

Эти результаты находятся в качественном согласии с результатами данной работы, указывающими, что при  $p_0 d_* \approx 1300$  мм рт. ст. · мм характер расширения потока азота на расстояниях более  $(200-300)r_*$  от среза сопла не отличается от расширения потока одноатомного газа.

Поступила 18 I 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Еремин А. В., Кочнев В. А., Набоко И. М. Исследование формирования струи газа при истечении в разреженное пространство. — ПМТФ, 1975, № 2, с. 53—58.
2. Чекмарев С. Ф. Неустановившееся радиальное расширение газа в затопленное пространство от внезапно включенного стационарного источника. — ПМТФ, 1975, № 2, с. 70—78.
3. Белавин В. А., Голуб В. В., Набоко И. М., Опара А. М. Исследование нестационарной структуры потока при истечении ударно-нагретого газа. — ПМТФ, 1973, № 5, с. 34—40.
4. Волчков В. В., Иванов А. В., Кисляков Н. И., Ребров А. К., Сухнев В. А., Шарафутдинов Р. Г. Струи низкой плотности за звуковым соплом при больших перепадах давления. — ПМТФ, 1973, № 2, с. 64—73.
5. Milne A., Vandergruff A., Greene F. Mass-spectrometric observations of argon clusters in nozzle beams. — «J. Chem. Phys.», 1970, vol. 52, N 3.
6. Golomb D., Good R. E., Balley A. B., Basby M. R., Dawman R. Dimers, clusters and condensation in free jets. — «J. Chem. Phys.», 1972, vol. 57, N 9.
7. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М., «Наука», 1972.
8. Лукьянов Г. А. Вращательная релаксация в свободно расширяющейся струе азота. — ПМТФ, 1972, № 3, с. 176—178.

УДК 532. 526

### УСТОЙЧИВОСТЬ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ КАТАЛИТИЧЕСКИ РЕКОМБИНИРУЮЩЕГО ГАЗА

Г. В. Петров

(Новосибирск)

Исследуется устойчивость пограничного слоя частично диссоциированного двухатомного газа. Обтекаемая поверхность каталитически активна, и газ рекомбинирует на ней. Анализ устойчивости проводится в приближении Дана и Лина [1]. Уравнения для малых возмущений в форме бегущей волны имеют вид

$$\begin{aligned} i(u - C)r + \rho' \varphi + \rho(if + \varphi') &= 0; \\ \rho[i(u - C)\gamma + c' \varphi] &= \mu \gamma'' / \alpha \operatorname{ReSc}; \\ \rho \alpha^2 (u - C) \varphi &= i \pi' / \kappa_\infty M_\infty^2; \\ \rho [i(u - C)f + u' \varphi] &= -i \pi / \kappa_\infty M_\infty^2 + \mu f'' / \alpha \operatorname{Re}; \\ \rho [i(u - C)\vartheta + T' \varphi] &= i(u - C)\pi(c_{p\infty} - c_{v\infty}) / c_p + \mu \vartheta'' / \alpha \operatorname{RePr}; \\ \pi &= \gamma / (1 + c) + r / \rho + \vartheta / T, \end{aligned}$$

где  $u$  — скорость течения газа в пограничном слое;  $\rho$  — плотность;  $T$  — температура;  $c$  — степень диссоциации;  $\mu$  — вязкость;  $c_p$  и  $c_v$  — удель-

ная теплоемкость при постоянном давлении и объеме;  $\kappa_\infty = c_{p\infty}/c_{v\infty}$ ;  $M_\infty$  — число Маха на внешней границе пограничного слоя;  $Pr$  — число Прандтля;  $Sc$  — число Шмидта;  $Re$  — число Рейнольдса;  $\alpha$  — волновое число;  $C$  — фазовая скорость распространения возмущения;  $f, \varphi, \pi, r, \vartheta, \gamma$  — амплитудные функции пульсаций величин  $u, v/\alpha, p, \rho, T, c$  соответственно;  $p$  — давление;  $v$  — поперечная составляющая скорости. Штрих обозначает дифференцирование по поперечной координате  $y$ , индекс  $\infty$  — значения величин на внешней границе пограничного слоя, по которым и проводится обезразмеривание. Термодиффузией пренебрегается.

