

Р и с. 3

Как видно из рис. 2, штриховые линии, построенные по (6''') с $p_* = 7,5\%$, $\alpha = 1,3$, удовлетворительно отвечают сплошным (эксперимент).

На рис. 3 представлены диаграммы ползучести титанового сплава ЗВ при нормальной температуре [4] (20°C). Здесь реализуется энергетическая модель $z \equiv A$. Из вычислений видно, что процесс ползучести описывается случаем 2 с $\lambda = 5$. При этом может быть приближенно принято $l_0 = A_*$ [4] и соотношения (5''), (7'') преобразуются:

$$(7''') \quad \frac{t}{t_*} = 1 - (1 - A/A_*)^{|r|+1} \sum_{k=0}^5 \frac{(|r|+1) \dots (|r|+k)}{k!} \left(\frac{A}{A_*}\right)^k.$$

Штриховые линии, построенные по соотношению (7''') с $r = -4,8$, удовлетворительно совпадают со сплошными (эксперимент).

ЛИТЕРАТУРА

1. Аршакуни А. Л. Кинетический вариант теории ползучести и длительной прочности металлов // ПМТФ.— 1986.— № 3.
2. Трунин И. И. Об одном варианте уравнения состояния при ползучести // Деформирование и разрушение твердых тел.— М.: Изд-во МГУ, 1977.
3. Лепин Г. Ф. Ползучесть металлов и критерии жаропрочности.— М.: Metallургия, 1976.
4. Соснин О. В. Оценка длительной прочности по диссипативным характеристикам // Закономерности ползучести и длительной прочности.— М.: Машиностроение, 1983.
5. Горев Б. В., Никитенко А. Ф., Соснин О. В. К обоснованию энергетического варианта теории ползучести // Пробл. прочности.— 1976.— № 11.
6. Соснин О. В., Шокало И. К. Энергетический вариант теории ползучести и длительной прочности // Пробл. прочности.— 1974.— № 1.
7. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций.— М.: Наука, 1966.
8. Аршакуни А. Л., Мельников Г. П. и др. Экспериментальная проверка моделей неустановившейся ползучести // Пробл. прочности.— 1981.— № 4.
9. Киселевский В. Н., Косов Б. Д. Экспериментальная проверка уравнения состояния для процесса ползучести упрочняющегося материала // Пробл. прочности.— 1976.— № 9.

г. Москва

Поступила 16/II 1988 г.

УДК 639.3

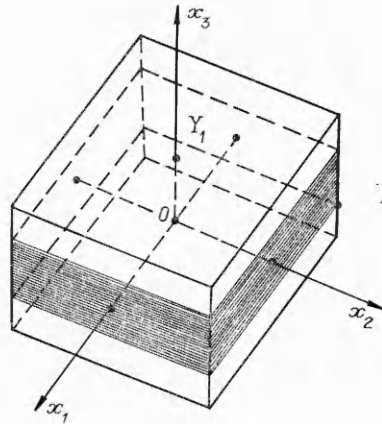
А. Г. Колпаков

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СЛОИСТЫХ ПЛАСТИНОК

В работе на основании выполненных в [1] асимптотических исследований задачи теории упругости в тонких (толщины $h \rightarrow 0$) областях проведено вычисление жесткостных характеристик слоистых пластинок. Применение к полученным формулам методов [2, 3] позволило решить задачу проектирования слоистых пластинок с заданным набором жесткостных характеристик.

Определяющие уравнения слоистых пластинок. В [1] проведен асимптотический анализ задачи теории упругости в тонкой области, толщина h которой стремится к нулю, и обоснованы два метода, которые могут быть

использованы при расчете слоистых пластинок: предельный переход при $h \rightarrow 0$ и тот же предельный переход с привлечением ячеечной задачи (задачи L в терминах [1]). В первом случае получаем явные формулы для вычисления жесткостей, во втором — те же формулы, но с предварительным решением ячеечной задачи. В данной работе, изучая механику изгиба слоистых пластинок, проследуем по второму пути.



Пусть рассматриваемая пластинка образована из слоев однородных изотропных материалов (параллельных плоскости Ox_1x_2). Толщина пластины $h \ll 1$. Покроем пластину прямоугольной сеткой со стороной длины $\sim h$. Элемент этой сетки P_h выделяет ячейку $Y_h = P_h \times [-h/2, h/2]$, называемую ячейкой периодичности. В переменных $y = 2x/h$ ячейка периодичности Y_h переходит в ячейку $Y_1 = P_1 \times [-1, 1]$ (рис. 1). Будем считать, что $P_1 = [-1, 1] \times [-1, 1]$. В [1] получены следующие определяющие уравнения тонких пластинок:

$$(1) \quad N_{ij} = S_{ij\alpha\beta}^{11} \gamma_{\alpha\beta} - S_{ij\alpha\beta}^{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha \partial x_\beta};$$

$$(2) \quad M_{ij} = S_{ij\alpha\beta}^{21} \gamma_{\alpha\beta} - S_{ij\alpha\beta}^{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \quad \alpha = 1, 2,$$

