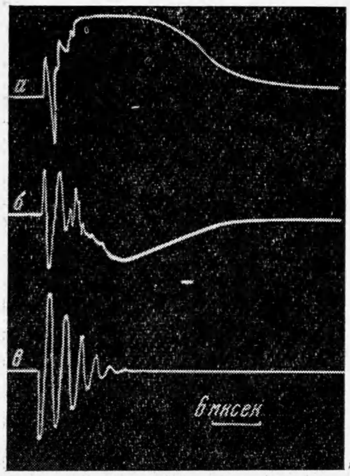
Высказанная гипотеза о механизме удержания горячей плазмы требует дополнения, объясняющего баланс давлений по сечению камеры, так как внутренняя ловушка с давлением $\sim H^2 / 8\pi$ существует длительное время после того, как полностью исчезает встречное воздействие со стороны поля ударного витка.




Фиг. 2 Сигналы с магнитных зондов, установленных в плазме под витком на расстояниях: *а* — $\sim 0.25R$, *б* — $\sim 0.9\ R$ от оси камеры, *в* — ток ударного витка.

Объяснение этому факту, видимо, следует искать в образовании цилиндрического слоя плазмы, прилегающего к стенке камеры и передающего ей давление захваченного поля. Существование пристеночного слоя плазмы убедительно проявляется в его экранирующем воздействии: магнитные измерения не обнаруживают поля у наружной стенки камеры (после окончания тока в ударном витке), тогда как внутри камеры поле фиксируется в непосредственной близости от стенок (фиг. 2, *б*).

Время существования ловушки в этом случае должно быть связано с диффузией поля, захваченного в объем радиуса $R$, через пристеночный слой с толщиной скина $\delta$

$$t \sim \frac{R}{\delta} t_s \qquad \left(t_s = \frac{\delta^2}{C^2} 4\pi\sigma\right)$$

($t$ — скиновое время, $\sigma$ — проводимость слоя).

Проведенные оценки показывают, что наблюдающиеся в эксперименте значения $t$ (несколько десятков *мксек*) соответствуют наличию слоя, толщина которого меньше 1 *см*, а температура — порядка десятков *эв*.

Относительно высокая температура пристеночного слоя может поддерживаться за счет диссипации диффундирующего поля.

Авторы благодарят Г. И. Будкера за постоянное внимание и интерес к работе и Р. З. Сагдеева за помощь и участие в обсуждении результатов.

Поступило 17 XI 1964

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сагдеев Р. З. О тонкой структуре фронта ударной волны, распространяющейся поперек магнитного поля в разреженной плазме. Ж. техн. физ., 1961, т. 31, стр. 1185.
2. Искольдский А. М., Куртмуллаев Р. Х., Нестерихин Ю. Е., Пономаренко А. Г. Эксперименты по бесстолкновительной ударной волне в плазме. Ж. эксперим. и теор. физ., 1964, т. 47, вып. 2 (8).
3. Bodin H. A. B. et al. The influence of trapped field of the characteristics of a magnetically compressed plasma (theatatron). Nucl. Fusion Suppl., 1962, p. 2, 521.

# ОБ ИЗМЕНЕНИИ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ ИОНИЗОВАННОГО ГАЗА В НАЧАЛЬНОМ УЧАСТКЕ ПЛОСКОГО КАНАЛА

*Я. С. Уфлянд, И. Б. Чекмарев*

*(Ленинград)*

**§1. Постановка задачи.** Для изучения изменения электропроводности ионизованного газа в начальном участке канала рассмотрим следующую задачу. В плоском полубесконечном канале ($x \geqslant 0$, $|y| < a$) движется газ с заданной постоянной скоростью $v$ и температурой $T_0$. В начальный момент времени $t = 0$ во входном сечении канала ($x = 0$) задается концентрация легкоионизуемой присадки $n = n_0 f(t)$ и температура газа $T = T_0 g(t)$. Температуру стенок при $t = 0$ примем равной $T_0$, а концентрацию присадки — равной нулю. Исследуется распределение температуры $T(x, y, t)$ и концентрации присадки $n(x, y, t)$ в зависимости от координат и времени.

