

8. Feldhuhn R. H. Heat transfer from a turbulent boundary layer on a porous hemisphere. AIAA Paper, 1976, N 119.
9. Любимов Л. Н., Русанов В. В. Течение газа около тупых тел. М.: Наука, 1970, т. 2.
10. Гришин А. М., Берцун В. Н. Итерационно-интерполяционный метод и теория сплайнов.— ДАН СССР, 1974, т. 214, № 4.
11. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
12. Кемп, Роуз, Дегра. Ламинарный теплообмен тупых тел с потоком диссоциированного воздуха.— В кн.: Газодинамика и теплообмен при наличии химических реакций. М.: ИЛ, 1962.
13. Тирский Г. А. Метод последовательных приближений для интегрирования уравнений ламинарного многокомпонентного пограничного слоя с химическими реакциями, включая реакции ионизации. Отчет Ин-та мех. МГУ, 1969, № 1016.
14. Брыкина И. Г., Гершбейн Э. А., Пейгин С. В. Ламинарный пространственный пограничный слой на проницаемой поверхности в окрестности плоскости симметрии.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 5.
15. Жукаускас А., Жюжда Н. Теплоотдача в ламинарном потоке жидкости. Вильнюс: Минтис, 1969.
16. Фэй Д., Риддел Ф. Теоретический анализ теплообмена в передней критической точке, омываемой диссоциированным воздухом.— В кн.: Газодинамика и теплообмен при наличии химических реакций. М.: ИЛ, 1962.
17. Лапин Ю. В. Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа. М.: Наука, 1982.
18. Землянский Б. А., Степанов Г. Н. О расчете теплообмена при пространственном обтекании тонких затупленных конусов гиперзвуковым потоком воздуха.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 5.
19. Авдусевский В. С., Галицкий Б. М., Глебов Г. А. и др. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике. М.: Машиностроение, 1975.

Поступила 25/XII 1984 г.

УДК 532.529 + 533.6.011

## КОНТИНУАЛЬНО-ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ СМЕСИ ГАЗ — ТВЕРДЫЕ ЧАСТИЦЫ ПРИ МАЛОЙ ОБЪЕМНОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ЧАСТИЦ

С. П. Киселев, В. М. Фомин

(Новосибирск)

В [1—3] отмечено, что один из недостатков двухжидкостной модели — возможность пересечения траекторий частиц и, как следствие, возникновение бесконечной средней плотности частиц в точках пересечений. В [2] для течений  $Kn \ll 1$  предложено в точках пересечений траекторий вводить сгустки плотно упакованных частиц, формирование которых обусловлено столкновениями частиц. В данной работе рассматривается случай, когда  $Kn \gg 1$ . Ансамбль частиц описывается с помощью бесстолкновительного кинетического уравнения. Показано на примерах, что в этой модели пересечение траекторий частиц возможно и средняя плотность частиц остается всюду конечной. Исследована устойчивость течения смеси газа с частицами к малым возмущениям в рамках предлагаемой модели. В отличие от двухжидкостной модели [1, 2, 4] возмущения становятся ограниченными, а их величина обратно пропорциональна ширине функции распределения частиц по скоростям в дробной степени. Ограниченность возмущений в [2] достигается введенным столкновением в «газ» частиц.

1. Кинетическое уравнение для частиц в бесстолкновительном пределе найдем из уравнения [5], которое в пренебрежении столкновениями и диффузией частиц в пространстве скоростей (малые  $m_2$ ) имеет вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \mathbf{u}_2 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{r}} + \left( \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_{22}} \nabla p \right) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{u}_2} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_2} \left[ \frac{(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)}{\tau} \mathcal{F} \right] = 0,$$

где  $\mathbf{u}_1(t, \mathbf{r})$ ,  $p(t, \mathbf{r})$  — скорость и давление газа;  $\mathbf{u}_2$ ,  $\rho_{22}$  — скорость и истинная плотность частицы;  $\mathcal{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}_2)$  — одночастичная функция распределения частиц;  $\mathbf{g}$  — ускорение свободного падения;  $\tau$  — время релаксации;  $m_2$  — объемная концентрация частиц.

Данное упрощение выполняется при неравенстве

$$(1.2) \quad Kn \simeq d/m_2 L \gg 1.$$

Здесь  $d$  — диаметр частиц;  $L$  — характерный размер изменения средних

параметров течения. Уравнения для средних величин определяются аналогично [5] по формулам

$$(1.3) \quad m_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} du_2, \quad \langle u_2 \rangle = \frac{1}{m_2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_2 \mathcal{F} du_2.$$

Пренебрегая эффектами теплообмена между газом и частицами, систему (1.1)–(1.3) замыкаем уравнениями для газовой фазы, полученными в [6]:

$$(1.4) \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\rho_1 \mathbf{u}_1) = 0, \quad \rho_1 = \rho_{11} m_1, \quad m_1 + m_2 = 1, \\ \rho_1 \frac{d_1 \mathbf{u}_1}{dt} = \rho_1 \mathbf{g} - m_1 \nabla p - \rho_2 \left( \frac{\mathbf{u}_1 - \langle \mathbf{u}_2 \rangle}{\tau} \right), \quad \frac{d_1}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}, \\ p = p(\rho_{11}), \quad \rho_{22} = \text{const}, \quad \rho_2 = \rho_{22} m_2,$$

где  $\rho_{11}$  — истинная плотность газа;  $m_1$  — объемная концентрация газа;  $\langle \mathbf{u}_2 \rangle$  — средняя скорость частиц.

