

**РАСЧЕТНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СВЕРХЗВУКОВОЙ СТРУИ, ИСТЕКАЮЩЕЙ
ИЗ ОТВЕРСТИЯ С ПЛОСКИМИ СТЕНКАМИ**

В. Н. Камзолов, У. Г. Пирумов

(Москва)

Приводятся результаты исследования сверхзвуковой струи, истекающей из отверстия с плоскими стенками. Координаты звуковой линии рассчитаны с использованием решения Ф. И. Франкля [1]. Сверхзвуковая часть струи рассчитана методом характеристик. Полученное численное решение было использовано для расчета семейства вееров волн разрежения и семейства сопел с угловой точкой с криволинейной поверхностью перехода. В результате этих расчетов показано, что при наличии угловой точки форма звуковой линии практически не влияет на интенсивность разгона потока вдоль оси симметрии. Показано также, что на контуре сопла за угловой точкой возникает положительный градиент давления, если угловая точка расположена вверх по потоку от предельной характеристики первого семейства.

В окрестности центра сопла проделано сравнение с приближенным трансзвуковым решением [2, 3]. Авторы глубоко признательны Г. К. Буниной за помощь в проведении расчетов.

1. Расчет звуковой линии, возникающей при истечении сверхзвуковой струи из отверстия с плоскими стенками. В работе Ф. И. Франкля [1] дано решение задачи об истечении сверхзвуковой струи из отверстия с плоскими стенками. Для плоского отверстия со стенками, наклоненными к оси x под углом $\theta_0 = 1/2 \pi$, проведен расчет формы звуковой линии и скорости на стенке.

Приведенная в работе [1] формула для функции тока ψ имеет вид

$$\psi = -\theta/\pi + a_0\psi^\circ + \delta\psi \quad (1.1)$$

$$\Gamma\psi^\circ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n(\tau)}{z_n(\tau_*)} \frac{\sin 2n\theta}{n^{4/3}} \quad (1.2)$$

$$\delta\psi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{z_n(\tau)}{z_n(\tau_*)} \sin 2n\theta \quad (1.3)$$

Здесь θ — угол наклона скорости к оси x ; τ — квадрат отношения скорости к скорости истечения в вакуум; τ_* — значение τ в звуковой точке.

При определении коэффициентов в (1.3) из граничных условий Ф. И. Франкль ограничился вычислением первых четырех коэффициентов. Формула (1.3) использовалась для определения координат звуковой линии и наклона скорости на ней. По значениям функции тока ψ координаты звуковой линии определяются при помощи уравнений Чаплыгина и формул перехода от физической плоскости к плоскости годографа [4]. После некоторых преобразований этих соотношений получим

$$x(\theta) = 3.864 \left[-\int_0^{\pi/2} \left(\psi + \frac{\partial\psi}{\partial\tau} \right) \cos \theta d\theta + \int_0^\theta \left(\psi + \frac{\partial\psi}{\partial\tau} \right) \cos \theta d\theta - \frac{1}{2} - \psi \sin \theta \right] \quad (1.4)$$

$$y(\theta) = 3.864 \left[\int_0^\theta \left(\psi + \frac{\partial\psi}{\partial\tau} \right) \sin \theta d\theta + \psi \cos \theta \right]$$

При расчете ψ и $\partial\psi/\partial\tau$ использовались формулы, позволяющие просуммировать ряд (1.2) при $\tau = \tau_*$, а именно

$$\Gamma(\alpha) \sum \frac{e^{ni\varphi}}{n^\alpha} = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1} dx}{e^{x-i\varphi} - 1} \quad (\alpha > 0)$$

(где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция), а также асимптотические формулы для $z'_n(\tau)$ при $\tau = \tau_*$, приведенные в работе [1]

$$\frac{\tau^*}{n} \cdot \frac{z'_n(\tau_*)}{z_n(\tau_*)} = -\frac{1}{2} \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} (C_0 n^{-1/2} + C_1 n^{-1} + C_2 n^{-3/2} + C_3 n^{-2/3}) \quad (1.5)$$

где $C_0 = -2.444$, $C_1 = 1.2305$, $C_2 = -0.6478$, $C_3 = 0.23779$ и γ — отношение удельных теплоемкостей. В результате несложных преобразований для ψ и $\partial\psi/\partial\tau$ были полу-