где

$$(3) \quad S_{ij\alpha\beta}^{\mu\nu} = (-1)^{\mu+\nu} \int_{P_1} (-y_3)^{\mu-1} \left[(-y_3)^{\nu-1} a_{ij\alpha\beta} + a_{ijkl} \frac{\partial \xi_b^{\alpha\beta\nu}}{\partial y_l} \right] dy,$$

$\mu, \nu = 1, 2$, а функции $\xi^{\alpha\beta\nu}$ определяются из решения ячеечной задачи (задача L [1]) на ячейке Y_1

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial y_j} a_{ijkl}(y) \frac{\partial}{\partial y_l} (\xi^{\alpha\beta\nu} + e_{\alpha\beta} y_3^{\nu-1})_k = 0$$

с нулевыми нормальными напряжениями на поверхностях пластинки при $y_3 = \pm 1/2$, условием периодичности на P_1 (по переменным y_1, y_2) и нормировкой $\langle \xi^{\alpha\beta\nu} \rangle = 0$ ($\langle \rangle$ обозначает среднее по ячейке Y_1). В (1), (2) $\{N_{ij}\}$ и $\{\gamma_{ij}\}$ есть усилия и деформации в плоскости пластинки (в их классическом смысле); $\{M_{ij}\}$ — моменты; v — перемещения в плоскости пластинки; w — нормальный прогиб.

Рассмотрим задачу (4) для частного случая $\alpha = 1, k = 1$. Она, как нетрудно заметить, является задачей о растяжении ($\nu = 1$) или изгибе ($\nu = 2$) слоистого тела Y_1 . Будем искать ее решение в виде

$$(5) \quad \sigma_{11} = \sigma_{11}(y_3), \quad \sigma_{22} = \sigma_{22}(y_3), \quad \sigma_{ii} = 0 \text{ при } ij \neq 11, 22, \quad e_{22} = 0$$

($\sigma_{ij} = a_{ijkl}(y) e_{kl}$ — напряжения, $e_{ij} = (1/2)(u_{i,j} + u_{j,i})$ — деформации, соответствующие перемещениям $u^{k\alpha\nu} = \xi^{k\alpha\nu} + e_{\alpha\beta} y_3^{\nu-1}$ из задачи (4)). Как видно, при поиске решения в виде (5) условия на нормальные напряжения при $y_3 = \pm 1/2$ выполнены.

При $\nu = 1$ находим решение задачи (4) в виде

$$(6) \quad \sigma_{11} = \frac{E(y_3)}{1 - \nu^2(y_3)}, \quad \sigma_{22} = \frac{E(y_3) \nu(y_3)}{1 - \nu^2(y_3)}$$

или

$$u_1^{111} = y_1, \quad u_2^{111} = 0, \quad u_3^{111} = - \int \frac{\nu(y_3)}{1 - \nu^2(y_3)} dy_3 + \text{const.}$$

Условия периодичности для функции $\xi^{111} = u^{111} - e_1 y_1$ выполнены.

При $\nu = 2$ вновь ищем решение в виде (5). Из закона Гука имеем

$$(7) \quad e_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E(y_3)} - \frac{\nu(y_3)\sigma_{22}}{E(y_3)}, \quad e_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E(y_3)} - \frac{\nu(y_3)\sigma_{11}}{E(y_3)}, \quad e_{33} = -\frac{\nu(y_3)}{E(y_3)}(\sigma_{11} + \sigma_{22}),$$

в силу чего $\sigma_{22} = \nu(y_3)\sigma_{11}$ и

$$(8) \quad e_{11} = \frac{1 - \nu^2(y_3)}{E(y_3)} \sigma_{11}, \quad e_{33} = -\frac{\nu(y_3)(1 + \nu(y_3))}{E(y_3)} \sigma_{11},$$

откуда (с учетом симметрии задачи относительно плоскости $y_1 = 0$) путем интегрирования (8) получаем

$$(9) \quad u_1^{112} = \frac{1 - \nu^2(y_3)}{E(y_3)} \sigma_{11}(y_3) y_1, \quad u_2^{112} = 0, \\ u_3^{112} = -\int \frac{\nu(y_3)(1 + \nu(y_3))}{E(y_3)} \sigma_{11}(y_3) dy_3 + U(y_1).$$

В силу $e_{13} = 0$ из (9) находим

$$(10) \quad \frac{\partial u_1}{\partial y_3} + \frac{\partial u_3}{\partial y_1} = \frac{\partial}{\partial y_3} \left(\frac{1 - \nu^2}{E} \sigma_{11} \right) (y_3) y_1 + \frac{\partial U(y_1)}{\partial y_1} = 0.$$

Равенство (10) возможно только в случае

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial y_3} \left(\frac{1 - \nu^2}{E} \sigma_{11} \right) (y_3) = C = \text{const}, \quad \frac{\partial U(y_1)}{\partial y_1} = -C y_1,$$

откуда

$$(12) \quad \frac{1 - \nu^2(y_3)}{E(y_3)} \sigma_{11}(y_3) = C y_3 + A, \quad U(y_1) = -\frac{C}{2} y_1^2 + B.$$

После чего из (9) имеем

$$(13) \quad u_1^{112} = C y_1 y_3 + A y_1, \quad u_2^{112} = 0, \\ u_3^{112} = -\int \frac{\nu(y_3)}{1 - \nu(y_3)} (C y_3 + A) dy_3 - \frac{C}{2} y_1^2 + B.$$