Представим уравнение (1.1) в форме

$$D\mathcal{F}/Dt = -\mathcal{F} \partial \mathbf{F}' / \partial \mathbf{u}_2,$$

$$D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{u}_2 \partial/\partial \mathbf{r} + \mathbf{F} \partial/\partial \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{F}' = (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)/\tau,$$

а его общее решение в виде

$$(1.5) \quad \mathcal{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}_2) = \mathcal{F}^0(t^0, \mathbf{r}^*, \mathbf{u}_2^*) \exp\left(-\int_{t^0}^t \frac{\partial \mathbf{F}'}{\partial \mathbf{u}_2} dt\right), \\ \mathbf{r} = \mathbf{r}(t, t^0, \mathbf{r}_2^*, \mathbf{u}_2^*), \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2(t, t^0, \mathbf{r}_2^*, \mathbf{u}_2^*), \\ \mathbf{u}_2^* = \mathbf{u}_2|_{t=t^0}, \quad \mathbf{r}_2^* = \mathbf{r}_2|_{t=t^0}.$$

Здесь интеграл берется вдоль характеристики, определяемой вторым и третьим уравнениями в (1.5), а  $\mathcal{F}^0$  — произвольная функция. Умножив уравнение (1.1) соответственно на 1,  $\mathbf{u}_2$  и интегрируя по  $\mathbf{u}_2$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , получим, что в частном случае, когда в области течения траектории частиц не пересекаются и хаотическое движение у частиц в начальный момент отсутствует, решение системы (1.1)–(1.4) совпадает с решением в двухжидкостной модели.

2. Рассмотрим одномерную задачу о распаде разрыва в смеси газ — твердые частицы в области  $D_z \{-\infty < x_2 < +\infty, t \geq 0\}$ . Объемную концентрацию частиц  $m_2$  будем считать настолько малой, что можно пренебречь влиянием частиц на газ. Считая  $\mathbf{u}_1 = \text{const}$ ,  $p = \text{const}$ ,  $\rho_{11} = \text{const}$ ,  $\mathbf{g} = 0$ , преобразуем систему (1.1)–(1.3) к форме

$$(2.1) \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{u_1 - u_2}{\tau} \mathcal{F} \right) = 0, \\ m_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} du_2, \quad \langle u_2 \rangle = \frac{1}{m_2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_2 \mathcal{F} du_2.$$

Для системы (2.1) в области  $D_z$  ставим следующие начальные условия:

$$(2.2) \quad \mathcal{F}^0(t=0) = \frac{m_2^0}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(u_2 - u_2^0(x_2))^2}{2\sigma}\right), \\ u_2^0(x_2) = u^s - w^\pi \arctg \alpha x_2, \\ w^s = (w_1 + w_2)/2, \quad w^\pi = (w_1 - w_2)/\pi, \\ w_1 > w_2 > u_1 > 0,$$

где  $u_2^0(x_2)$  — «размазанная» ступенька с шириной  $\Delta x_2 \sim 1/\alpha$  и параметрами  $u_2^0 \rightarrow w_1$  при  $x_2 \rightarrow -\infty$ ,  $u_2^0 \rightarrow w_2$  при  $x_2 \rightarrow +\infty$ . Характеристики урав-

нения (2.1) определяем из уравнений

$$(2.3) \quad dx_2/dt = u_2, \quad du_2/dt = (u_1 - u_2)/\tau.$$

Вводя обозначения  $u_2^* = u_2(t=0)$ ,  $x_2^* = x_2(t=0)$ , из (2.3) получим

$$u_2 = u_1 + (u_2^* - u_1) e^{-t/\tau}, \\ x_2 = x_2^* + u_1 t + (u_2^* - u_1) K, \quad K = \tau(1 - e^{-t/\tau}).$$

Подставляя (2.2) в (1.5) и делая замену переменной по формуле

$$du_2 = \frac{\partial u_2}{\partial u_2^*} du_2^* = e^{-t/\tau} du_2^*,$$

находим

$$(2.4) \quad m_2 = \frac{m_2^0}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(u_2^* - u_2^0(x_2^*))^2}{2\sigma}\right) du_2^*.$$

Для вычисления интеграла (2.4) воспользуемся методом перевала при фиксированных  $t$ ,  $x_2$ .