чены формулы

$$\psi = -\frac{\theta}{\pi} + \sum_1^3 a_n \sin 2n\theta + \frac{a_0 \sin 2\theta}{\Gamma(4/3)} A$$

$$2\tau_* \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left\{ \left[\frac{C_0}{\Gamma(2/3)} B + \frac{C_1}{\Gamma(4/3)} A + \frac{C_2}{\Gamma(2)} C + \frac{C_3}{\Gamma(4/3)} D \right] a_0 \sin 2\theta + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^3 a_n \sin 2n\theta [C_0 n^{-1/2} + C_1 n^{-1} + C_2 n^{-5/3} + C_3 n^{-7/3}] \right\}$$

$$A = \int_0^{\infty} \frac{x^{1/3} dx}{e^x + e^{-x} - 2 \cos 2\theta}, \quad B = \int_0^{\infty} \frac{3/2 (e^x - e^{-x}) x^{1/3} dx}{(e^x - 2 \cos 2\theta + e^{-x})^2}$$

$$C = \int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x + e^{-x} - 2 \cos 2\theta}, \quad D = \int_0^{\infty} \frac{x^{5/3} dx}{e^x + e^{-x} - 2 \cos 2\theta}$$

На ЭВМ М-20 была составлена программа и рассчитаны координаты звуковой линии, угол наклона скорости на ней и значения ψ и $2\tau_* \frac{d\psi}{d\tau}$ для плоского отверстия с $\theta_0 = 1/2 \pi$. Все эти величины приведены в таблице.

Таблица

x	y	θ (рад)	ψ	$2\tau_* \frac{\partial \psi}{\partial \tau}$
0.8361	0	0	0	0
0.8360	0.04863	-0.001091	0.0256	0.2814
0.8347	0.1200	-0.002041	0.04602	1.405
0.8309	0.2012	-0.002182	0.05207	2.031
0.8218	0.2730	-0.003272	0.07064	2.314
0.8123	0.3264	-0.004363	0.08445	2.300
0.7788	0.4486	-0.008727	0.11603	1.8006
0.7517	0.5208	-0.01309	0.1346	1.5249
0.7283	0.5759	-0.017453	0.1488	1.3639
0.6878	0.6611	-0.02618	0.1706	1.1650
0.6527	0.7276	-0.03491	0.1875	0.0387
0.6215	0.7832	-0.04363	0.2016	0.9480
0.5930	0.8313	-0.05236	0.2137	0.8783
0.5667	0.8742	-0.06109	0.2243	0.8222
0.5423	0.9130	-0.06981	0.2389	0.7756
0.5194	0.9485	-0.07854	0.2427	0.7361
0.4875	0.9970	-0.09163	0.2545	0.6863
0.4580	1.0410	-0.1047	0.2651	0.6449
0.4219	1.0942	-0.1222	0.2777	0.5990
0.3511	1.1973	-0.1614	0.3016	0.5211
0.2975	1.2758	-0.1963	0.3191	0.4698
0.2143	1.4012	-0.2618	0.3458	0.3992
0.1365	1.5272	-0.3403	0.3710	0.3393
0.05665	1.6735	-0.4494	0.3981	0.2797
-0.04028	1.9075	-0.6763	0.4364	0.1955
-0.07395	2.0384	-0.8508	0.4550	0.1455
-0.08343	2.130	-1.0167	0.4673	0.1032
0	2.256	-1.5708	0.5	0

Представляет интерес просчитать значение производной $d\lambda/dx$ (λ — коэффициент скорости) в центре сопла. Из соотношений, связывающих физическую плоскость и плоскость годографа [4], имеем

$$dx = -\frac{1}{2\tau \sqrt{\tau}} \left(1 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \tau\right) (1-\tau)^{-\frac{1}{\gamma-1}} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\tau$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = -\frac{1}{\pi} + 2n \sum_{n=1}^3 a_n \frac{z(\tau)}{z(\tau^*)} + 2a_0 \sigma, \quad \sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n(\tau)}{z_n(\tau^*)} \frac{1}{n^{1/3}}$$

Здесь

$$\left(1 - \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \tau\right) \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \rightarrow \infty \quad \text{при } \tau \rightarrow \tau_*$$

в силу того, что ряд σ расходится. После несложных выкладок получим

$$\left[\left(1 - \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \tau\right) \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right]_{\tau \rightarrow \tau_*} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{\sigma^2(\tau_*)}{\sigma'(\tau_*)}$$