В области канала искомые величины удовлетворяют приближенным уравнениям (см., например, [1-3])

$$\frac{\partial n}{\partial t} + v\frac{\partial n}{\partial x} = D\frac{\partial^2 n}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial T}{\partial t} + v\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\lambda}{\rho c_p}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{1.1}$$

В области стенок канала температура удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial T_w}{\partial t} - \frac{\lambda_w}{\rho_w c_w} \frac{\partial^2 T_w}{\partial y^2} \tag{1.2}$$

Начальные и граничные условия поставленной задачи имеют вид

$$n = 0, \quad T = T_0, \quad T_w = T_0 \quad \text{при } t = 0$$
$$n = n_0 f(t), \quad T = T_0 g(t) \quad \text{при } x = 0$$
$$n = 0, \quad T = T_w, \quad \lambda \partial T / \partial y = \lambda_w \partial T_w / \partial y \quad \text{при } |y| = a \tag{1.3}$$

Переходя к безразмерным переменным

$$\beta = \frac{n}{n_0}, \quad \theta = \frac{T - T_0}{T_0}, \quad \tau = \frac{vt}{a}, \quad \xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{a} \tag{1.4}$$

получим

$$\frac{\partial \beta}{\partial \tau} + \frac{\partial \beta}{\partial \xi} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 \beta}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{1}{\delta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \quad (|\eta| < 1) \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial \tau} = \frac{1}{\delta_w} \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \eta^2} \quad (|\eta| > 1) \tag{1.6}$$

$$\beta = \theta = \theta_w = 0 \quad \text{при } \tau = 0 \tag{1.7}$$

$$\beta = f(\tau), \quad \theta = g(\tau) - 1 \quad \text{при } \xi = 0 \tag{1.8}$$

$$\beta = 0, \quad \theta = \theta_w, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \varkappa \frac{\partial \theta_w}{\partial \eta} \quad \text{при } |\eta| = 1 \tag{1.9}$$

Здесь

$$\gamma = \frac{av}{D}, \quad \delta = \frac{\rho c_p a v}{\lambda}, \quad \delta_w = \frac{\rho_w c_w a v}{\lambda_w}, \quad \varkappa = \frac{\lambda_w}{\lambda} \tag{1.10}$$

Если величины $\beta$ $(\xi, \eta, \tau)$ и $\theta$ $(\xi, \eta, \tau)$ найдены, то электропроводность газа в канале может быть вычислена следующим образом. Будем считать, что среда является смесью основного инертного газа и небольшого количества паров щелочной присадки. Тогда равновесная концентрация электронов определяется по формуле Саха [4,5]

$$\frac{n_e^2}{n - n_e} = \left( \frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} \exp\left( -\frac{e\varphi}{kT} \right) \tag{1.11}$$

Здесь $n$ — концентрация присадки, $\varphi$ — потенциал ионизации присадки.

В случае малой степени ионизации присадки $n_e \ll n$ имеем

$$n_e = \sqrt{n} \left( \frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/4} \exp\left( -\frac{e\varphi}{2kT} \right) \tag{1.12}$$

Электропроводность определяем по известной формуле

$$\sigma = \frac{n_e e^2 \tau_e}{m_e} \quad \left( \tau_e = \frac{l_e}{v_e}, \quad v_e = \frac{\sqrt{8kT}}{\sqrt{\pi m_e}} \right)$$

Здесь $\tau_e$ — время между столкновениями электрона с тяжелыми частицами, $l_e$ — средняя длина свободного пробега электрона, $v_e$ — тепловая скорость электрона.

