УДК 517.944

НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВА С ПЛОСКОЙ ЩЕЛЬЮ, ОГРАНИЧЕННОЙ ОКРУЖНОСТЬЮ

Л. Г. Смирнов

Институт прикладной механики РАН, 117334 Москва

Рассматриваются первая и вторая основные задачи осесимметричной теории упругости для пространства с круговой щелью, а также смешанная задача, когда на одной стороне щели заданы усилия, а на другой — перемещения. Задачи сводятся к задачам сопряжения для обобщенных аналитических функций на прямолинейных участках, решение которых находится в замкнутом виде.

Сведение задач плоской теории упругости для тел с трещинами к задачам сопряжения для комплексных аналитических функций на границах трещин является достаточно эффективным методом их решения. В пространственных осесимметричных задачах теории упругости при наличии плоской границы в ряде случаев возможно их сведение к задачам сопряжения для аналитических функций [1] либо к задачам сопряжения для p-аналитических функций [2]. Эффективно также использование обобщенных аналитических функций (ОАФ) в такого рода задачах (пространство с круговой линией раздела условий и т. д.). Ниже приводится решение основных задач теории упругости в осесимметричном случае для пространства с круговой щелью, когда на границах щели заданы усилия или перемещения, либо на одной границе щели заданы усилия, на другой — перемещения.

Для упругих характеристик введем следующие обозначения: G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, круговая щель радиуса r лежит в плоскости $z = 0$ (z, r, θ — цилиндрические координаты). Предполагается, что на границе щели заданы усилия либо перемещения. Используя ОАФ, краевые усилия на границе щели можно записать в виде [1]

$$[\Phi'(\tau)]^{\pm} - [\,\overline{\Psi'(\tau)}\,]^{\pm} = \sigma_z^{\pm} + i\tau_{zr}^{\pm} = f^{\pm}(\tau) \qquad (\tau \in L_{\pm}) \tag{1}$$

либо

$$æ[\Phi(\tau)]^{\pm} - [\,\overline{\Psi(\tau)}\,]^{\pm} = 2G(u_z^{\pm} + iu_r^{\pm}) = g^{\pm}(\tau) \qquad (\tau \in L_{\pm}). \tag{2}$$

Здесь $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ — обобщенные аналитические функции во всей плоскости, исключая отрезок L; $z = 0$, $0 < |r| < c$; σ_z и τ_{zr} — нормальные и касательные напряжения соответственно; u_z и u_r — перемещения вдоль осей z и r; $L_{\pm}$ обозначает соответственно нижний и верхний берега щели; $æ = 3 - 4\nu$; $t = z + ir$.

Операция дифференцирования для ОАФ определяется следующим образом:

$$\Phi'(t) = \lim_{t_1 \to t} \Big[\Phi(t_1) - \operatorname{Re}\Phi(t) - (ir/r_1)\operatorname{Im}\Phi(t)\Big] \Big/ [z - z_1 + i(r - r_1)]. \tag{3}$$

В частности, $\Phi'(t) = \partial\Phi(t)/\partial z$. Напряжения и перемещения определяются по формулам

$$\begin{gathered} \sigma_z + \sigma_r + \sigma_\theta = 4(1+\nu)\operatorname{Re}\Phi'(t), \quad \sigma_\theta = 4\nu\operatorname{Re}\Phi'(t) + 2G\,u_r/r, \\ \sigma_z + i\tau_{zr} = \Phi'(t) - 2z\overline{\Phi''(t)} - \overline{\Psi'(t)}, \quad 2G(u_z + iu_r) = æ\Phi(t) - 2z\overline{\Phi'(t)} - \overline{\Psi(t)}. \end{gathered} \tag{4}$$

Учитывая, что $\overline{\Psi(\tau)} = \Psi(\bar\tau)$ при $\tau = ir$, запишем условия (1), (2) в виде

$$[\Phi'(\tau)]^{\pm} - [\,\overline{\Psi'(\tau)}\,]^{\pm} = [\Phi'(\tau)]^{\pm} - [\Psi'(-\tau)]^{\pm} = f^{\pm}(\tau); \tag{5}$$

$$æ[\Phi(\tau)]^{\pm} - [\,\overline{\Psi(\tau)}\,]^{\pm} = æ\Phi^{\pm}(\tau) - \Psi^{\pm}(-\tau) = g^{\pm}(\tau). \tag{6}$$

Воспользовавшись определением производной (3), продифференцируем обе части равенства (6) вдоль границы щели, предполагая, что производные существуют вплоть до границы. В результате получим $[æ\Phi^{\pm}(\tau) - \Psi^{\pm}(-\tau)]' = (g^{\pm}(\tau))' = g_1^{\pm}(\tau)$, где $g_1^{\pm}(\tau) = 2G(du_r^{\pm}/dr + u_r^{\pm}/r - i\,du_z^{\pm}/dr)$.