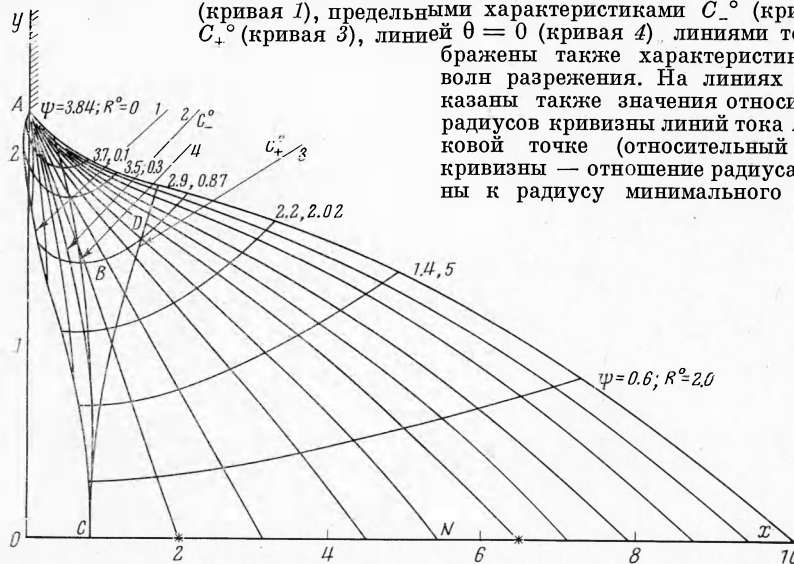
Используя асимптотическое выражение для $z_n'(\tau_*)$ (1.5), интегральное представление дзета-функции Римана и представление дзета-функции Римана в виде ряда [5], после несложных преобразований получим

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{C_0 \gamma_* [\varepsilon(1)]^2}{3a_0(\gamma + 1) \sqrt{\gamma + 1/\gamma - 1}} = 0.5446, \quad \varepsilon(1) = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

Здесь $2\gamma_*$ — ширина отверстия. Радиус кривизны линии тока в точке ее пересечения со звуковой линией можно определить по формуле

$$R = \frac{\cos^2 \theta (1 + \operatorname{tg}^2 \theta)^{3/2}}{d\theta/dx}, \quad \frac{dx}{d\theta} = \sqrt{\varepsilon} \frac{2\tau_*}{\varepsilon(1)} \frac{d\psi}{d\tau} \cos \theta$$

2. Расчет методом характеристик сверхзвуковой части струи. После того как по формулам (1.4) были рассчитаны координаты звуковой линии и угол наклона скорости на ней, течение в сверхзвуковой части струи было рассчитано на ЭВЦМ М-20 методом характеристик [6]. В результате расчета было получено все поле течения, предельные характеристики первого (C_+°) и второго (C_-°) семейств, линия $\theta = 0$ и десять промежуточных линий тока. На фиг. 1 вместе со звуковой линией (кривая 1), предельными характеристиками C_-° (кривая 2) и C_+° (кривая 3), линией $\theta = 0$ (кривая 4) линиями тока изображены также характеристики веера волн разрежения. На линиях тока показаны также значения относительных радиусов кривизны линий тока R° в звуковой точке (относительный радиус кривизны — отношение радиуса кривизны к радиусу минимального сечения



Фиг. 1

данной линии тока) и значения расхода, соответствующего данной линии тока и отнесенного к $0.5 \rho_* a_*$ (в угловой точке $\psi = 3.864$).

Вдоль характеристики C_-° параметры потока изменяются монотонно, а именно: число M и модуль угла наклона скорости монотонно убывают при уменьшении y . Аналогичным образом изменяются число Маха и угол наклона скорости на всех характеристиках второго семейства, выходящих из угловой точки и приходящих на звуковую линию вверх по потоку от характеристики C_-° . На характеристиках второго семейства, выходящих из угловой точки и расположенных вниз по потоку от характеристики C_-° , изменение числа M и угла наклона скорости немонотонно (см. фиг. 2). При этом вдоль характеристик второго семейства, расположенных вниз по потоку от характеристики C_-° , от угловой точки до точки пересечения с характеристикой C_+° число Маха падает, а от точки пересечения до оси — растет. Угол наклона скорости от угловой точки до точки пересечения растет, а от точки пересечения до оси — падает до нуля. На фиг. 2 $\beta = \sqrt{M^2 - 1}$, $\xi = \operatorname{tg} \theta$.