Граничные условия на внешней границе пограничного слоя определяются из условия затухания возмущений вне пограничного слоя. К граничным условиям для пульсаций скорости на поверхности ( $f_0 = \varphi_0 = 0$ , индекс 0 относится к значениям на стенке) должны быть добавлены два условия, налагаемые на пульсации параметров состояния. Одно из них определяется из требования непрерывности величин пульсаций температуры и нормальной составляющей теплового потока при переходе через границу газ — материал поверхности. Предполагая, что коэффициенты теплопроводности и температуропроводности материала поверхности постоянны, можно получить затухающее в глубь стенки решение для поля температуры в форме бегущей волны, а затем и искомое условие

$$(1) \quad \Delta \mu [c_p \vartheta' / Pr + T_d \gamma' / Sc] - \sqrt{a \alpha^2 - i \alpha Re C \vartheta} = 0 \text{ при } y = 0,$$

где  $T_d = \varepsilon / k T_\infty$ ;  $\Lambda = \sqrt{a k \mu_\infty / 2 m \lambda^0}$ ;  $a = \lambda^0 / \nu_\infty \rho^0 c_p^0$ ;  $\varepsilon$  — энергия диссоциации молекулы;  $k$  — постоянная Больцмана;  $m$  — масса атома;  $\rho^0, c_p^0, \lambda^0$  — плотность, удельная теплоемкость и теплопроводность материала поверхности;  $\nu_\infty = \mu_\infty / \rho_\infty$ ;  $c_p$  здесь обезразмерена на  $k/2m$ .

Второе условие следует из соотношения баланса между числом атомов, рекомбинирующих на поверхности, и числом атомов, диффундирующих к поверхности, и имеет вид  $\gamma'/c' = w^*/w$  при  $y = 0$ , где  $w$  и  $w^*$  — скорость поверхностной рекомбинации и ее возмущение. Относительно кинетики рекомбинации используются следующие допущения. Реакция имеет первый порядок, т. е.  $w = k_0 \rho (c - c_e) / (1 - c_e)$  при  $y = 0$ , где  $k_0$  — константа скорости рекомбинации,  $c_e$  — равновесная степень диссоциации на поверхности. Зависимость константы равновесия  $K = 4 p c_e^2 / k T (1 - c_e^2)$  от температуры находится в соответствии с законом Аррениуса  $K = A \exp(-T_d/T)$ . Соотношения для константы равновесия используются для исключения пульсаций равновесной степени диссоциации при получении окончательной формы граничного условия

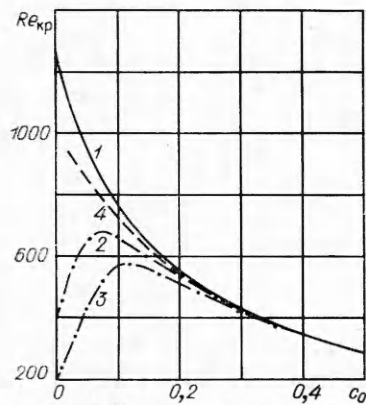
$$c' \{ (c - c_e + c_1) \pi - [c - c_e + c_1 (1 + T_d/T)] \vartheta / T + (1 + c_e) \gamma / (1 + c) \} - (c - c_e) \gamma' = 0 \text{ при } y = 0,$$

где  $c_1 = (1 - c)(1 + c_e)c_e/2$ .

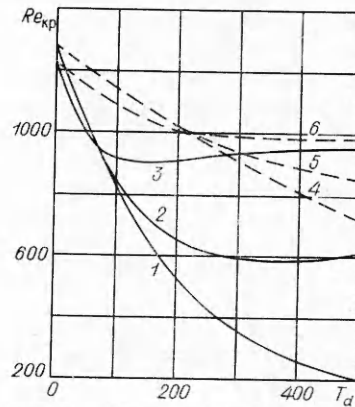
За основное течение принимается безградиентный пограничный слой на плоской пластине, который при конечной скорости рекомбинации не является автомодельным. Расчет пограничного слоя производится методом локального подобия. Этот метод дает точные результаты в предельных случаях некаталитической и идеально каталитической изотермической поверхности. Приближенные результаты, получаемые с его помощью для поверхностей конечной каталитической активности, в случае безградиентного обтекания близки к точным [2] и вполне пригодны для проводимых в данной работе исследований.

Численный расчет проводился для  $Pr = Sc = 1$ . Предполагалось, что вязкость не зависит от степени диссоциации и пропорциональна температуре, а вклад в теплоемкость вносят лишь поступательная и вращательная степени свободы молекулы. Вычислялись только характеристики нейтральной устойчивости.

