентов: несущего газа и трех сортов частиц — не претерпевших столкновений падающих $s$-частиц, упорядоченно движущихся отраженных $r$- и хаотически движущихся $t$-частиц. Предполагается, что любые две столкнувшиеся частицы (учитываются только парные столкновения) оказываются в сорте $t$. Частицы считаются одинаковыми сферами, диаметр которых $d_0$ много меньше характерного размера тела, а плотность $\rho_0$ много больше плотности газа. Функция распределения $t$-частиц по скоростям полагается близкой к максвелловской и для $t$-компонента используются некоторые результаты кинетической теории, полученные для газа, состоящего из сферических молекул. При этом пренебрегается влиянием сопротивления несущего газа и возможной неупругости столкновений на вид формул для потоков массы, импульса и энергии. Эти факторы учитываются при вычислении кинетической энергии хаотического движения частиц $U_t$, определяемой из уравнения баланса, в котором присутствуют члены, описывающие диссипацию этой энергии вследствие указанных причин.

Перечисленные предположения, подробно обсужденные в [1], не имеют строгого обоснования, однако они позволили построить довольно простую модель газовзвеси, учитывающую хаотическое движение частиц и, как показало сравнение расчетов [2] с экспериментальными данными [3], правильно описывающую экранирующее влияние отраженных частиц.

Практическая реализация этой модели весьма сложна. Однако в ряде случаев нет надобности использовать модель в полном объеме и хаотическое движение частиц можно учесть в рамках более простых моделей среды. Так, в [4] решается задача обтекания сферы газовзвесью на основе трехкомпонентной модели, где $r$- и $t$-компоненты объединены. Это условие выполняется, например, когда поверхность тела имеет шероховатость, соизмеримую с размером частиц.

В данной работе изучается случай, когда влиянием газа на движение частиц можно пренебречь. Такие условия реализуются в экспериментах, где длина скоростной релаксации частиц много больше характерного размера тела [3, 5], и можно рассматривать обтекание тел потоком твердых частиц (без учета несущей фазы). Если принять также, что газ из $t$-частиц невязкий и нетеплопроводный, то балансовые уравнения можно записать