Такой характер изменения параметров вдоль характеристик второго семейства, расположенных вниз по потоку от характеристики C_-° , нетрудно усмотреть из условий совместности на характеристиках.

Действительно, пусть $\nu(M)$ — угол Прандтля — Мейера, тогда (фиг. 1) на характеристике ADN

$$\nu(M) + \theta = \nu(M_N)$$

в угловой точке A

$$\nu(M_A) - \theta_A = 1/2 \pi, \quad \text{или} \quad \nu(M_A) = 1/2 \nu(M_N) + 1/4 \pi$$

на характеристике C_+°

$$\nu(M) - \theta = 0$$

в точке D (пересечения характеристик ADN и C_+°)

$$\nu(M_D) = 1/2 \nu(M_N)$$

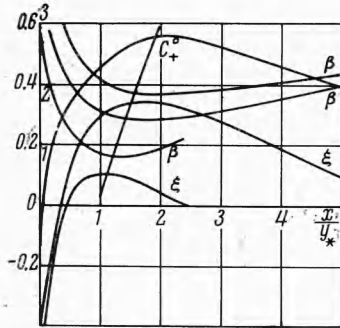
Из этих соотношений следует, что

$$M_D < M_N, \quad M_A > M_D$$

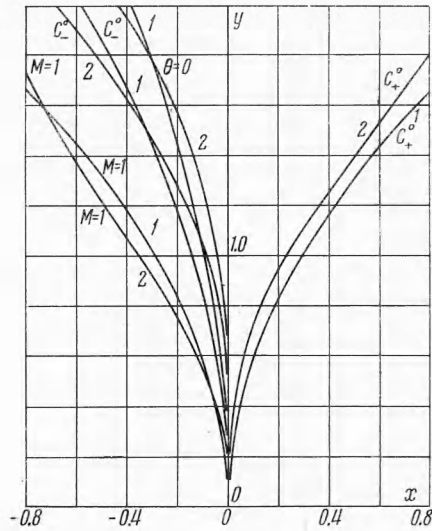
Можно показать, что на участке AD характеристики ADN число M монотонно убывает, а на участке DN — монотонно возрастает. Таким образом, вдоль характеристики ADN до точки D число M убывает, а от точки D до оси — возрастает. Из соотношения

$$\nu(M) + \theta = \nu(M_N)$$

на характеристике ADN следует и немонотонность изменения угла θ .



Фиг. 2



Фиг. 3

3. Сравнение с приближенным решением. В плоском случае приближенное уравнение для потенциала трансзвукового течения [2] имеет вид

$$-(\gamma + 1) \Phi_{xx} \Phi_x + \Phi_{yy} = 0$$

При выводе этого уравнения предполагается, что скорость газа по величине близка к скорости звука, а угол между направлением скорости и осью x мал. Точное решение этого уравнения, которое является также первым членом ряда, построенного Мейером вблизи центра сопла, имеет вид:

$$\Phi = 1/2 \alpha x^2 + 1/2 (\gamma + 1) \alpha^2 xy^2 + 1/24 (\gamma + 1)^2 \alpha^3 y^4$$

где $\alpha = dv/dx$ в центре сопла. Из этой формулы получим для составляющих скорости u и v , параллельной и перпендикулярной оси, следующие выражения:

$$u/a^* = 1 + \alpha x + 1/2 (\gamma + 1) \alpha^2 y^2 + \dots, \quad v/a_* = (\gamma + 1) \alpha^2 xy + 1/6 (\gamma + 1)^2 \alpha^3 y^3 + \dots$$

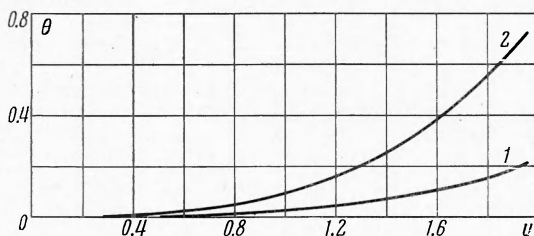
При помощи этих формул нетрудно рассчитать форму звуковой линии, линии $\theta = 0$ и характеристик C_-° и C_+° . Так, уравнения звуковой линии, линий θ и характеристик C_-° и C_+° имеют вид

$$x = -1/2 (\gamma + 1) \alpha y^2, \quad x = 1/6 (\gamma + 1) \alpha y^2, \quad \theta = 0$$