Функцию  $\varphi(u_2^*, t, x_2) = (u_2^* - w^s + w^\pi \operatorname{arctg} \alpha x_2^*)^2$  раскладываем в ряд Тейлора до членов порядка  $(y - u_2^*)^2$ , где  $y$ ,  $x_2^*$  определяются из системы уравнений

$$(2.5) \quad y - w^s + w^\pi \operatorname{arctg} \alpha x_2^* = 0, \quad x_2^* + u_1 t + (y - u_1) K - x_2 = 0.$$

Подставляя (2.5) в (2.4), имеем

$$(2.6) \quad m_2 = \sum_{l=1}^n m_2^0 \left| 1 - \frac{w^\pi \alpha K}{1 + (\alpha x_2^*)^2} \right|, \quad x_2 = x_2^* + u_1(t - K) + u_2^0(x_2^*)K.$$

Здесь  $t$ ,  $x_2$  фиксированы;  $n$  — число корней второго уравнения (2.6), которое решается графически (рис. 1), где  $Y = w^\pi \operatorname{arctg} \alpha x_2^* - w^s$ ,  $X = (x_2^* - x_2 + u_1(t - K))/K$ . Корень определяется точкой пересечения прямой  $X$  и кривой  $Y$ , т. е. ( $Y = X$ ). Как следует из результатов, приведенных на рис. 1, в области, ограниченной прямыми, проходящими через точки  $(v^-, \xi^-)$  и  $(v^+, \xi^+)$ , число корней  $n = 3$ , во всей остальной области  $n = 1$ . Продифференцировав второе уравнение (2.6), получим

$$(2.7) \quad \left( \frac{\partial x_2}{\partial x_2^*} \right)_t = 1 - \frac{\alpha w^\pi K}{1 + (\alpha x_2^*)^2}, \quad \text{откуда} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_2^*} > 0, \quad -\infty < x_2^* < \xi^-(t), \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_2^*} < 0, \quad \xi^-(t) < x_2^* < \xi^+(t), \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_2^*} > 0, \quad \xi^+(t) < x_2^* < +\infty, \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_2^*} = 0, \quad x_2^* = \xi^+(t), \quad x_2^* = \xi^-(t),$$

где  $\xi^\pm(t) = \pm \frac{1}{\alpha} \sqrt{\alpha w^\pi K - 1}$ ;  $\alpha w^\pi K \geq 1$ .

Таким образом, картина траекторий в плоскости  $(t, x_2)$  будет иметь вид, изображенный на рис. 2. Кривая  $\Gamma_1$  является каустикой и определяется уравнениями

$$x_2 = u_1(t - K) + w^s K \pm \left( \frac{1}{\alpha} \sqrt{\alpha w^\pi K - 1} - w^\pi K \operatorname{arctg} \sqrt{\alpha w^\pi K - 1} \right), \\ t^\pm = -\tau \ln(1 - 1/\alpha w^\pi \tau), \quad x_2^\pm = u_1 t^\pm + 1/(w^\pi \alpha) (w^s - u_1).$$

На каустике выполняется условие  $\partial x_2 / \partial x_2^* = 0$  [7], поэтому в силу (2.6), (2.7) величина  $m_2$  обращается в бесконечность на  $\Gamma_1$ . Для решения на ка-

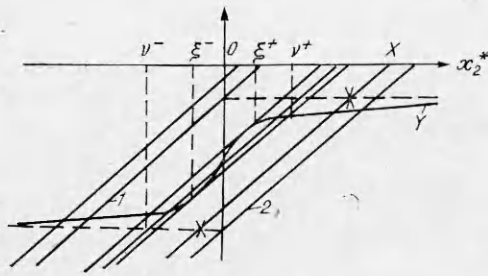


Рис. 1.

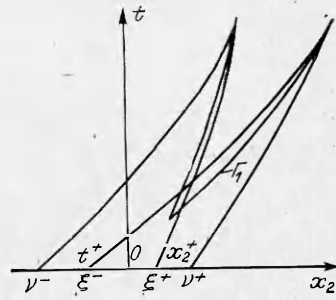


Рис. 2.