Обозначив $\varphi(t) = \Phi'(t)$, $\psi(t) = \Psi'(t)$, вместо (5), (6) будем иметь

$$\varphi^{\pm}(\tau) - \psi^{\pm}(-\tau) = f^{\pm}(\tau), \qquad æ\varphi^{\pm}(\tau) + \psi^{\pm}(-\tau) = g_1^{\pm}(\tau) \qquad (\tau \in L). \tag{7}$$

Пусть $t = z + ir$, $\tau = ir$ — внутренняя и граничная точки. Функция $\psi_1(t) = \psi(-t)$ также является ОАФ рассматриваемого здесь класса. При $t \to +0 + ir$ получим $-t \to -0 - ir$. Поэтому

$$\psi^{-}(-\tau) = \psi^{-}(-ir) = \psi_1^{+}(ir) = \psi_1^{+}(\tau), \qquad \psi^{+}(-\tau) = \psi^{+}(-ir) = \psi_1^{-}(ir) = \psi_1^{-}(\tau). \tag{8}$$

Таким образом, условия (7) запишутся в виде

$$\varphi^{\pm}(\tau) - \psi_1^{\mp}(\tau) = f^{\pm}(\tau), \qquad æ\varphi^{\mp}(\tau) + \psi_1^{\pm}(\tau) = g_1^{\mp}(\tau). \tag{9}$$

Складывая и вычитая первые два равенства (9), получим

$$\begin{aligned} &[\varphi(\tau) - \psi_1(\tau)]^{+} + [\varphi(\tau) - \psi_1(\tau)]^{-} = f^{+}(\tau) + f^{-}(\tau) = f_1(\tau), \\ &[\varphi(\tau) + \psi_1(\tau)]^{+} - [\varphi(\tau) + \psi_1(\tau)]^{-} = f^{+}(\tau) - f^{-}(\tau) = f_2(\tau). \end{aligned} \tag{10}$$

В плоскости с отверстием, пересекающим ось z, регулярные ОАФ $\varphi(t)$ и $\psi_1(t)$ вне отверстия и исчезающие на бесконечности могут быть представлены в виде [1]

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= S(\varphi_*(\zeta)) = -\frac{1}{\pi|r|}\int_{\bar t}^{t} \varphi_*(\zeta) M(\zeta,t)\,d\zeta, \\ \psi_1(t) &= S(\psi_{1*}(\zeta)) = -\frac{1}{\pi|r|}\int_{\bar t}^{t} \psi_{1*}(\zeta) M(\zeta,t)\,d\zeta, \end{aligned} \tag{11}$$

где $M(\zeta,t) = \sqrt{(\zeta - \bar t)/(\zeta - t)}$; $\varphi_*(\zeta)$, $\psi_{1*}(\zeta)$ — функции, голоморфные в области D и исчезающие на бесконечности, для которых имеет место равенство $\lim\limits_{|\zeta|\to\infty} \zeta\varphi_*(\zeta) = \lim\limits_{|\zeta|\to\infty} \zeta\psi_{1*}(\zeta) = 0$. В выражении (11) предполагается, что линия интегрирования лежит ниже щели и линии разветвления радикала $M(\zeta,t)$.

При указанном поведении функций $\varphi_*(\zeta)$, $\psi_{1*}(\zeta)$ на бесконечности величина интеграла в (11) не зависит от способа интегрирования, поэтому при $t \to -0 + ir$ можно интегрировать по верхнему берегу щели L_+:

$$\begin{aligned} [\varphi(\tau) - \psi_1(\tau)]^{+} &= -\frac{1}{\pi|r|}\int_{\bar\tau}^{\tau} (\varphi_*(\sigma) - \psi_{1*}(\sigma))^{+} M^{+}(\sigma,\tau)\,d\sigma = \\ &= \frac{1}{\pi|r|}\int_{\bar\tau}^{\tau} (\varphi_*(\sigma) - \psi_{1*}(\sigma))^{+} M^{-}(\sigma,\tau)\,d\sigma. \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь учтено равенство $M^+(\sigma,\tau) = -M^-(\sigma,\tau)$. Для нижнего берега щели имеем

$$[\varphi(\tau) - \psi_1(\tau)]^- = -\frac{1}{\pi|r|}\int\limits_{\bar\tau}^{\tau}(\varphi_*(\sigma) - \psi_{1*}(\sigma))^- M^-(\sigma,\tau)\,d\sigma. \qquad (13)$$