Уравнения характеристик C_-° и C_+°

$$x = -1/4 (\gamma + 1) \alpha y^2, \quad x = 1/2 (\gamma + 1) \alpha y^2$$

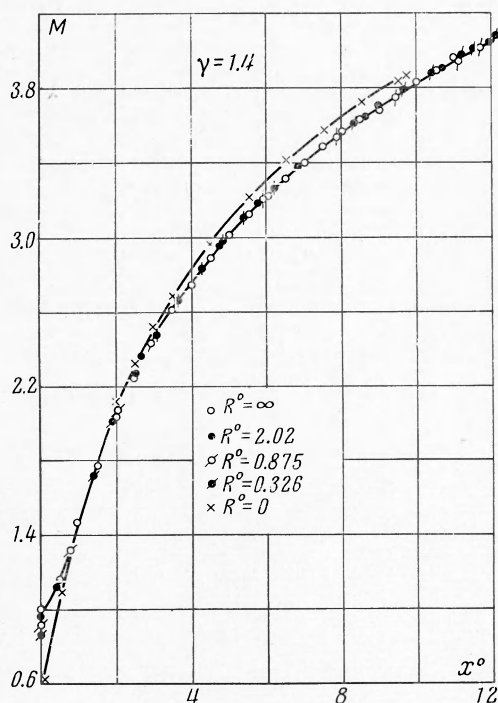
Некоторые результаты сравнений точного и приближенного решения представлены на фиг. 3 и 4. На фиг. 3 приведены координаты звуковой линии, линии $\theta = 0$ и характеристик C_+° и C_-° . На фиг. 4 представлена зависимость угла наклона скорости на звуковой линии от координаты y . На этих фигурах кривые 1 соответствуют приближенному решению, а кривые 2 — численному решению, полученному в работе. Из этих фигур следует, что до значений $y \approx 2$ точные и приближенные значения координат звуковой линии, линии $\theta = 0$ и характеристик C_+° и C_-° отличаются незначительно на 10–20%. Однако из расчетов и фиг. 4 следует, что точные и приближенные значения угла наклона и модуля скорости на звуковой линии и на линии $\theta = 0$ и характеристиках C_+° и C_-° при $y \leq 0.9$ (что соответствует $R^\circ \geq 4$) различаются в два раза. Таким образом, приближенные формулы непригодны для расчета течений в соплах в практических интересных случаях с $R^\circ \leq 4$; они применимы только в случаях, когда течение в окрестности критического сечения незначительно отличается от одномерного, как это и предполагалось при выводе приближенного уравнения для потенциала трансзвукового течения.



Фиг. 4

4. Расчет течения в соплах с криволинейной поверхностью перехода при наличии угловой точки. Каждая из линий тока рассчитанного течения может служить контуром сопла, начиная из дозвуковой части. Представляет интерес, используя трансзвуковые участки этих линий тока, рассчитать на их основе сверхзвуковую часть сопел с угловой точкой и с равномерным и параллельным осью потоком.

Обычно рассчитывая сверхзвуковую часть сопел с угловой точкой, принимают, из-за отсутствия точного решения задачи о трансзвуковом течении с криволинейной поверхностью перехода, что звуковая линия прямолинейна и скорость на ней параллельна оси [7]. Осуществляя затем отход рядами от прямолинейной звуковой линии, рассчитывают веер разрежения, возникающий при обтекании угловой точки. Пристраивая к характеристике веера волн разрежения с заданным числом M характеристики с равномерным и параллельным осью потоком, решают задачу Гурса и определяют сверхзвуковую часть контура сопла с угловой точкой. В настоящей работе угловая точка помещалась в различные точки линии $\theta = 0$, соответствующие линиям тока с различными значениями R° . Была рассчитана серия вееров волн разрежения, возникающих при обтекании угловых точек, расположенных в различных точках линии $\theta = 0$. На фиг. 5 показано распределение чисел M по оси сопла (x° — отношение расстояния от угловой точки к радиусу критического сечения, в котором расположена угловая точка) для различных R° . Значение $R^\circ = 0$ соответствует

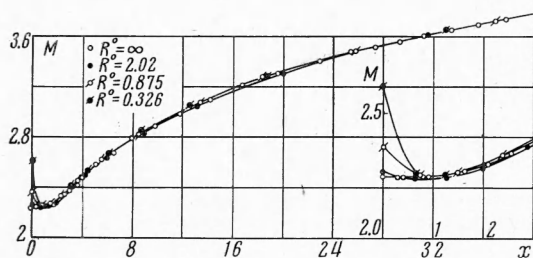


Фиг. 5

истечению из плоского отверстия с $\theta_0 = 1/2 \pi$, а значение $R^\circ = \infty$ — истечению из плоского отверстия с прямолинейной звуковой линией. Как видно из этой фигуры, распределение чисел M по оси и интенсивность разгона потока при обтекании угловой точки слабо зависят от формы звуковой линии. Несколько более интенсивно происходит разгон при $M > 2$ для $R^\circ = 0$.