устике проведем разложение  $\phi$  до членов порядка  $(y - u_2^*)^4$  (коэффициент перед  $(y - u_2^*)^2$  на  $\Gamma_1$  равен нулю) и, подставляя его в (2.4), получим на  $\Gamma_1$

$$(2.8) \quad m_2 \approx \frac{m_2^0}{\sqrt{\pi\sigma}^{1/4}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2^{1/4}} \frac{(\alpha x_2^*)^2 + 1}{(\alpha^3 w^\pi K^2 x_2^*)^{1/2}}, \quad x_2^* = \xi^+(t).$$

Здесь  $\Gamma$  — гамма-функция;  $\sigma/(w^\pi)^2 \ll 1$  (из условия сходимости ряда). Решение (2.8) справедливо на  $\Gamma_1$  всюду, за исключением точки  $(t^+, x_2^+)$ , где  $m_2 \rightarrow \infty$ . По аналогии, удерживая в разложении  $\phi$  члены порядка  $(y - u_2^*)^6$ , найдем решение в точке  $(t^+, x_2^+)$

$$(2.9) \quad m_2^+ \approx \frac{m_2^0}{\sqrt{2\pi\sigma}^{1/3}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) (18)^{1/6}}{3} \frac{1}{(\alpha^3 w^\pi K^3)^{1/3}}, \quad \alpha w^\pi K = 1.$$

Условие применимости полученного решения с учетом (2.9) и  $\text{Kn} \gg 1$  имеет вид

$$m_2^+ \ll 1, \quad \alpha d/m_2^+ \gg 1.$$

Решение данной задачи в рамках двухжидкостной модели [6] с начальным условием  $u_2 = u_2^0(x_2)$ ,  $m_2 = m_2^0$  вообще не может быть получено, так как внутри  $\Gamma_1$  через каждую точку проходит три траектории частиц. Если ввести дополнительно две фазы, связанные с частицами, то можно получить решение типа (2.6) всюду, за исключением  $\Gamma_1$ , где  $m_2$  обращается в бесконечность. При моделировании ансамбля частиц сплошной средой в каждой точке определено одно значение скорости (для фиксированной фазы), поэтому  $\sigma = 0$  и, как следует из (2.8), (2.9),  $m_2 \rightarrow \infty$  на  $\Gamma_1$ . Это позволяет сделать вывод, что указанная бесконечность неустраима в рамках моделей бесстолкновительной сплошной среды. Устранить особенность в  $m_2$  можно введением столкновений в фазу частиц при  $\text{Kn} \ll 1$  [2] либо описанием с помощью кинетического уравнения (1.1) при  $\text{Kn} \gg 1$ , где  $\text{Kn} \approx d/(m_2 L)$  — число Кнудсена. Используя неравенства  $\sigma/(w^\pi)^2 \ll 1$ ,  $\alpha w^\pi K \sim 1$  и решение (2.6)–(2.9), легко показать, что максимум  $m_2$  достигается на каустике, следовательно, на каустике формируется сгусток частиц. В отличие от [2, 3] его формирование обусловлено не столкновениями между частицами, а особенностями в поведении траекторий частиц.

Когда ширина  $\Delta x_2 \sim 1/\alpha$  стремится к нулю (т. е.  $\alpha \rightarrow \infty$ ) и  $u_2^0(x_2)$  переходит в ступеньку, то, как следует из (2.6), решение имеет вид

$$m_2 = \sum_{l=1}^n m_2^0,$$

$$x_2 = x_2^* + u_1(t - K) + u_2^0(x_2^*)K, \quad u_2^0(x_2^*) = w^s - \left(\frac{2}{\pi}\right)^{-1} w^\pi \theta(x_2^*),$$

$$\theta(x_2^*) = \begin{cases} -1, & x_2^* < 0, \\ 1, & x_2^* > 0. \end{cases}$$

Функция  $Y = -u_2^0(x_2^*)$  показана на рис. 1 штриховой линией, что дает в области, ограниченной прямыми 1, 2, два корня пересечения  $Y = X(n=2)$ , а в остальной области — один ( $n=1$ ). Соответствующая картина траекторий изображена на рис. 3, здесь положения кривых  $\Gamma_2$  определяются уравнениями

$$x_2 = u_1(t - K) + w_2K, \quad x_2 = u_1(t - K) + w_1K.$$

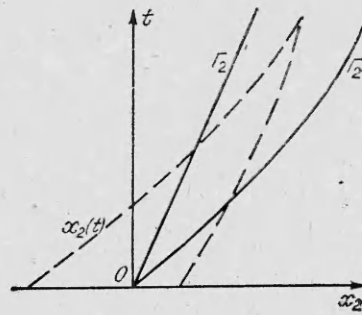


Рис. 3.

В области, ограниченной  $\Gamma_2$ , имеем  $m_2 = 2m_2^0$ , а в остальной  $m_2 = m_2^0$ .