Для того чтобы функция $\xi^{112} = u^{112} - e_1 y_1 y_3$ (u^{112} дается (13)) была периодична по y_1, y_2 , следует положить в (13) $C = 1$ и $A = 0$. Постоянная B , которая может быть определена из условия $\langle \xi^{112} \rangle = 0$, не влияет на величины $S_{ijkl}^{\mu\nu}$, в связи с чем не подсчитывается. В результате получаем

$$(14) \quad \sigma_{11} = \frac{E(y_3) y_3}{1 - \nu^2(y_3)}, \quad \sigma_{22} = \frac{E(y_3) \nu(y_3) y_3}{1 - \nu^2(y_3)}.$$

Подстановка выражений (6), (14) в (3) приводит к формулам для вычисления жесткостей $S_{iiii}^{\mu\nu}$ ($i = 1, 2$):

$$(15) \quad S_{iiii}^{11} = \frac{h}{2} \int_{-1}^1 \frac{E(y_3)}{1 - \nu^2(y_3)} dy_3, \\ S_{iiii}^{12} = S_{iiii}^{21} = \left(\frac{h}{2}\right)^2 \int_{-1}^1 \frac{E(y_3) y_3}{1 - \nu^2(y_3)} dy_3, \quad S_{iiii}^{22} = \left(\frac{h}{2}\right)^3 \int_{-1}^1 \frac{E(y_3) y_3^2}{1 - \nu^2(y_3)} dy_3.$$

Вычислим $S_{1122}^{\mu\nu} = S_{2211}^{\mu\nu}$. Для этого требуется знать, например, напряжения σ_{22} , соответствующие функции $\xi^{11\nu} + e_1 y_1 y_3^{\nu-1}$ ($\alpha = 1, k = 1$). Эти напряжения известны (см. (6), (14)). В результате из (6), (14), (3) имеем

$$(18) \quad S_{11}^{12} = \int_1^{-1} \frac{E(\hat{y}_3)}{h} \left(\frac{z}{h} \right) dz = \int_1^{-1} E(\hat{y}_3) \Phi(\hat{y}_3) \nu(\hat{y}_3) \hat{y}_3^{\nu-1} dz = S_{11}^{12\alpha\beta}$$

Обратившись к формулам (15)–(17), замечаем, что решение формулы (18) сводится к решению уравнения

линейной задачи проективного свертывания кривой в плоскости. Обратившись к формулам (15)–(17), замечаем, что решение формулы (18) сводится к решению уравнения

линейной задачи проективного свертывания кривой в плоскости. Обратившись к формулам (15)–(17), замечаем, что решение формулы (18) сводится к решению уравнения

линейной задачи проективного свертывания кривой в плоскости. Обратившись к формулам (15)–(17), замечаем, что решение формулы (18) сводится к решению уравнения

линейной задачи проективного свертывания кривой в плоскости. Обратившись к формулам (15)–(17), замечаем, что решение формулы (18) сводится к решению уравнения

$$(17) \quad S_{11}^{12} = \int_1^{-1} \frac{E(\hat{y}_3)}{h} \left(\frac{z}{h} \right) dz = S_{11}^{12\alpha\beta}$$

и величины

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = E(\hat{y}_3) / (1 + \nu(\hat{y}_3)), \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = E(\hat{y}_3) \nu(\hat{y}_3) / (1 + \nu(\hat{y}_3)), \quad \sigma_{11} \neq 12, 21 \quad (\nu = 2)$$

Для вычисления жесткости S_{11}^{12} следует получить решение задачи (4) для функции вида $\mathbf{n} = \mathbf{e}_{12} + \mathbf{e}_{1\nu} \hat{y}_3^{\nu-1} + \mathbf{e}_{1\nu} \hat{y}_3^{\nu-1} + \mathbf{e}_{1\nu} \hat{y}_3^{\nu-1}$. С этой целью можно воспользоваться найденным выше решением (при $h = 1$, $\alpha = 1$) в системе координат, повернутой на φ_0 . Имено, если в повернутой на φ_0 системе координат рассмотреть функцию $\mathbf{v} = \mathbf{n}_{11}$, то после возвращения к исходной системе координат функция \mathbf{v} будет суммой решений задачи (4): $\mathbf{v} = \mathbf{e}_{12} + \mathbf{e}_{1\nu} \hat{y}_3^{\nu-1} + \mathbf{e}_{1\nu} \hat{y}_3^{\nu-1} + \mathbf{e}_{1\nu} \hat{y}_3^{\nu-1}$ (сумма решений отвечающих $h = 2$, $\alpha = 1$ и $h = 1$, $\alpha = 2$). После чего легко найдем напряжения σ_{ij} , соответствующие указанной функции \mathbf{v} :

$$(16) \quad S_{11}^{12} = S_{12}^{11} = S_{21}^{12} = S_{22}^{11} = \int_1^{-1} \frac{E(\hat{y}_3) \nu(\hat{y}_3)}{h} \left(\frac{z}{h} \right) dz = S_{11}^{12\alpha\beta}$$

относительно функций $E(y_3)$, $v(y_3)$ и числа h (функции $\Phi_{ij\alpha\beta}(v)$ определены в (15)–(17)). Перечисленные величины, очевидно, однозначно описывают пластинку (ее толщину и строение по толщине). Задача (18) некорректна [5].