Из (12), (13) получаем

$$[\varphi(\tau) - \psi_1(\tau)]^+ + [\varphi(\tau) - \psi_1(\tau)]^- = \frac{1}{\pi|r|}\int\limits_{\bar\tau}^{\tau}[\Omega^+(\sigma) - \Omega^-(\sigma)]M^-(\sigma,\tau)\,d\sigma, \qquad (14)$$

где $\Omega^\pm(\sigma) = \varphi_*^\pm(\sigma) - \psi_{1*}^\pm(\sigma)$. Аналогичным образом получим

$$[\varphi(\tau) + \psi_1(\tau)]^+ - [\varphi(\tau) + \psi_1(\tau)]^- = \frac{1}{\pi|r|}\int\limits_{\bar\tau}^{\tau}[\Lambda^+(\sigma) + \Lambda^-(\sigma)]M^-(\sigma,\tau)\,d\sigma,$$
$$\Lambda^\pm(\sigma) = \varphi_*^\pm(\sigma) + \psi_{1*}^\pm(\sigma). \qquad (15)$$

Оператор S^{-1}, обратный к S, имеет вид [1]

$$S^{-1}(\Phi(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{d\zeta}\int\limits_{\bar\zeta}^{\zeta}\Phi(t)M(\zeta,t)h(t,\zeta)\,dt, \qquad h(t,\zeta) = \begin{cases} 1, & \operatorname{sign}(\operatorname{Im}\zeta\operatorname{Im}t) > 0,\\ -1, & \operatorname{sign}(\operatorname{Im}\zeta\operatorname{Im}t) < 0.\end{cases}$$

Применяя оператор S^{-1} к обеим частям равенств (14), (15), получаем задачи сопряжения для аналитических функций $\Omega(\zeta)$ и $\Lambda(\zeta)$ [3]

$$\Omega^+(\zeta) - \Omega^-(\zeta) = -S^{-1}(f_1(\tau)) = F_1(\sigma), \quad \Lambda^+(\zeta) + \Lambda^-(\zeta) = -S^{-1}(f_2(\tau)) = F_2(\sigma). \qquad (16)$$

При достаточно больших $|\zeta|$ для функций $\varphi_*(\zeta)$, $\psi_{1*}(\zeta) = \psi_*(-\zeta)$ имеют место разложения $\varphi_*(\zeta) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\zeta^{-n}$, $\psi_{1*}(\zeta) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\zeta^{-n}$, для коэффициентов которых имеют место равенства

$$a_1 = b_1 = 0, \qquad æ a_2 - b_2 = 0. \qquad (17)$$

Действительно, используем представления $\Phi(t) = S(\varphi_0(\zeta))$, $\Psi(t) = S(\psi_0(\zeta))$, при этом на бесконечности имеют место разложения $\varphi_0(\zeta) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^0\zeta^{-n}$, $\psi_0(\zeta) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^0\zeta^{-n}$, причем $æ a_1^0 + b_1^0 = 0$ [2]. Тогда $\varphi(t) = \Phi'(t) = S(\varphi_0'(\zeta))$, $\psi(t) = S(\psi_0(\zeta))$. На оси симметрии [2]

$$\varphi(z) = \varphi_0'(z)\operatorname{sign}(z) = \operatorname{sign}(z)(-a_1^0/z^2 - 2a_2^0/z^3 - \ldots),$$
$$\psi(z) = \psi_0'(z)\operatorname{sign}(z) = \operatorname{sign}(z)(-b_1^0/z^2 - 2b_2^0/z^3 - \ldots).$$

Вводя $\psi_1(t) = \psi(-t)$, имеем

$$\psi_1(z) = \operatorname{sign}(-z)(-b_1^0/z^2 - 2b_2^0/z^3 - \ldots) = \operatorname{sign}(z)(b_1^0/z^2 - 2b_2^0/z^3 + \ldots).$$