3. Исследуем устойчивость к малым возмущениям стационарного решения для системы (1.2)–(1.5). В одномерном случае при условии пренебрежения объемом, занимаемым частицами (малые  $m_2$ ), систему (1.1)–(1.5) запишем как

$$(3.1) \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u_2} F \mathcal{F} = 0, \quad F = \frac{u_1 - u_2}{\tau} - g,$$

$$m_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} du_2, \quad \langle u_2 \rangle = \frac{1}{m_2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_2 \mathcal{F} du_2, \quad \rho_{22} = \text{const},$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_{11}} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{m_2 \rho_{22}}{\rho_{11}} \frac{u_1 - \langle u_2 \rangle}{\tau} - g,$$

$$\frac{\partial \rho_{11}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_{11} u_1) = 0, \quad p = p(\rho_{11}), \quad \tau = \frac{\rho_{22} d^2}{18\mu}.$$

Стационарное решение системы (3.1) в пренебрежении сжимаемостью газа имеет вид

$$(3.2) \quad f^0 = (\rho_{11}^0; m_2^0; u_1^0; \langle u_2 \rangle^0) = \text{const},$$

$$\frac{u_1^0 - a}{\tau} = g, \quad \frac{dp^0}{dx} = -g(\rho_{11}^0 + \rho_2^0), \quad a = \langle u_2 \rangle^0.$$

В момент  $t = 0$  произведем возмущение стационарного решения, т. е.

$$f = f^0(x) + f'(x), \quad f'(x) = \delta f \sin kx, \quad \delta f \ll f^0.$$

Поскольку основной интерес представляют коротковолновые возмущения, рассмотрим случай больших  $k$ , удовлетворяющих неравенству  $ktc_0 \gg 1$ , соответственно для длины волны возмущений получим неравенство

$$(3.3) \quad d \ll \lambda \ll (\rho_{22}/\rho_{11})d,$$

где  $\lambda = 2\pi/k$ ;  $c_0$  — скорость звука в газе. Как следует из (3.1), уравнения для газовой фазы нелинейные, поэтому, представляя вектор решения для газа в виде суммы

$$(3.4) \quad \varphi^* = \varphi^0(x) + \varphi'(x, t) \quad (\varphi^0(x) = (p^0(x), u_1^0(x), \rho_{11}^0), \varphi'/\varphi^0 \ll 1),$$

линеаризуем уравнения для газа вблизи стационарного решения (3.2). Учитывая (3.2)–(3.4) из системы (3.1) с точностью до членов  $O\left(\frac{1}{k\tau c_0}\right)$ , получим

$$(3.5) \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u_2} F \mathcal{F} = 0, \quad F = (a - u_2 + u_1')/\tau,$$

$$m_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} du_2, \quad \langle u_2 \rangle = \frac{1}{m_2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_2 \mathcal{F} du_2, \quad u_2 = a + u_2',$$

$$\begin{aligned}\frac{du'_2}{dt} &= \frac{u'_1 - u'_2}{\tau}, \quad \frac{dx_2}{dt} = a + u'_2, \quad a = \text{const}, \\ \frac{\partial u'_1}{\partial t} + u_1^0 \frac{\partial u'_1}{\partial x} + \frac{i}{\rho_{11}^0} \frac{\partial p'}{\partial x} &= 0, \quad p' = \rho_{11}' c_0^2, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho_{11}'}{\rho_{11}^0} \right) + u_1^0 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho_{11}'}{\rho_{11}^0} \right) + \frac{\partial u'_1}{\partial x} &= 0.\end{aligned}$$

Заметим, что последние три уравнения в (3.5) описывают распространение возмущений в газе и не зависят от параметров второй фазы. Это позволяет исследовать уравнения для частиц без предположения о малости возмущений, в то время как для газовой фазы достаточно ограничиться линеаризованными уравнениями для возмущений. Отметим, что  $u'_2$  — не возмущение  $u_2$ , а отличие  $u_2$  от  $a \equiv \langle u_2 \rangle^0$ .

Начальные условия для системы (3.5) зададим в виде

$$(3.6) \quad \begin{aligned}\varphi' |_{t=0} &= \delta\varphi \sin kx, \\ \mathcal{F} |_{t=0} &= \frac{m_2^\alpha}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(u_2 - (a + \delta u_2 \sin kx))^2}{2\sigma}\right), \\ m_2^\alpha &= m_2^c + \delta m_2 \sin kx\end{aligned}$$

$\varphi^0$  определено в (3.4)). Переписывая последние три уравнения системы (3.5) в характеристическом виде, с учетом (3.6) получим

$$(3.7) \quad \begin{aligned}u'_1 &= \frac{1}{2} (\delta r \sin k(x - (u_1^0 + c_0)t) + \delta s \sin k(x - (u_1^0 - c_0)t)), \\ \frac{\rho_{11}'}{\rho_{11}^0} &= \frac{1}{2c_0} (\delta r \sin k(x - (u_1^0 + c_0)t) - \delta s \sin k(x - (u_1^0 - c_0)t)), \\ \delta r &= \delta u_1 + c_0 \frac{\delta \rho_{11}'}{\rho_{11}^0}, \quad \delta s = \delta u_1 - c_0 \frac{\delta \rho_{11}'}{\rho_{11}^0}.\end{aligned}$$