На фиг. 1, 2 приведены результаты расчета критических чисел Рейнольдса  $Re_{кр} = \sqrt{u_{\infty} x_{кр} / \nu_{\infty}}$  для изотермического пограничного слоя при  $M_{\infty} = 0$ ,  $c_{\infty} = 0,5$ . Кривая 1 на фиг. 1, изображающая зависимость  $Re_{кр}$  от степени диссоциации газа на холодной стенке ( $c_e = 0$ ) при  $\Lambda = 0$ , показывает, что увеличение каталитической активности поверхности (т. е. уменьшение  $c_0$ ) приводит к повышению устойчивости. Для некаталитической поверхности ( $c_0 = c_{\infty} = 0,5$ ), как и следовало ожидать, ре-



Фиг. 1



Фиг. 2

зультаты совпадают с результатами для недиссоциирующего газа. Случай идеально каталитической поверхности ( $c_0 = c_e = 0$ ), когда течение наиболее устойчиво, исследовался при различных  $T_0$  и  $c_{\infty}$  в [3], где отмечено, что  $Re_{кр}$  возрастает более чем на порядок при увеличении  $c_{\infty}$  от 0 до 1.

Влияние тепловыделения при рекомбинации в случае холодной стенки учитывается лишь вторым членом в квадратных скобках соотношения (1). Расчеты показывают, что влиянием параметров  $a$  и  $\Lambda$  при  $a \leq 100$ ,  $\Lambda \leq 0,01$  можно пренебречь. Однако при больших  $T_d$  может стать существенным параметр  $T_D = \Lambda T_d$ . Кривые 2, 3 соответствуют  $T_D = 5$ ; 10 и показывают, что тепловыделение за счет реакции приводит к понижению  $Re_{кр}$ , причем наиболее существенному в случае поверхностей большой каталитической активности. Следует заметить, что повышение средней температуры поверхности в результате реакции в работе не учитывается. Предполагается, что все освобожденное реакцией тепло отводится и влияние тепловыделения на устойчивость осуществляется только через граничные условия для возмущения.

Кривая 4 построена для  $c_e = 10^{-2}$ ,  $T_D = 5$ ,  $\Lambda = 0,01$  и показывает, что повышение равновесной степени диссоциации на поверхности (главным образом в результате ее нагревания) приводит к ослаблению влияния экзотермичности реакции. Более подробно влияние  $c_e$  рассмотрено для случая идеально каталитической поверхности ( $c_0 = c_e$ ). Кривые 1—3 на фиг. 2 соответствуют  $c_e = 0$ ,  $10^{-3}$ ,  $10^{-2}$  при  $\Lambda = 0,02$ , а кривые 4—6 — тем же значениям  $c_e$  при  $\Lambda = 0,005$ . Видно, что в случае конечных

$c_e$  уменьшение  $Re_{кр}$  ограничено, так что при больших  $T_d$  зависимость от  $\Lambda$  и  $T_d$  становится слабой. Для промежуточных значений  $T_d$  важны все параметры, в том числе и  $\Lambda$ , например,  $Re_{кр}$  при  $\Lambda = 0,02$  достигает меньших значений, чем при  $\Lambda = 0,005$ . Для малых  $T_d$  справедливо приближение холодной стенки и определяющим параметром является  $T_D$ . Однако, когда  $c_e$  достигает значений порядка  $c_\infty$ , область понижения  $Re_{кр}$ , а следовательно, и само понижение малы. Поэтому устойчивость практически не зависит от тепловыделения при рекомбинации, и значения  $Re_{кр}$  можно определять с помощью кривой 1 на фиг. 1.

Характерные значения параметров  $a$ ,  $\Lambda$  и  $T_D$  для азота при  $T_\infty = 0^\circ\text{C}$ ,  $p_\infty = 1$  ат и различных материалов поверхности приведены в таблице. Азот выбран потому, что он является основным компонентом воздуха и имеет большую энергию диссоциации, соответствующую  $T_d = 415$ . Сопоставление таблицы с полученными результатами показывает, что тепловой эффект реакции может быть существенным при нормальных условиях лишь в случае слабо теплопроводных и достаточно каталитических стенок (каталитичность обеспечивается, например, напылением тонкого слоя катализатора на поверхность). Все приведенные в работе результаты получены при допущении  $a = 0$ . Из (1) следует, что это допущение справедливо при  $a \ll Re C/\alpha$ ; прямой счет, как уже указывалось, дает оценку  $a \leq 100$ ; значения, приведенные в таблице, намного меньше. Когда давление и температура отличаются от нормальных, приближение  $\mu_\infty/T_\infty = \text{const}$  позволяет получить оценки