Случай $v = \text{const}$, $E_0 \leq E(y) \leq E^0$ представляет теоретический интерес, поскольку удастся получить аналитически условие разрешимости задачи (18) и на его основе описать (аналитически же) множество возможных значений жесткостей слоистых пластинок.

Легко заметить, что при $v(y_3) = \text{const} = v$ все $\{S_{ij\alpha\beta}^{\mu\nu}\}$ выражаются через три функционала:

$$(19) \quad I_i(E) = \int_{-1}^1 E(y) y^i dy, \quad i = 0, 1, 2.$$

Пусть $E(y) \in \{f \in L_\infty([-1, 1]) : E_0 \leq E(y) \leq E^0\} \equiv U_E$ — класс используемых при проектировании пластинок материалов. Очевидно, что задача (18) разрешима тогда и только тогда, когда $\{S_{ij\alpha\beta}^{\mu\nu}\}$ принадлежат образу множества U_E при отображении, заданном правой частью (18), для вычисления которого достаточно знать образ U_E при отображении (19).

Рассмотрим экстремальную задачу

$$(20) \quad I_j(E) = A_j, \quad j = 0, \dots, i, \quad i = 1, 2;$$

$$(21) \quad I_{i+1}(E) \rightarrow \min = \min_{i+1}(\max = \max_{i+1});$$

$$(22) \quad E(y) \in U_E.$$

Лемма 1. Функционал $I_{i+1}(E)$ ($i = 0, 1$) на множестве U_E при выполнении условия (20) принимает все значения из интервала $[\min_{i+1}, \max_{i+1}]$.

Доказательство. Пусть $E_1(y)$, $E_2(y) \in U_E$ — решения задач максимизации и минимизации (20)–(22) при данном i . Поскольку множество U_E выпукло, а функционалы $I_i(E)$ (19) линейны, то функция $E(y) = \lambda E_1(y) + (1 - \lambda)E_2(y) \in U_E$ и удовлетворяет равенству (20) при любых $\lambda \in [0, 1]$. Для нее имеем $I_{i+1}(E) = \lambda \max_{i+1} + (1 - \lambda) \min_{i+1}$, откуда получаем требуемое.

Лемма 2. Функционал $I_0(E)$ на множестве U_E принимает все значения из интервала $[2E_0, 2E^0]$.

Очевидно.

Лемма 3. При $i = 0$ в задаче (20)–(22)

$$(23) \quad \min_1 = \frac{(2E_0 - A_0)(2E^0 - A_0)}{2(E^0 - E_0)}, \quad \max_1 = -\frac{(2E_0 - A_0)(2E^0 - A_0)}{2(E^0 - E_0)}.$$

Доказательство. Выражения (20)–(22) — задача Ляпунова [6], вследствие чего ее решение $\bar{E}(y) \in U_E$, если оно существует, удовлетворяет принципу минимума [6, с. 354], имеющему в рассматриваемом случае вид: почти для всех $y \in [-1, 1]$

$$(24) \quad \min(\lambda_0 y E(y) + \lambda_1 E(y)) = \lambda_0 y \bar{E}(y) + \lambda_1 E(y).$$

Минимум берется по всем $E(y) \in U_E$, удовлетворяющим условию (20) (при $i = 0$). В силу линейности (24) по $E(y)$ и $\bar{E}(y)$ получаем, что $\bar{E}(y)$ почти для всех $y \in [-1, 1]$ принимает два значения: либо E_0 , либо E^0 . После чего нахождение функции $\bar{E}(y)$ и получение формул (23) тривиальны.

Лемма 4. При $i = 1$ в задаче (20)–(22)

$$(25) \quad \min_2 = \frac{2E_0}{3} - \frac{(2E_0 - A_0)^3}{3(E^0 - E_0)^2}, \quad \max_2 = \frac{2E^0}{3} - \frac{(2E^0 - A_0)^3}{3(E^0 - E_0)^2}.$$

Доказательство. Для решения $\bar{E}(y)$ задачи (20)–(22) при $i = 1$ принцип минимума [6] принимает вид: почти для всех $y \in [-1, 1]$

$$(26) \quad \min (\lambda_0 y^2 E(y) + \lambda_1 y E(y) + \lambda_2 E(y)) = \lambda_0 y^2 \bar{E}(y) + \lambda_1 y \bar{E}(y) + \lambda_2 \bar{E}(y).$$

Минимум берется по $E(y) \in U_E$, удовлетворяющим (20) (при $i = 1$).