Интегрируя уравнение движения частицы, найдем

$$(3.8) \quad \begin{aligned}u'_2 &= u_2^* e^{-t/\tau} + e^{-t/\tau} \left( \int_0^t \frac{u'_1(t', x_2(t'))}{\tau} e^{t'/\tau} dt' \right), \\ x_2 &= x_2^* + at + u_2^* K(t) + \int_0^t dt' e^{-t'/\tau} \int_0^{t'} \frac{u'_1(t'', x_2(t''))}{\tau} e^{t''/\tau} dt'',\end{aligned}$$

где  $K(t) = \tau(1 - e^{-t/\tau})$ ;  $u'_1(t'', x)$  определено в (3.7). Решение второго уравнения (3.8) будем искать методом итераций. В качестве нулевого приближения выберем

$$(3.9) \quad x_2^{(0)} = x_2^* + at + u_2^* K(t).$$

Подставив  $x_2^{(0)}$  в первое уравнение (3.8), а полученный результат во второе уравнение, вычислим  $x_2^{(1)}$  и, повторяя эту процедуру, найдем  $x_2^{(2)}$  и т. д. Считая, что  $x_2^{(n)} = x_2^* + at + \varepsilon K$ , для вычисления  $x_2^{(n+1)}$  необходимо найти интеграл вида

$$\begin{aligned}I &= \int_0^t dt' e^{-t'/\tau} \int_0^{t'} \frac{e^{t''/\tau}}{\tau} \left[ \frac{\delta s}{2} \sin(kb^- t'' + k\varepsilon K(t'') + \alpha) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\delta r}{2} \sin(kb^+ t'' - k\varepsilon K(t'') - \alpha) \right] dt'',\end{aligned}$$

где  $b^- = c_0 - (u_1^0 - a)$ ;  $\alpha = kx_2^*$ ;  $kb^- \tau \gg 1$  (большие  $k$ );  $b^+ = c_0 + (u_1^0 - a)$ ;  $kb^+ \tau \gg 1$ ;  $b^- > 0$  (дозвуковое по относительной скорости течение). Используя свойства интеграла от быстроосциллирующей функции [8], имеем

$$(3.10) \quad I = (A - \varepsilon B)K \cos \alpha + O(1/(\omega^+)^2 + 1/(\omega^-)^2),$$

где  $\omega^- = kb^- \tau$ ;  $\omega^+ = kb^+ \tau$ ;

$$A = \frac{\delta s}{2\omega^-} - \frac{\delta r}{2\omega^+}; \quad B = \frac{\delta s}{(2\omega^- b^-)} + \frac{\delta r}{(2\omega^+ b^+)}.$$

Учитывая (3.8) и (3.10), определяем значение  $n$ -й итерации

$$(3.11) \quad x_2^{(n)} = x_2^{(0)} + K \left( \frac{A}{D} \sum_{k=1}^n (-1)^{(k-1)} \Delta^k + u_2'^* \sum_{k=1}^n (-1)^k \Delta^k \right),$$

где  $\Delta = B \cos kx_2^*$ . Используя метод математической индукции легко доказать, что формула (3.11) справедлива, а ряд, составленный из  $x_2^{(0)}$ ,  $x_2^{(1)} \dots x_2^{(n)}$ , является геометрической прогрессией и его сумма равна

$$(3.12) \quad x_2 = x_2^{(0)} + K \left( \frac{A}{B} - u_2'^* \right) \frac{\Delta}{1 + \Delta}.$$

Так как интеграл (3.10) вычислен с точностью до члена  $O(1/(\omega^+)^2 + 1/(\omega^-)^2)$ , то с этой точностью окончательное выражение для  $x_2$  имеем, используя (3.12), в виде

$$(3.13) \quad x_2 = x_2^* + at + u_2'^* K + \left( \frac{\delta s}{2\omega^-} - \frac{\delta r}{2\omega^+} \right) K \cos kx_2^* - \left( \frac{\delta s}{2\omega^- b^-} + \frac{\delta r}{2\omega^+ b^+} \right) u_2'^* K \cos kx_2^*.$$

Формула (3.13) может быть получена из (3.11), если положить  $n = 1$ , т. е. когда достаточно ограничиться первой итерацией.

Подставляя (3.7) и (3.13) в первое уравнение (3.8), имеем

$$(3.14) \quad u_2 = u_2'^* e^{-t/\tau} + e^{-i/\tau} \left( \frac{\delta s}{2} I_1 - \frac{\delta r}{2} I_2 \right) + O\left( (\delta w)^2, \frac{u_2'}{c_0} \delta w \right),$$

$$I_{1,2} = \frac{1}{\omega^\pm} \left[ \left( 1 \pm \frac{u_2'^*}{b^\pm} \right) \cos kx_2^* - \left( e^{t/\tau} \pm \frac{u_2'^*}{b^\pm} \right) \cos(\omega^\pm \varphi^\pm - kx_2^*) \right] + O(1/\omega^\pm)^2,$$

$$\varphi^\pm = t/\tau \mp \frac{u_2'^*}{b^\pm \tau} K \mp \frac{\delta u_1}{b^\pm \tau} K, \quad \delta u_1 = \delta u_1 \cos kx_2^*,$$