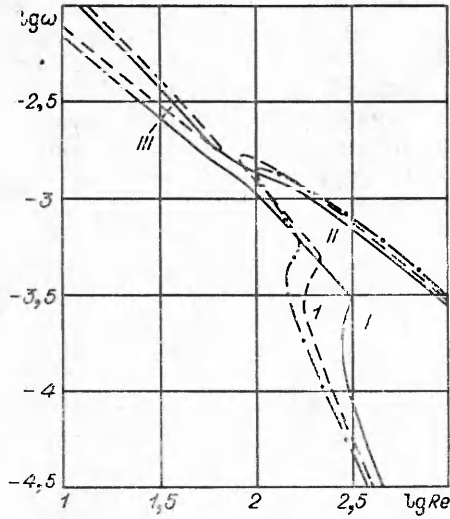
Материал поверхности	$a$	$\Lambda \cdot 10^3$	$T_D$
Металлы	13	0,04	0,017
	0,51	0,23	0,1
Плотные изоляторы	0,053	0,8	0,34
	0,002	4	1,7
Пористые изоляторы	0,002	18	7,4

$$(2) \quad \Lambda \sim \sqrt{p_\infty}, T_D \sim \sqrt{p_\infty/T_\infty}, a \sim p_\infty/T_\infty^2.$$

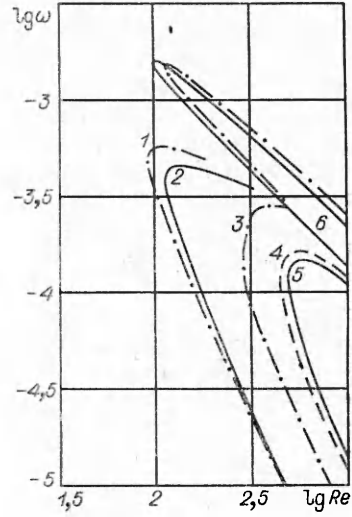
Очевидно, что в случае металлической стенки эти параметры могут играть роль только при больших давлениях (100 и более атмосфер).

При сверхзвуковых течениях область неустойчивости имеет сложный вид. На фиг. 3, 4 приведены нейтральные кривые относительно  $\omega = \alpha C/Re$  для  $M_\infty = 5$ . Сплошные кривые соответствуют идеально каталитической поверхности, штрихпунктирные — некаталитической, а штриховые — недиссоциирующему газу. Расчеты проводились при  $c_\infty = 0,5$ ,  $c_e = T_D = \Lambda = 0$ . Предполагалось, что температура поверхности неизменна и равна температуре теплоизолированной поверхности для недиссоциирующего газа  $T_0 = 6$ . Исключение составляют результаты для охлажденной до  $T_0 = 3$  пластины, изображенные на фиг. 4 кривыми 3—6. Кривые 1, 2 получены для трехмерных возмущений, распространяющихся под углом  $60^\circ$ .

Кривая 1 на фиг. 3 ограничивает область неустойчивости, образовавшуюся в результате слияния основной области I, существующей и при дозвуковом течении, и области II, которая является первой из бесконечного семейства областей, описанного в [4]. Кроме того, найдена неизвестная ранее область III, которая простирается до малых чисел Рейнольдса, соответствующих  $\alpha Re \leq 1$ , захватывая при этом почти весь допустимый для данного  $M_\infty$  диапазон  $C$ . В случае идеально каталитической поверхности эта область соединяется с II, благодаря чему и была обнаружена. При больших  $\omega$  пространственная протяженность областей неустойчивости мала. Поэтому можно ожидать, что коэффициенты усиления высоко-



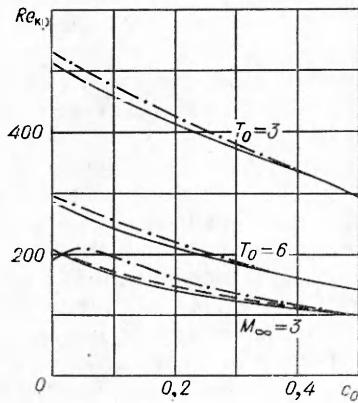
Ф и г. 3



Ф и г. 4

частотных возмущений невелики, и главный интерес представляют низкие частоты, характерные для основной области неустойчивости  $I$ . Тогда можно видеть, что увеличение каталитической активности приводит, как и при малых скоростях течения, к сужению области неустойчивости. В отличие от случая  $M_\infty = 0$  результаты для некаталитической поверхности не совпадают с результатами для недиссоциирующего газа.