В силу линейности выражений в (26) по $E(y)$, $\bar{E}(y)$ получаем

$$(27) \quad \widehat{E}(y) = \begin{cases} E_0 & \text{при } \lambda_0 y^2 + \lambda_1 y + \lambda_2 \leq 0, \\ E^0 & \text{при } \lambda_0 y^2 + \lambda_1 y + \lambda_2 > 0. \end{cases}$$

Вследствие того что в правой части (27) стоит квадратичный трехчлен, функция $\widehat{E}(y) = E_0$ при $y \in [a, b] \subset [-1, 1]$ и $\widehat{E}(y) = E^0$ при $y \notin [a, b]$ (в случае $\lambda_0 > 0$). Легко проверить, что при выборе $\lambda_0 = 1$ и

$$(28) \quad 2a = -\frac{2A_1}{2E_0 - A_0} - \frac{2E_0 - A_0}{E^0 - E_0}, \quad 2b = -\frac{2E_0 - A_0}{E^0 - E_0} - \frac{2A_1}{2E_0 - A_0}$$

условия (20) при $i = 1$ удовлетворены, причем $-1 \leq a \leq b \leq 1$ (для A_0, A_1 , изменяющихся в пределах, указанных в леммах 2, 3), откуда вытекают формулы (25).

Леммы 2–4 дают описание образа множества U_E при отображении (19). После чего можно получить описание образа множества U_E при отображении, заданном правой частью (18). Мы дадим это описание в механических терминах.

Предложение.

А. *Пластинка слоистого строения толщины h , изготовленная из материалов с модулями Юнга E ($\nu = \text{const}$), удовлетворяющими условию $E_0 \leq E \leq E^0$ (т. е. $E(y) \in U_E$), может обладать наборами жесткостей $S_{1111}^{11}, S_{1111}^{12}, S_{1111}^{22}$ (и не может обладать другими):*

$$(29) \quad \begin{aligned} \frac{hE_0}{1-\nu^2} &\leq S_{1111}^{11} \leq \frac{hE^0}{1-\nu^2}, \\ \frac{h^2(2E_0 - A_0)(2E^0 - A_0)}{8(E^0 - E_0)(1-\nu^2)} &\leq S_{1111}^{12} \leq -\frac{h^2(2E_0 - A_0)(2E^0 - A_0)}{8(E^0 - E_0)(1-\nu^2)}, \\ \frac{h^3}{24(1-\nu^2)} \left(2E_0 - \frac{(2E_0 - A_0)^3}{3(E^0 - E_0)^2} \right) &\leq S_{1111}^{22} \leq \frac{h^3}{24(1-\nu^2)} \left(2E^0 - \frac{(2E^0 - A_0)^3}{3(E^0 - E_0)^2} \right), \end{aligned}$$

где $A_0 = S_{1111}^{11}(1-\nu^2)/h$. Ненулевые $S_{ij\alpha\beta}^{uv}$, не указанные в (29), выражаются через $S_{1111}^{11}, S_{1111}^{12}, S_{1111}^{22}$ согласно формулам, получающимся из (15)–(17) при $\nu = \text{const}$.

Б. *Пластинка с любым допустимым набором жесткостей $S_{ij\alpha\beta}^{uv}$ (29) может быть образована не более чем из пяти слоев при использовании не более трех различных материалов.*

Доказательство. Утверждение п. А следует из лемм 2–4. Для проверки утверждения п. Б достаточно воспользоваться леммой 1, имея в виду, что функции $E_1(y), E_2(y)$ в этой лемме могут быть взяты в виде (27).

Дискретная задача проектирования. Используя выше ограничения $E_0 \leq E \leq E^0$ представляют интерес с теоретической точки зрения, доставляя возможность оценить множество «возможных в принципе» значений жесткостных характеристик слоистых пластинок. В практике же ограничения вида $E_0 \leq E \leq E^0, \nu_0 \leq \nu \leq \nu^0$ (означающие, что мы располагаем при изготовлении пластинок материалами с любыми, какие только потребуются, наборами материальных характеристик $(E, \nu) \in [E_0, E^0] \times [\nu_0, \nu^0]$) не имеют места. Реально для создания пластинок могут быть взяты материалы из некоторого конечного набора. Обозначим через E_α, ν_α модули Юнга и коэффициенты Пуассона α -го материала из этого набора, $\alpha = 1, \dots, M$, где M — общее число материалов, которые

могут быть использованы для изготовления пластинки. В описанном случае функции $E(y)$, $v(y)$ в (19) принимают значения из множества $\{(E_\alpha, v_\alpha), \alpha = 1, \dots, M\}$ (дискретные значения) и принадлежат классу функций $U_d = \{f \in L_\infty([-1, 1]) : f(t) \in \{(E_\alpha, v_\alpha), \alpha = 1, \dots, M\} \forall t \in [-1, 1]\}$.

Изложим метод приближенного решения уравнения (19) в классе U_d . Произведем разбиение интервала $[-1, 1]$ (по которому производится интегрирование в (19)) с шагом $\delta > 0$. Получим разбиение $\Delta_n = [-1 + \delta n, -1 + \delta(n+1))$, $n = 1, \dots, [2/\delta]$. Введем функцию $y_\delta(y) = y_n = \delta n$ на $[-1 + \delta n, -1 + \delta(n+1))$. Рассмотрим вместо (19) задачу

$$(30) \quad \left(\frac{h}{2}\right)^{\mu+v-1} \int_{-1}^1 E(y) \Phi_{ijkl}(v(y)) (y_\delta(y))^{\mu+v-2} dy = S_{ijkl}^{\mu\nu}.$$

Легко проверить, что для функций $E(y)$, $v(y)$, $\{\Phi_{ijkl}(v)\}$ разность правых частей (19) и (30) не превосходит величины

$$(31) \quad 2\delta \max_{\alpha=1, \dots, M} \frac{E_\alpha}{1 - v_\alpha^2},$$

т. е. решение задачи (30) доставляет приближенное решение задачи (19) (погрешность решения оценивается величиной (31)).