что позволяет вычислить частные производные  $\left( \frac{\partial x_2^*}{\partial u_2'^*} \right)$ ,  $\left( \frac{\partial u_2'}{\partial u_2'^*} \right)$  при фиксированных  $t$ ,  $x_2$  в форме

$$(3.15) \quad \frac{\partial x_2^*}{\partial u_2'^*} = -K \left[ \left( 1 - \delta w \frac{K}{\tau} \sin kx_2^* \right) \right] + O\left( \delta w \frac{u_2'}{c_0}, \frac{\delta w}{\omega^0} \right),$$

$$\frac{\partial u_2'}{\partial u_2'^*} = e^{-t/\tau} + O\left( e^{-t/\tau} \frac{\delta u_1}{c_0 \omega^0} \right),$$

$$\delta w = \frac{1}{2} \left( \frac{\delta s}{b^-} - \frac{\delta r}{b^+} \right), \quad \omega^0 = kc_0 \tau.$$

Как следует из (3.1), для определения  $m_2$  и  $\langle u_2 \rangle$  необходимо вычислить интеграл

$$(3.16) \quad \langle \Phi \rangle = \frac{m_2^0}{m_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(u_2) e^{t/\tau} e^{-\frac{(u_2'^* - \delta u_2 \sin kx_2^*)^2}{2\sigma}} du_2.$$



Подставив (3.13) и (3.15) в (3.16) и проведя замену переменных по формулам  $du_2 = du'_2$ ,  $du'_2 = \frac{\partial u'_2}{\partial u_2^*} du_2^*$ , с учетом неравенства  $\sqrt{\sigma}/c_0 \ll 1$  имеем

$$(3.17) \quad \langle \Phi \rangle = \frac{m_2^\alpha}{m_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(u_2) e^{-\frac{(u_2^* - \delta u_2 \sin kx_2^*)^2}{2\sigma}} du_2^*;$$

$$(3.18) \quad x = x_2^* + at + u_2^* K + \frac{\delta m}{k\tau} K \cos kx_2^*.$$

Разлагая аргумент экспоненты вблизи максимума, который определяется из уравнения

$$(3.19) \quad y - \delta u_2 \sin kx_2^*(y, t, x) = 0,$$

находим

$$(3.20) \quad f = (1 + \delta u_2 k K \cos kx_2^*(y, t, x))^2 (u_2^* - y)^2,$$

где  $f$  — аргумент экспоненты в (3.17):  $f = (u_2^* - \delta u_2 \sin kx_2^*)^2$ . Подставив (3.20) в (3.17), получим

$$(3.21) \quad m_2 \langle \Phi \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{m_2^\alpha \Phi(y_i, x_{2i}^*)}{|1 + \delta u_2 k K \cos kx_2^*(y_i, t, x)|},$$

где  $\Phi = 1$ ;  $\Phi = u_2$ ;  $n$  — число корней уравнений (3.18), (3.19). Полагая в (3.21)  $\Phi = 1$ ,  $n = 1$  и сравнивая с соответствующим выражением для  $m_2$ , полученным в [2] для двухжидкостной модели, убеждаемся в их тождественности.

Если  $\delta u_2 k \tau < 1$ , то  $m_2$  всюду конечна в полуплоскости  $t \geq 0$ ,  $-\infty < x < +\infty$ , в случае обратного неравенства  $\delta u_2 k \tau \geq 1$  существуют точки, где  $m_2 \rightarrow \infty$ . Полагая знаменатель в (3.21) равным нулю, находим уравнение кривой в плоскости  $t, x_2^*$ , на которой  $m_2$  обращается в бесконечность, т. е.

$$(3.22) \quad 1 + \delta u_2 k K \cos kx_2^* = 0.$$

Разрешая уравнение (3.22), имеем

$$(3.23) \quad x_2^* = \frac{\pi}{k} \pm \frac{2\pi m}{k} \pm \frac{1}{k} \left( \arccos \frac{1}{\delta u_2 k K} \right), \quad m = 0, \pm 1, \dots$$

Подставляя (3.23) в (3.18), запишем

$$(3.24) \quad x = \frac{\pi}{k} + \frac{2\pi m}{k} \pm \frac{1}{k} \left( \arccos \frac{1}{\delta u_2 k K} - \sqrt{(\delta u_2 k K)^2 - 1} \right) - \delta w / (\delta u_2 k^2 \tau) + at \quad (t > -\tau \ln(1 - 1/(\delta u_2 k \tau))).$$