Подставляя выражения $n_e$ и $T$ через $\beta$ и $\theta$ и вводя величину $\sigma_0 = \sigma$ при $\xi = 0$, для безразмерной электропроводности $\sigma^\circ = \sigma / \sigma_0$, получим

$$\sigma^\circ = \left( \frac{\beta}{f} \right)^{1/2} \left( \frac{1 + \theta}{g} \right)^{1/4} \exp\left[ \frac{e\varphi}{2kT_0} \left( \frac{1}{g} - \frac{1}{1 + \theta} \right) \right] \tag{1.13}$$

**§ 2. Общее решение задачи и некоторые частные случаи.** Применяя последовательно преобразования Лапласа

$$F_{(\tau)} = \int_0^\infty e^{-p\tau} f d\tau, \quad F_{(\xi)} = \int_0^\infty e^{-s\xi} f d\xi \tag{2.1}$$

по переменным $\tau$ и $\xi$, получим уравнения

$$\frac{d^2\beta(\tau,\xi)}{d\eta^2} = \gamma(p+s)\,\beta(\tau,\xi) - \gamma f(\tau)$$

$$\frac{d^2\theta(\tau,\xi)}{d\eta^2} = \delta(p+s)\,\theta(\tau,\xi) + \delta\left(\frac{1}{p} - g(\tau)\right), \qquad \frac{d^2\theta_w(\tau,\xi)}{d\eta^2} = \delta_w p\theta_w(\tau,\xi) \tag{2.2}$$

и граничные условия при $\eta = \pm 1$

$$\beta(\tau,\xi) = 0, \qquad \theta(\tau,\xi) = \theta_w(\tau,\xi), \qquad \frac{d\theta(\tau,\xi)}{d\eta} = \varkappa\frac{d\theta_w(\tau,\xi)}{d\eta} \tag{2.3}$$

Опуская промежуточные выкладки, приводим окончательные выражения для преобразованных от искомых величин

$$\beta(\tau,\xi) = \frac{f(\tau)}{p+s}\left[1 - \frac{\operatorname{ch}\eta\sqrt{\gamma(p+s)}}{\operatorname{ch}\sqrt{\gamma(p+s)}}\right] \tag{2.4}$$

$$\theta(\tau,\xi) = \frac{g(\tau) - p^{-1}}{p+s}\left[1 - \frac{\operatorname{ch}\eta\sqrt{\delta(p+s)}}{\operatorname{ch}\sqrt{\delta(p+s)} + \varkappa^{-1}\sqrt{(\delta/\delta_w)(p+s)/p}\,\operatorname{sh}\sqrt{\delta(p+s)}}\right] \tag{2.5}$$

Дальнейшие вычисления будем производить для случая постоянных значений $f(\tau) = 1$ и $g(\tau) = m$, так как из этого решения случай произвольной зависимости от времени может быть получен при помощи интеграла Дюамеля. Функция $\beta$ пропорциональна функции $\theta$ при $\varkappa \to \infty$, поэтому достаточно выполнить обращение в формуле (2.5). Полагая $q = \delta(p+s)$, получим

$$\theta(\tau,\xi) = \frac{\delta(m-1)}{pq}\left[1 - \frac{\operatorname{ch}\eta\sqrt{q}}{\operatorname{ch}\sqrt{q} + \alpha\sqrt{q/p}\,\operatorname{sh}\sqrt{q}}\right], \qquad \alpha = \frac{1}{\varkappa\sqrt{\delta_w}} \tag{2.6}$$

Применение формулы Римана — Меллина дает

$$\theta = \frac{m-1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_2 + i\infty} \exp\frac{q\xi}{\delta}\,\frac{dq}{q}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_2 - i\infty}^{\sigma_2 + i\infty} e^{p(\tau-\xi)}\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{\sqrt{p}(\sqrt{p}+\mu)}\,\frac{\operatorname{ch}\eta\sqrt{q}}{\operatorname{ch}\sqrt{q}}\right]dp$$

$$\mu = \alpha\sqrt{q}\,\operatorname{th}\sqrt{q} \tag{2.7}$$

Вычисляя внутренний интеграл при помощи формулы

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_2 - i\infty}^{\sigma_2 + i\infty} \frac{e^{pu}dp}{\sqrt{p}(\sqrt{p}+\mu)} = e^{\mu^2 u}\left[1 - \Phi(\mu\sqrt{u})\right] \qquad (u > 0) \tag{2.8}$$