Обозначим через μ_n^α меру подмножества интервала Δ_n , на котором функции $E(y)$, $v(y)$ принимают α -е значение E_α , v_α . В принятых обозначениях задача (30) приводится к виду

$$(32) \quad \sum_{n=1}^N \sum_{\alpha=1}^M \mu_n^\alpha \mathbf{v}_n^\alpha = \mathbf{V}, \quad \mathbf{v}_n^\alpha = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_n^\alpha \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z} \\ \delta \mathbf{1} \end{pmatrix},$$

где векторы-столбцы \mathbf{Z}_n^α , \mathbf{Z} , \mathbf{e}_n , $\mathbf{1}$ есть

$$\mathbf{Z}_n^\alpha = ((\delta n)^{\mu+v-1} E_\alpha \Phi_{ijkl}(v_\alpha)), \quad \mathbf{Z} = \left(S_{ijkl}^{\mu\nu} \left(\frac{2}{h}\right)^{\mu+v-1} \right) \in R^9,$$

$$\mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ на } i\text{-м месте}, \quad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in R^{[2/\delta]}.$$

При этом выполнены вытекающее из определения $\{\mu_n^\alpha\}$ соотношение

$$(33) \quad \sum_{n=1}^N \sum_{\alpha=1}^M \mu_n^\alpha = 1, \quad \mu_n^\alpha \geq 0,$$

а также с учетом $\sum_{\alpha=1}^M \mu_n^\alpha = \delta$ вторая группа равенств в (32).

Задача (32), (33) представляет собой задачу о нахождении коэффициентов $\{\mu_n^\alpha\}$ выпуклых комбинаций точек $\{\mathbf{V}_n^\alpha\}$, доставляющих данную точку \mathbf{V} . Исследование этой задачи проведено в [3], алгоритм численного решения изложен в [7]. Согласно [3], множество решений задачи (32), (33) (если оно не пусто) может быть представлено в виде

$$(34) \quad \mu_n^\alpha = \sum_{\gamma=1}^s P_{n\gamma}^\alpha \lambda_\gamma, \quad \sum_{\gamma=1}^s \lambda_\gamma = 1, \quad \lambda_\gamma \geq 0.$$

Метод нахождения величин $\{P_{n\gamma}^\alpha\}$ (так называемых симплицальных решений) изложен в [7, 8].

Построение частных решений задачи проектирования. В ряде случаев не возникает потребности в получении всех возможных решений за-

дачи проектирования, что имеет место при использовании для создания пластинки небольшого числа материалов. Здесь полезным оказывается метод построения частных решений задачи (18), излагаемый ниже.

Будем строить приближенное решение задачи (18). Проведем дискретизацию интервала интегрирования $[-1, 1]$ с шагом $\delta > 0$ и интервала $[H_1, H_2]$ (возможные толщины пластинки) с шагом $\delta_1 > 0$. Введем кусочно-постоянную функцию $y_\delta(y) = y_n = -1 + n\delta$ при $y \in [-1 + n\delta, -1 + (n+1)\delta)$, $i = 1, \dots, [2/\delta]$ и класс кусочно-постоянных функций

$$V = \left\{ f \in L_\infty([-1, 1]) : f(y) = \text{const} \in \{E_\alpha\}_{\alpha=1}^M \right. \\ \left. \text{при } y \in [-1 + n\delta, -1 + (n+1)\delta), n = 1, \dots, [2/\delta] \right\}.$$

Рассмотрим уравнение

$$(35) \quad H_j^{\mu\nu} \int_{-1}^1 [y_\delta(y)]^{\mu+\nu-2} E(y) \Phi_{ijkl}(v(y)) dy = S_{ijkl}^{\mu\nu},$$

где $\mu, \nu = 1, 2$; $H_j^{\mu\nu} = ((H_1 + j\delta_1)/2)^{\mu+\nu-1}$; $E(y) \in V$.

Как легко проверить, решение задачи (35) удовлетворяет равенству (18) с погрешностью, не превышающей

$$(36) \quad \max \left(H_2, \frac{H_2^2}{8}, \frac{H_2^3}{12} \right) \max_{\alpha=1, \dots, M} \left(E_\alpha \frac{\nu_\alpha}{1 - \nu_\alpha^2} \right) \delta.$$

Уравнение (35) в данном случае сводится к следующему:

$$(37) \quad \delta \sum_{n=1}^{[2/\delta]} X_{nj\alpha} = X.$$

Здесь

$$(38) \quad X_{nj\alpha} = \left(\left\{ \frac{H_j^{\mu\nu} E_\alpha y_n^{\mu+\nu-2}}{1 - \nu_\alpha^2} \right\}, \left\{ \frac{H_j^{\mu\nu} E_\alpha \nu_\alpha y_n^{\mu+\nu-2}}{1 - \nu_\alpha^2} \right\}, \left\{ \frac{H_j^{\mu\nu} E_\alpha y_n^{\mu+\nu-2}}{1 + \nu_\alpha} \right\} \right), \\ X = (\{S_{1111}^{\mu\nu}\}, \{S_{1122}^{\mu\nu}\}, \{S_{1212}^{\mu\nu}\}), \quad \mu\nu = 11, 12, 22,$$