Используя (3.17), (3.18), (3.22), получим, что на кривой, описываемой (3.24) с точностью до члена  $O(\delta w)$ , существует тождество  $\partial x / \partial x_2^* = 0$ ; такие кривые называются каустиками [7]. Расположение траекторий (штриховые линии) и каустик (сплошные линии) в нашем случае приведено на рис. 4, где  $t^* = -\tau \ln(1 - 1/(\delta u_2 k \tau))$ . Для вычисления  $m_2$  на каустике проведем разложение  $f$  до членов четвертой степени  $(u_2^* - y)^4$ :

$$f \approx \frac{1}{4} (kK)^2 ((\delta u_2 k K)^2 - 1) (u_2^* - y)^4,$$

подставляя которое в (3.17), найдем  $m_2$

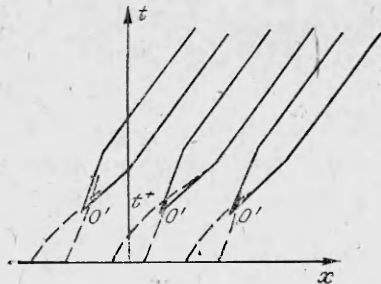


Рис. 4.



на каустике

$$(3.25) \quad m_2 \approx \frac{2m_2^\alpha \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{2\pi}\sigma^{1/4} (2(kK)^2 ((\delta u_2 kK)^2 - 1))^{1/4}}$$

где  $\Gamma$  — гамма-функция. Эта формула справедлива всюду на каустике, кроме точки  $O'$  (и ее окрестности). А в точке  $O'$  справедливо разложение  $f \approx \frac{1}{36} (\delta u_2 (kK)^3)^2 (u_2^* - y)^6$ , оно позволяет вычислить  $m_2$  по формуле

$$(3.26) \quad m_2 \approx \frac{m_2^\alpha}{3\sigma^{1/3}} \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) (Kk (\delta u_2)^{1/3}).$$

Условие применимости (3.26) имеет вид

$$m_2' \ll 1, kd/m_2' \gg 1, kd < 1,$$

где  $m_2' \approx m_2^0 (\delta u_2^2 / \sigma)^{1/3}$ ;  $\sigma / \delta u_2^2 < 1$ ;  $m_2^0 \ll 1$ .

Таким образом, показано, что в континуально-дискретной модели, не учитывающей объема частиц, малые возмущения, возникшие в момент  $t = 0$  на  $-\infty < x < +\infty$ , остаются всюду конечными в полуплоскости  $t > 0$ ,  $-\infty < x < +\infty$ . Максимум возмущений достигается на каустиках, определяемых уравнением (3.24), а их величина обратно пропорциональна ширине функции распределения в дробной степени (3.25), (3.26), в то время как в двухжидкостной модели (без учета объема частиц) малые возмущения неограниченно растут на каустиках по закону (3.24).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Клебанов Л. А., Крошнлин А. Е. и др. О гиперболичности, устойчивости и корректности задачи Коши для системы уравнений двухскоростного движения двухфазных сред. — ПММ, 1982, т. 46, вып. 1.
2. Крайко А. Н. О корректности задачи Коши для двухжидкостной модели течения смеси газа с частицами. — ПММ, 1982, т. 46, вып. 3.
3. Крайко А. Н. К теории двухжидкостных течений газа и диспергированных в нем частиц. — В кн.: Гидродинамика и теплообмен в двухфазных средах. Матер. II Всесоюз. шк. по теплофизике. Новосибирск, 1981.
4. Иорданский С. В., Куликовский А. Г. О движении жидкости, содержащей мелкие частицы. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 4.
5. Мясников В. П. Статистическая модель механического поведения дисперсных систем. — В кн.: Механика многокомпонентных сред в технологических процессах. М.: Наука, 1978.
6. Крайко А. Н., Стернин Л. Е. К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами. — ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
7. Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы математической физики. М.: Наука, 1973.
8. Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы прикладной математики. М.: Наука, 1972.

Поступила 14/XII 1984 г.

УДК 629.7.018.3

### РАСЧЕТ НЕРАВНОВЕСНЫХ ПАРАМЕТРОВ ВОЗДУХА НА ПОВЕРХНОСТИ МОДЕЛЕЙ И В СЛЕДАХ ЗА НИМИ ДЛЯ УСЛОВИЙ АЭРОБАЛЛИСТИЧЕСКИХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

И. Г. Еремейцев, Н. Н. Пилюгин

(Москва)

Расчет неравновесного квазиподномерного течения химически реагирующих газовых смесей представляет практический интерес в связи с изучением релаксационных процессов, получением газодинамических струй для физических измерений, а также исследованием плазменных сверхзвуковых явлений в следе за телом и т. д.

В [1—8] и др. приведены расчеты химически неравновесных сверхзвуковых квазиподномерных течений. При этом используются различные алгоритмы решения таких задач для течений в соплах и трубках тока около тела. В настоящее время с по-