На базе рассчитанных вееров волн разрежения было рассчитано семейство сопел с угловой точкой с равномерным и параллельным оси потоком с $M_0 \approx 4$. Эти сопла отличались формой линии перехода в трансзвуковой части и, следовательно, — значениями R° . Распределения чисел M по стенке сопел приведено на фиг. 6. Примечательным является тот факт, что для сопел с криволинейной звуковой линией в сверхзвуковой части сопла в окрестности угловой точки имеется положительный градиент давления (минимум в распределении чисел M). При этом, чем больше R° , тем меньше величина градиента давления. Для сопла с прямолинейной звуковой линией положительный градиент давления отсутствует.

Немонотонность изменения числа M на контуре сопла с равномерным и параллельным оси потоком связана с немонотонностью поведения числа M на характеристиках веера волн разрежения, о которой говорилось выше. Действительно, так как характеристика на выходе из сопла



Фиг. 6

характеристика на выходе из сопла прямолинейна и параметры на ней постоянны, то все характеристики первого семейства также прямолинейны и параметры на них постоянны, следовательно, немонотонность изменения параметров на характеристиках веера волн разрежения переносится на контур сопла и на все промежуточные линии тока, лежащие выше точки пересечения последней характеристики — веера волн разрежения с характеристикой C_+^0 . Из сказанного выше следует, что в

сопле с угловой точкой положительный градиент будет отсутствовать, если в трансзвуковой области угловую точку пересечения данной линии тока с характеристикой C_+^0 , т. е. вниз по потоку от точки D (см. фиг. 1).

Рассчитаем течение в заданном контуре сопла с угловой точкой, имеющего различные радиусы кривизны R° в трансзвуковой части сопла в точке $\theta = 0$. Такие расчеты были выполнены для сопла, контур которого рассчитан в предположении о прямолинейной звуковой линии на входе и равномерном и параллельном оси потоке на выходе сопла с $M_0 = 4$. Расчеты показывают, что и в этом случае, при наличии криволинейной поверхности перехода, вблизи угловой точки распределения чисел M для различных R° различны и существует положительный градиент давления. Однако на остальной части сопла распределения чисел M довольно близки, несмотря на различие в форме трансзвуковой области.

Поступила 15 VII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф. И. Истечение сверхзвуковой струи из сосуда с плоскими стенками. Докл. АН СССР, т. 58, 1947, № 3.
2. Гудерлей К. Г. Теория околосвуковых течений. Изд. Иностран. лит., 1960.
3. Зауэр Р. Течение сжимаемой жидкости. Изд. Иностран. лит., 1954.
4. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, Ч. 2, Физматгиз, 1963.
5. Градштейн Н. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1963.
6. Кацкова О. Н., Наумова И. П., Шмыглевский Ю. Д., Шулишина Н. П. Опыт расчета плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений газа методом характеристик. ВЦ АН СССР, 1961.
7. Кацкова О. Н., Шмыглевский Ю. Д. Осесимметричное сверхзвуковое течение свободно расширяющегося газа с плоской поверхностью перехода. Сб. Вычислительная математика, Изд. АН СССР, 1957.

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННОГО ГАЗА, ЗАПОЛНЯЮЩЕГО ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ ПОЛОСТЬ С СЕЧЕНИЕМ В ВИДЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЭЛЛИПСА

В. А. Левин (Москва)

Рассмотрим движение однокомпонентного заряженного газа во внешнем магнитном поле и без него, который в начальный момент времени заполняет цилиндрическую полость с сечением в виде произвольного эллипса. Постоянное магнитное поле приложено вдоль оси цилиндра, а индуцированным магнитным полем пренебрегаем, так как рассматривается нерелятивистский случай, и электрические токи, которые возникают, малы. Движение газа является существенно двумерным, т. е. зависит от координат