В то же время

$$\varphi(t) = S(\varphi_*(\zeta)), \qquad \psi_1(t) = S(\psi_{1*}(\zeta)),$$
$$\varphi_*(\zeta) = a_2/\zeta^2 + a_3/\zeta^3 + \ldots, \qquad \psi_{1*}(\zeta) = b_2/\zeta^2 + b_3/\zeta^3 + \ldots,$$
$$\varphi(z) = \operatorname{sign}(z)(a_2/z^2 + a_3/z^3 + \ldots), \quad \psi_1(z) = \operatorname{sign}(z)(b_2/z^2 + b_3/z^3 + \ldots).$$

Сопоставляя данные выражения, получим $a_2 = -a_1^0$, $b_2 = b_1^0$, а значит, $æa_2 - b_2 = 0$.

Решение для функций $\Omega(\zeta)$, $\Lambda(\zeta)$ запишем в виде

$$\begin{aligned}\Omega(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{F_1(\sigma)}{\sigma-\zeta}\,d\sigma + \frac{c_1\zeta + c_0}{\zeta^2+c^2} = L_1(F_1(\sigma)),\\ \Lambda(\zeta) &= \frac{X(\sigma)}{2\pi i}\int\limits_L \frac{F_2(\sigma)}{X^+(\sigma)(\sigma-\zeta)}\,d\sigma + X(\zeta)c_2 = L_2(F_2(\sigma)),\end{aligned} \tag{18}$$

где $X(\zeta) = (\zeta^2 + c^2)^{-1/2}$; c_k — постоянные; вторые слагаемые в правых частях равенства (18) являются решениями соответствующих однородных задач сопряжения (16). С помощью условий (17) коэффициенты c_k легко находятся. Нетрудно проверить, что решения, представленные в виде (18), удовлетворяют условиям непрерывности перемещений в точках $t = \pm ic$ и конечности потенциальной энергии, если учесть запись перемещений (4) с использованием оператора S.

Выпишем конкретный вид неизвестных коэффициентов ($k = 0$, 1, 2). Поскольку

$$\varphi_*(\zeta) = (\Omega(\zeta) + \Lambda(\zeta))/2, \qquad \psi_{1*}(\zeta) = (\Lambda(\zeta) - \Omega(\zeta))/2,$$

то, представив интегралы в (18) при $|\zeta| > c$ в виде

$$\int\limits_L F_1(\sigma)/(\sigma-\zeta)\,d\sigma = -\zeta^{-1}\int\limits_L F_1(\sigma)/(1-\sigma\zeta^{-1})\,d\sigma = -\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\int\limits_L F_1(\sigma)\sigma^n\,d\sigma\Big)\zeta^{-n-1},$$

$$\int\limits_L F_2(\sigma)/(X^+(\sigma)(\sigma-\zeta))\,d\sigma = -\zeta^{-1}\int\limits_L F_2(\sigma)/(X^+(\sigma)(1-\sigma\zeta^{-1}))\,d\sigma =$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\int\limits_L F_2(\sigma)\sigma^n/X^+(\sigma)\,d\sigma\Big)\zeta^{-n-1},$$

из равенств (18) получаем уравнения

$$a_1 = \lim_{\zeta\to\infty}\zeta[\Omega(\zeta)+\Lambda(\zeta)] = c_1 + c_2 - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L F_1(\sigma)\,d\sigma = 0,$$

$$b_1 = \lim_{\zeta\to\infty}\zeta[\Lambda(\zeta)-\Omega(\zeta)] = c_2 - c_1 + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L F_1(\sigma)\,d\sigma = 0,$$

$$æa_2 - b_2 = \lim_{\zeta\to\infty}\zeta^2[æ(\Omega(\zeta)+\Lambda(\zeta))/2 + (\Omega(\zeta)-\Lambda(\zeta))/2] =$$
$$= -\frac{æ+1}{4\pi i}\int\limits_L F_1(\sigma)\sigma\,d\sigma + \frac{æ+1}{2}c_0 - \frac{æ-1}{4\pi i}\int\limits_L F_2(\sigma)/X^+(\sigma)\,d\sigma = 0.$$