На фиг. 5 представлены зависимости  $Re_{кр}$  от  $c_0$  для основной области неустойчивости при  $M_\infty = 5$ ,  $T_0 = 6$  и  $3$  и  $M_\infty = 3$ ,  $T_0 = 2,8$ . Сплошные линии соответствуют реакции без теплового эффекта, штрихпунктирные —  $T_D = 20$ ,  $c_e = 0$ , а штриховые —  $c_e = 10^{-2}$ ,  $T_D = 20$ ,  $\Lambda = 0,01$ . Сравнение с результатами для малых скоростей течения (см. фиг. 1) показывает, что устойчивость слабее зависит как от каталитической активности поверхности, так и тепловыделения при рекомбинации, особенно в области небольших  $c_0$ . Качественное отличие влияния тепловыделения заключается в том, что оно повышает устойчивость течения. Увеличение  $c_e$ , как и в случае  $M_\infty = 0$ , ослабляет влияние экзотермичности реакции.



Ф и г. 5

В области гиперзвукового полета полученные результаты могут иметь практический интерес для анализа устойчивости пограничного слоя на боковой поверхности затупленных клиньев и конусов. Диссоциированный за головным скачком уплотнения газ быстро расширяется, не успевая полностью рекомбинировать, и образует на боковой поверхности замороженное и почти безградиентное течение [5]. Поскольку давления в таких течениях значительно ниже 1 ат, из таблицы и оценок (2) следует, что значения  $T_D$  по крайней мере на порядок ниже того, которое было использовано в расчетах. Становится очевидным, что тепловыделение

не окажет через граничные условия для возмущений практически никакого влияния и устойчивость будет полностью определяться распределением скорости и параметров состояния в пограничном слое.

Поступила 7 II 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Dunn D. W., Lin C. C. On the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid.— «J. Aeronaut. Sci.», 1955, vol. 22, N 7.
2. Blottner F. G. Chemical nonequilibrium boundary layer.— «AIAA J.», 1964, vol. 2, N 2.
3. Петров Г. В. Устойчивость пограничного слоя газа с химическими реакциями на каталитической поверхности.— ФГВ, 1974, т. 10, № 6.
4. Mack L. M. Linear stability theory and the problem of supersonic boundary-layer transition.— «AIAA J.», 1975, vol. 13, N 3.
5. Северинов Л. И. Расчет сверхзвуковой части возмущенной области у затупленного тела при сверхзвуковом неравновесном обтекании.— ЖВММФ, 1968, т. 8, № 3.

УДК 519.46:533.6

### ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ ГАЗА

Б. В. Лапко

(Новосибирск)

Система уравнений, описывающая нестационарное трехмерное движение политропного газа, имеет вид

$$(1) \quad D\mathbf{u} + (1/\rho)\nabla p = 0, \quad D\rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad Dp + \gamma p \operatorname{div} \mathbf{u} = 0,$$

где  $\mathbf{u}$  — вектор скорости с компонентами  $u, v, w$ ;  $p$  — давление;  $\rho$  — плотность;  $\gamma$  — показатель адиабаты;  $D = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$  — оператор полной производной.

В работе [1] найдена основная группа Ли преобразований, допускаемая этой системой. Базисные операторы алгебры Ли этой группы следующие:

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial/\partial t, \quad X_2 = \partial/\partial x, \quad X_3 = \partial/\partial y, \quad X_4 = \partial/\partial z, \\ X_5 &= t\partial/\partial t + x\partial/\partial x + y\partial/\partial y + z\partial/\partial z, \\ X_6 &= t\partial/\partial x + \partial/\partial u, \quad X_7 = t\partial/\partial y + \partial/\partial v, \\ X_8 &= t\partial/\partial z + \partial/\partial w, \quad X_9 = t\partial/\partial t - u\partial/\partial u - v\partial/\partial v - \\ &- w\partial/\partial w + 2\rho\partial/\partial\rho, \quad X_{10} = z\partial/\partial y - y\partial/\partial z + w\partial/\partial v - \\ &- v\partial/\partial w, \quad X_{11} = x\partial/\partial z - z\partial/\partial x + u\partial/\partial w - w\partial/\partial u, \\ X_{12} &= y\partial/\partial x - x\partial/\partial y + v\partial/\partial u - u\partial/\partial v, \\ X_{13} &= p\partial/\partial p + \rho\partial/\partial\rho. \end{aligned}$$