причем индексы $\alpha \in \{1, \dots, M\}$ у слагаемых в сумме (37) могут принимать любые значения независимо, а индекс $j \in \{1, \dots, [(H_2 - H_1)/\delta_1]\}$ один и тот же для всех слагаемых. Как видно из (37), (38), присутствие в сумме (37) слагаемого $X_{nj\alpha}$ означает, что n -й слой (слой $[-1 + n\delta, -1 + (n+1)\delta]$) пластинки занят α -м материалом, а толщина пластинки есть $H_1 + j\delta_1$.

Задача (37) некорректна [5]. С целью получения ее приближенного решения будем проводить минимизацию модуля вектора $S = X - \delta \sum_{n=1}^{[2/\delta]} X_{nj\alpha}$ [5] на основании следующего алгоритма:

1. На первом шаге набор векторов $\{X_{nj\alpha}^1\} \subset \{X_{nj\alpha}\}$, входящих в сумму (37), задается произвольно (например, $X_{nj\alpha}^1 = X_{n11}$).

2. Пусть на k -м шаге в сумму (37) входят векторы $\{X_{nj\alpha}^k\}$. Проведем вариацию системы $\{X_{nj\alpha}^k\}$: заменим индекс j на j_* (что соответствует изменению толщины пластинки от $H_1 + j\delta_1$ до $H_1 + j_*\delta_1$) и вектор $\bar{X}_{mj_*\alpha}^k$ на $X_{mj_*\alpha}^k$ (что отвечает замене в m -м слое α -го материала на α_* -й). Нетрудно вычислить, что соответствующая вариация вектора S^k будет равна

$$(39) \quad \delta S^k = \delta \left(\sum_{n=1}^{[2/\delta]} X_{nj_*\alpha}^k - \bar{X}_{mj_*\alpha}^k \right) + \delta \bar{X}_{mj_*\alpha}^k - \delta \sum_{n=1}^{[2/\delta]} X_{nj\alpha}^k.$$

Если $|S^k + \delta S^k| < |S^k|$, система векторов заменяется на $\{X_{1j_*\alpha}^k, \dots, X_{mj_*\alpha}^k, \dots\} = \{X_{nj\alpha}^{k+1}\}$. При невыполнении условия $|S^k + \delta S^k| < |S^k|$ варьирование следует продолжить.

З а м е ч а н и е 3. Условие $|S^h + \delta S^h| < |S^h|$ может оказываться невыполненным ни для каких вариаций. Это согласуется с тем, что задача (37) является некорректной и может не иметь решения.

3. Выполняем описанные в п. 2 действия до тех пор, пока или не попадем в ситуацию замечания 3 (нет решения), или невязка $|S^h|$ не станет меньше заданной величины (решение задачи получено с заданной точностью и дается набором векторов $\{X_{n\alpha}^h\}$).

П р и м е р 1. Пусть требуется получить проект пластинки с жесткостными характеристиками: жесткость на растяжение $S_{1111}^{11} = 1 \cdot 10^9$, кососимметричная часть жесткости $S_{1111}^{12} = S_{1111}^{21} = 0$, жесткость на изгиб $S_{1111}^{22} = 0,06 \cdot 10^5$. Отметим, что для однородной пластинки с жесткостью на растяжение $S_{1111}^{11} = 1 \cdot 10^9$ остальные из перечисленных выше характеристик равны $S_{1111}^{12} = S_{1111}^{21} = 0$, $S_{1111}^{22} = 0,0937 \cdot 10^5$ ($\nu = 1/3$).

Для решения задачи был применен описанный выше алгоритм построения частного решения (реализованный в виде программы для ЭВМ на языке ФОРТРАН). Проект пластины будем описывать формулой, состоящей из фрагментов вида nI (I — индекс материала, n — число соседних слоев, занятых I -м материалом). В качестве материалов, которые могут быть использованы для изготовления пластинки, выбраны: сталь ($E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0,3$, индекс Ст), алюминий ($E = 0,7 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0,3$, индекс А), капрон ($E = 0,06 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0,4$, индекс К). Условие на толщину пластинки $1 \leq h \leq 0,81 \cdot 10^{-2}$ м.

ЭВМ был выдан проект (5К 18Ст 1К 4Ст 22К 1Ст 1К 2Ст 1К 19Ст 6К) (пластинка по толщине разбивалась на 80 интервалов с шагом $\delta = h/80$). Толщина пластинки $h = 0,81 \cdot 10^{-2}$ м. Жесткостные характеристики проекта следующие:

$$S_{1111}^{11} = 1,0052 \cdot 10^9, \quad S_{1111}^{12} = 0,0003 \cdot 10^7, \quad S_{1111}^{22} = 0,0602 \cdot 10^5$$

(при расчете относительная погрешность решения 0,02).