Следовательно,

$$c_0 = \frac{1}{2\pi i}\Big(\int\limits_L F_1(\sigma)\sigma\,d\sigma + \frac{æ-1}{æ+1}\int\limits_L F_2(\sigma)/X^+(\sigma)\,d\sigma\Big), \quad c_1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L F_1(\sigma)\,d\sigma, \quad c_2 = 0.$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда к берегам разреза приложено равномерное давление p. При этом $F_1(\sigma) = 2p$, $F_2(\sigma) = 0$ и из формул (18) следует, что $c_0 = c_2 = 0$, $c_1 = 2pc/\pi$, поэтому

$$\Omega(\zeta) = \frac{p}{\pi i}\ln\frac{\zeta - ic}{\zeta + ic} + \frac{2pc}{\pi}\frac{\zeta}{\zeta^2+c^2}, \qquad \Lambda(\zeta) = 0.$$

Значит,

$$\varphi_*(\zeta) = -\psi_*(\zeta) = \frac{p}{2\pi i}\ln\frac{\zeta - ic}{\zeta + ic} + \frac{pc}{\pi}\frac{\zeta}{\zeta^2 + c^2} = \frac{p}{2\pi i}\Big(\ln\frac{\zeta - ic}{\zeta + ic} + \frac{ic}{\zeta + ic} + \frac{ic}{\zeta - ic}\Big).$$

Для $\Phi_*(\zeta) = \displaystyle\int \varphi_*(\zeta)\,d\zeta$ с учетом того, что $\lim\limits_{|\zeta|\to\infty}\Phi_*(\zeta) = 0$ [1], получим

$$\Phi_*(\zeta) = \frac{p}{2\pi i}\Big(2ic + \zeta\ln\frac{\zeta - ic}{\zeta + ic}\Big).$$

Приняв обозначения $A(t) = \operatorname{Re}(\Phi(t))$, $B(t) = \operatorname{Im}(\Psi(t))$ и учитывая равенство $\varphi_*(\zeta) = -\psi_*(\zeta)$, формулы (4) запишем в виде

$$\sigma_z + \sigma_r + \sigma_\theta = 4(1+\nu)A'(t), \quad \sigma_\theta = 4\nu A'(t) + 2(1-2\nu)B(t) + zB'(t)/r,$$

$$\sigma_z = 2A'(t) - 2zA''(t), \quad \tau_{rz} = 2z\,\frac{\partial^2 B(t)}{\partial z^2} \qquad (t = z + ir).$$

По формулам (11) получаем

$$A'(t) = \operatorname{Re}(\Phi'(t)) = -\frac{1}{\pi|r|}\operatorname{Re}\Big(\int\limits_{\bar t}^{t}\Phi_*'(\zeta)\sqrt{\frac{\zeta - \bar t}{\zeta - t}}\,d\zeta\Big) = J_1(t) + J_2(t),$$

где

$$J_1(t) = -\frac{1}{\pi|r|}\operatorname{Re}\Big(\int\limits_{-r}^{r}\frac{p}{2\pi i}\ln\frac{\zeta + ic}{\zeta - ic}\,\frac{r}{\sqrt{r^2 - y^2}}\,dy\Big),$$

$$J_2(t) = -\frac{1}{\pi|r|}\operatorname{Re}\Big(\int\limits_{-r}^{r}\frac{p}{2\pi i}\Big(\frac{ic}{\zeta + ic} + \frac{ic}{\zeta - ic}\Big)\frac{r}{\sqrt{r^2 - y^2}}\,dy\Big)$$

$$(t = z + ir, \quad \zeta = x + iy, \quad x = z)$$

и интегрирование проводится по отрезку прямой $(z - iy,\ z + iy)$. Используя теорему о вычетах, для соответствующей ветви радикала получим $J_2(t) = -\dfrac{cp}{\pi}\operatorname{Re}\dfrac{1}{\sqrt{r^2 + (z + ic)^2}}$.

Для вычисления интеграла $J_1(t)$ удобно продифференцировать по параметру c, а затем использовать теорему о вычетах. После интегрирования по c получим $J_1(t) = -(p/\pi)\operatorname{Im}[\ln(ic + z + \sqrt{r^2 + (z + ic)^2}\,)]$. Итак,

$$A'(t) = -\frac{p}{\pi}\operatorname{Im}\Big[\ln(ic + z + \sqrt{r^2 + (z + ic)^2}\,) + \frac{ic}{\sqrt{r^2 + (z + ic)^2}}\Big].$$

Аналогично для $B(t)$ получим

$$B(t) = \operatorname{Im}(\Psi(t)) = -\frac{pr}{2\pi}\operatorname{Im}\Big[\ln(ic + z + \sqrt{r^2 + (z + ic)^2}\,) + \frac{z - ic}{r^2}\sqrt{r^2 + (z + ic)^2}\Big].$$

При $z = 0$, $r > c$ получаем известное решение [1]

$$\sigma_z = \frac{2p}{\pi}\Big(\frac{c}{\sqrt{r^2 - c^2}} - \arcsin\frac{c}{r}\Big), \qquad \sigma_\theta = \frac{(1+2\nu)p}{\pi}\Big(\frac{c}{\sqrt{r^2 - c^2}} - \arcsin\frac{c}{r}\Big) - \frac{(1-2\nu)pc^3}{\pi r^2\sqrt{r^2 - c^2}},$$

$$\sigma_r = (1+2\nu)\sigma_z - \sigma_\theta = \frac{(1+2\nu)p}{\pi}\Big(\frac{c}{\sqrt{r^2 - c^2}} - \arcsin\frac{c}{r}\Big) + \frac{(1-2\nu)pc^3}{\pi r^2\sqrt{r^2 - c^2}}.$$

Условия сопряжения для второй краевой задачи будут иметь вид

$$æ\varphi^{\pm}(\tau) + \psi_1^{\mp}(\tau) = g_1^{\pm}(\tau) \qquad (\tau \in L). \tag{19}$$

Складывая и вычитая равенства (19), получим

$$[æ\varphi(\tau) + \psi_1(\tau)]^+ + [æ\varphi(\tau) + \psi_1(\tau)]^- = g_0(\tau), \quad [æ\varphi(\tau) - \psi_1(\tau)]^+ - [æ\varphi(\tau) - \psi_1(\tau)]^- = g_2(\tau),$$
$$g_0(\tau) = g_1^+(\tau) + g_1^-(\tau), \qquad g_2(\tau) = g_1^+(\tau) - g_1^-(\tau) \qquad (\tau \in L).$$

Аналогично случаю первой основной задачи для функций $\Omega(\zeta) = æ\varphi_*(\zeta) + \psi_{1*}(\zeta)$, $\Lambda(\zeta) = æ\varphi_*(\zeta) - \psi_{1*}(\zeta)$ получим условия сопряжения

$$\begin{gathered} \Omega^+(\sigma) - \Omega^-(\sigma) = -S^{-1}(g_0(\tau)) = G_1(\sigma), \\ \Lambda^+(\sigma) + \Lambda^-(\sigma) = -S^{-1}(g_2(\tau)) = G_2(\sigma) \quad (\sigma \in L). \end{gathered} \tag{20}$$

Для того чтобы удовлетворить условиям (17), как и в случае первой краевой задачи, достаточно взять решения $\Omega(\zeta)$, $\Lambda(\zeta)$ в виде

$$\Omega(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{G_1(\sigma)\,d\sigma}{\sigma - \zeta} + \frac{c_1\zeta + c_0}{\zeta^2 + c^2},$$

$$\Lambda(\zeta) = \frac{1}{2\pi i X(\zeta)}\int\limits_L \frac{X^+(\sigma)G_2(\sigma)\,d\sigma}{\sigma - \zeta} + \frac{c_2}{X(\zeta)}, \quad X(\zeta) = ((\zeta - ic)(\zeta + ic))^{1/2}.$$

Постоянные c_1, c_2 легко определяются: $c_2 = 0$, $c_1 = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_L G_1(\sigma)\,d\sigma$.

Поскольку [1]

$$a_2 = -P/(4\pi(1 + æ)), \tag{21}$$

где P — равнодействующая сил, приложенных к щели, можно показать, что

$$c_0 = -\frac{æP}{2\pi(1+æ)} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L X^+(\sigma)G_2(\sigma)\,d\sigma + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L G_1(\sigma)\sigma\,d\sigma.$$

Поэтому для равнодействующей P можно записать равенство

$$P = 2\pi\int\limits_L [(\sigma_z^+ + i\tau_{zr}^+) - (\sigma_z^- + i\tau_{zr}^-)]\tau\,d\tau =$$
$$= -2\pi\int\limits_L [(\Phi'_+(\tau) - \Phi'_-(\tau)) - (\overline{\Psi'_+(\tau)} - \overline{\Psi'_-(\tau)})]\tau\,d\tau =$$
$$= -\frac{\pi}{æ}\int\limits_L S[(1-æ)(\Omega_+(\sigma) - \Omega_-(\sigma)) - (1+æ)(\Lambda_+(\sigma) - \Lambda_-(\sigma))]\tau\,d\tau.$$

Рассмотрим еще одну смешанную краевую задачу. Пусть на нижнем берегу щели заданы перемещения, а на верхнем — усилия. В этом случае условия сопряжения имеют вид

$$æ\varphi^-(\tau) + \psi_1^+(\tau) = g_1(\tau), \qquad \varphi^+(\tau) - \psi_1^-(\tau) = f(\tau) \qquad (\tau \in L), \tag{22}$$

где $g_1(\tau)$ и $f(\tau)$ — заданные функции.