З а м е ч а н и е 4. Как видно, полученный проект проявляет свойства быстрой осцилляции характеристик (в нем присутствует фрагмент (1Ст 1К 2Ст 1К)). Наличие этого свойства связано с некорректностью задачи и может быть подробно проанализировано на основании формулы (34). Не будем проводить здесь математического исследования этого вопроса. Отметим только, что замеченный эффект означает, что решения типа композиционного материала (содержащего большое число тонких чередующихся слоев) естественным образом возникают из решения задач рассматриваемого вида. Наличие решений, соответствующих композитам, в задачах оптимального проектирования отмечалось в [9].

П р и м е р 2. Пусть с теми же материалами и при том же ограничении на толщину требуется получить проект пластинки с жесткостными характеристиками

$$S_{1111}^{11} = 1 \cdot 10^9, \quad S_{1111}^{12} = S_{1111}^{21} = 0, \quad S_{1111}^{22} = 0,12 \cdot 10^5.$$

ЭВМ был выдан проект (20Ст 41К 19Ст) (шаг разбиения тот же, что в примере 1). Толщина пластинки $h = 0,905$ м.

Жесткостные характеристики полученного проекта следующие:

$$S_{1111}^{11} = 1,0028 \cdot 10^9, \quad S_{1111}^{12} = 0,0001 \cdot 10^7, \quad S_{1111}^{22} = 0,118 \cdot 10^5$$

(относительная погрешность решения 0,02).

ЛИТЕРАТУРА

1. Caillerie D. Thin elastic and periodic plates // Math. Meth. Appl. Sci.— 1984.— N 6.
2. Колпаков А. Г., Ракин С. И. К задаче синтеза композиционного материала одномерного строения с заданными характеристиками // ПМТФ.— 1986.— № 6.
3. Колпаков А. Г., Ракин С. И. Задача синтеза композита одномерного строения в заданном классе материалов // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1986.— Вып. 78.

4. Колпаков А. Г. Эффективные жесткости композиционных пластинок // ПММ.— 1982.— Т. 46, вып. 2.
5. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1986.
6. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление.— М.: Наука, 1979.
7. Колпаков А. Г. Усредненные характеристики слоистых композитов (численный алгоритм)// Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Материалы IX Всесоюз. конф.— Новосибирск: ИТГИМ СО АН СССР, 1986.
8. Аннин Б. Д., Колпаков А. Г. Проектирование слоистых композитов с заданными деформационно-прочностными характеристиками // Механика композит. материалов.— 1987.— № 1.
9. Лурье К. А., Черкаев А. В. Регуляризация проблемы оптимального проектирования неоднородных упругих тел с помощью композиционных материалов // V Всесоюз. съезд по теор. и прикл. механике.— Алма-Ата: Наука, 1981.

г. Новосибирск

Поступила 9/II 1988 г.

УДК 533.6.011.8 : 533.694.71/72

А. В. Ботин, В. Н. Гусев, В. П. Провоторов

ГИПЕРЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ ЗАТУПЛЕННЫХ КРОМОК ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

При планирующем спуске с орбиты летательный аппарат подвергается интенсивному нагреванию в континуальной области обтекания. В то же время даже при относительно низких высотах полета и малых радиусах затупления отдельных элементов летательного аппарата и, следовательно, при малых значениях локального числа Рейнольдса в этих областях ударную волну уже нельзя рассматривать как разрыв, на котором выполняются соотношения Ранкина — Гюгонно, и влияние вязкости не будет ограничено тонким пограничным слоем. При гиперзвуковых скоростях из-за большой энергии потока в возмущенной области течения существенными могут стать такие физико-химические процессы, как гетерогенные химические реакции, диссоциация, возбуждение колебательных, вращательных и поступательных степеней свободы молекул.

Первоначально основным источником информации в рассматриваемой переходной области был эксперимент. В последующем для однородного газа стали успешно применяться численные методы решения уравнения Больцмана, среди которых наибольшее развитие получил метод прямого статистического моделирования Монте-Карло. Однако при учете физико-химических процессов в воздухе такие исследования пока, как правило, проводятся лишь с помощью уравнений Навье — Стокса или их моделей с граничными условиями скольжения и скачка температуры. Строгого обоснования применимости этих уравнений нет, однако многочисленные сопоставления с результатами экспериментов и численных расчетов кинетического уравнения Больцмана для однородного газа показывают, что уравнения Навье — Стокса могут успешно использоваться при изучении гиперзвуковых течений при малых числах Рейнольдса. Современное состояние вопроса в данной области содержится в [1].

Ниже в рамках теории тонкого вязкого ударного слоя проведено численное исследование обтекания затупленных кромок и носовых частей гиперзвукового летательного аппарата, сравниваются полученные результаты с экспериментальными данными.

1. Проведенный в [2] анализ показал, что в переходной области при скоростях, меньших или порядка первой космической, неравновесные физико-химические процессы в воздухе оказывают относительно слабое влияние на процессы передачи импульса и энергии элементу поверхности обтекаемого тела. На этих режимах в первом приближении состав воздуха можно считать замороженным и течение в тонком вязком ударном слое в окрестности затупленной кромки описывать следующей системой уравнений:

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial x'} (h_2 \rho' u') + \frac{\partial}{\partial y'} (h_1 h_2 \rho' v') = 0,$$