Умножая первое из равенств (22) на $-i/\sqrt{æ}$, а затем на $i/\sqrt{æ}$ и складывая последовательно правые и левые части получившихся равенств с правой и левой частями второго равенства (22), получим

$$\Big[\varphi(\tau) - \frac{i}{\sqrt{æ}}\,\psi_1(\tau)\Big]^+ - i\sqrt{æ}\Big[\varphi(\tau) - \frac{i}{\sqrt{æ}}\,\psi_1(\tau)\Big]^- = f(\tau) - \frac{i}{\sqrt{æ}}\,g_1(\tau) = f_1(\tau),$$

$$\Big[\varphi(\tau) + \frac{i}{\sqrt{æ}}\,\psi_1(\tau)\Big]^+ + i\sqrt{æ}\Big[\varphi(\tau) + \frac{i}{\sqrt{æ}}\,\psi_1(\tau)\Big]^- = f(\tau) + \frac{i}{\sqrt{æ}}\,g_1(\tau) = f_2(\tau).$$

Повторяя вычисления, проведенные для первой и второй краевых задач, для аналитических функций $\Omega(\zeta) = \varphi_*(\zeta) - (i/\sqrt{æ})\psi_{1*}(\zeta)$, $\Lambda(\zeta) = \varphi_*(\zeta) + (i/\sqrt{æ})\psi_{1*}(\zeta)$, получим задачу сопряжения

$$\begin{aligned} &\Omega^+(\sigma) - i\sqrt{æ}\,\Omega^-(\sigma) = -S^{-1}(f_1(\tau)) = F_1(\tau),\\ &\Lambda^+(\sigma) + i\sqrt{æ}\,\Lambda^-(\sigma) = -S^{-1}(f_2(\tau)) = F_2(\tau). \end{aligned} \tag{23}$$

Из равенств $\varphi_*(\zeta) = \overline{\varphi_*(\bar\zeta)}$, $\psi_{1*}(\zeta) = \overline{\psi_{1*}(\bar\zeta)}$ следует, что

$$\Lambda(\zeta) = \overline{\Omega(\bar\zeta)}, \tag{24}$$

поэтому решения задач сопряжения (23) имеют вид $\Omega(\zeta) = L_1(F_1(\sigma))$, $\Lambda(\zeta) = L_2(F_2(\sigma))$, где с учетом (24)

$$\begin{aligned} &L_j(f(\sigma)) = \frac{X_j(\zeta)}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(\sigma)\,d\sigma}{X_j^+(\sigma)(\sigma-\zeta)} + X_j(\zeta)P_j(\zeta),\\ &X_1(\zeta) = \overline{X_2(\bar\zeta)} = (\zeta+ic)^{-\gamma}(\zeta-ic)^{\gamma-1} \qquad (j = 1,\,2); \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{gathered} P_1(\zeta) = (c_1\zeta + c_0)/(\zeta - ic), \qquad P_2(\zeta) = (c_2\zeta + c_3)/(\zeta + ic),\\ \gamma = 3/4 + \ln æ/(4\pi i), \qquad c_1 = \bar c_2 = 0, \qquad c_0 = \bar c_3,\\ \operatorname{Re}\,[(æ - i\sqrt{æ})c_0] = \operatorname{Re}\,[(æ + i\sqrt{æ})c_3] = \operatorname{Re}\Big[(æ + i\sqrt{æ})/(2\pi i)\int\limits_L F_1(\sigma)/X_1^+(\sigma)\,d\sigma\Big]. \end{gathered} \tag{26}$$

Обозначив через P и P_1 равнодействующие усилий по обоим берегам щели и верхнему берегу соответственно и учитывая (21) и (26), получим

$$\operatorname{Re} c_0 = \operatorname{Re}\Big[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L F_1(\sigma)/X_1^+(\sigma)\,d\sigma - \frac{P}{4\pi(1+æ)}\Big]. \tag{27}$$

Действительно,

$$a_2 = -\frac{P}{4\pi(1+æ)} = \frac{1}{2}\lim_{|\zeta|\to\infty}\zeta^2[\Omega(\zeta)+\Lambda(\zeta)] =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L F_1(\sigma)/X_1^+(\sigma)\,d\sigma - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L F_2(\sigma)/X_2^+(\sigma)\,d\sigma + c_0 + c_3\Big],$$

откуда следует формула (27).

Для равнодействующей P можно записать равенство

$$P = 2\pi\int\limits_L(\sigma_z^+ - \sigma_z^-)r\,dr = 2\pi\int\limits_L \sigma_z^+ r\,dr - 2\pi\int\limits_L \operatorname{Re}\,(\Phi'_- - \Psi'_-)r\,dr =$$

$$= P_1 - 2\pi \int\limits_L \operatorname{Re}\,[S((\varphi_*(\sigma))_- - (\psi_{1*}(\sigma))_+)]r\,dr =$$

$$= P_1 - \pi \int\limits_L \operatorname{Re}\Big[S\Big(\Omega_1^-(\sigma) + \overline{\Omega_1^-(\bar\sigma)} + X_1^-(\sigma)\,\frac{c_0}{\sigma - ic} + \overline{X_1^-(\bar\sigma)}\,\frac{\bar c_0}{\sigma + ic}\Big) -$$

$$-i\sqrt{æ}\Big(\Omega_1^+(\sigma) - \overline{\Omega_1^+(\bar\sigma)} + X_1^+(\sigma)\,\frac{c_0}{\sigma - ic} - \overline{X_1^+(\bar\sigma)}\,\frac{\bar c_0}{\sigma + ic}\Big)\Big]r\,dr, \qquad (28)$$

где $\Omega_1(\zeta) = \dfrac{X_1(\zeta)}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_L \dfrac{F_1(\sigma)\,d\sigma}{X_1^+(\sigma)(\sigma-\zeta)}$, которое вместе с (26), (27) позволяет найти c_0 и P. При выборе решения в виде (25) нетрудно проверить непрерывность перемещений и конечность потенциальной энергии.

Для вычисления $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$ используется формула интегрирования для ОАФ [1]

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t} \Big[\Big(1 + \frac{\tau - \bar\tau}{t - \bar t}\Big)\varphi(\tau)\,d\tau + \Big(1 - \frac{\tau - \bar\tau}{t - \bar t}\Big)\overline{\varphi(\tau)}\,d\bar\tau\Big] + A_1 + \frac{B_1}{r},$$

$$\Psi(t) = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t} \Big[\Big(1 + \frac{\tau - \bar\tau}{t - \bar t}\Big)\psi_1(-\tau)\,d\tau + \Big(1 - \frac{\tau - \bar\tau}{t - \bar t}\Big)\overline{\psi_1(-\tau)}\,d\bar\tau\Big] + A_2 + \frac{B_2}{r}.$$

Здесь интегрирование проводится по кривой, соединяющей некоторую точку t_0 с точкой t ($\operatorname{Im} t > 0$) и не пересекающей L; A_j, B_j ($j = 1, 2$) — действительные постоянные, для которых имеет место соотношение [1]

$$æB_1 + B_2 = 0.$$

Из постоянных A_j ($j = 1, 2$) одна может быть задана произвольно, тогда вторая определяется по известным перемещениям в какой-либо точке. Без ущерба для общности решения можно положить $B_1 = B_2 = 0$. При $\operatorname{Im} t < 0$ функции $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ могут быть определены по формулам $\Phi(t) = \overline{\Phi(\bar t)}$, $\Psi(t) = \overline{\Psi(\bar t)}$. Таким образом, все необходимые функции найдены.

Автор выражает благодарность рецензенту Ю. И. Соловьеву за сделанные замечания и указания, позволившие существенно улучшить статью.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Александров А. Я., Соловьев Ю. И.** Пространственные задачи теории упругости. М.: Наука, 1978.
2. **Капшивый А. А., Маслюк Г. Ф.** Решение смешанной осесимметричной задачи теории упругости для полупространства методом p-аналитических функций // Прикл. механика. 1967. Т. 3, вып. 7. С. 21–27.
3. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи теории упругости. М.: Наука, 1966.

Поступила в редакцию 24/IV 1995 г.,
в окончательном варианте — 3/VI 1998 г.