где $\Phi(z)$ — функция вероятности, приходим к решению задачи в виде однократного интеграла

$$\theta = 0, \qquad \tau < \xi$$

$$\theta = \frac{m-1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \exp\frac{q\xi}{\delta}\left\{1 - \frac{\operatorname{ch}\eta\sqrt{q}}{\operatorname{ch}\sqrt{q}}\,e^{\mu^2 u}\left[1 - \Phi(\mu\sqrt{u})\right]\right\}\frac{dq}{q}, \qquad \tau > \xi \tag{2.9}$$

причем положено $u = \tau - \xi$.

Полученный результат показывает, прежде всего, что вдоль канала со скоростью $v$ распространяется волна, форма которой зависит от переменных $\xi$ и $\tau - \xi$.

Приведение интеграла (2.9) к виду, удобному для вычислений, оказывается достаточно сложным. Например, при помощи суммирования по вычетам в существенно особых точках $q_n = -{}^1/_4(2n+1)^2\pi^2$ можно представить решение в виде двойного ряда. Не приводя этих результатов, укажем еще на возможность получения приближенного решения при малых или больших значениях параметра $\varkappa = \lambda_w/\lambda$.

При $\varkappa \to \infty$ $(\alpha \to 0)$ можно воспользоваться асимптотическим выражением $\Phi(z) \approx 2\pi^{-1/2} z$ $(|z| \to 0)$ и получить решение в виде

$$\left.\frac{\theta}{m-1}\right|_{\tau>\xi} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \exp\frac{q\xi}{\delta}\left[1 - \frac{\operatorname{ch}\eta\sqrt{q}}{\operatorname{ch}\sqrt{q}}\right]\frac{dq}{q} +$$

$$+ \frac{2\alpha\sqrt{\tau-\xi}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \exp\frac{q\xi}{\delta}\,\frac{\operatorname{ch}\eta\sqrt{q}\,\operatorname{sh}\sqrt{q}}{\operatorname{ch}^2\sqrt{q}}\,\frac{dq}{\sqrt{q}} \tag{2.10}$$

В частности, в случае $\alpha = 0$, соответствующем постоянной температуре стенок канала, при помощи теоремы о вычетах находим

$$\theta\,|_{\tau>\xi} = \frac{4}{\pi}(m-1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cos\frac{2k+1}{2}\pi\eta\exp\left[-\frac{\xi}{\delta}\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right)^2\right] \qquad (2.11)$$

В другом предельном случае ($\varkappa = 0$) теплоизолированных стенок канала получим

$$\theta = m-1 \quad \text{при } \xi < \tau, \qquad \theta = 0 \quad \text{при } \xi > \tau \qquad (2.12)$$

Таким образом, в обоих случаях значения температуры при $\xi < \tau$ оказываются не зависящими от времени.

Что касается функции $\beta$, то на основании (2.4) она вообще не зависит от параметра $\varkappa$ и $\beta \equiv 0$, при $\xi > \tau$, а при $\xi < \tau$ для $\beta$ получаем выражение (2.11), в котором параметр $\delta$ следует заменить на $\gamma$, а множитель $(m-1)$ — на единицу.

Ограничиваясь первым членом в формуле (2.11), получим для длины $\xi'$ теплового *входного* участка (при $\varkappa = \infty$) и длины $\xi''$ диффузионного входного участка следующие приближенные выражения:

$$\xi' = 4\delta/\pi^2, \qquad \xi'' = 4\gamma/\pi^2 \qquad (2.13)$$

В случае теплоизолированных стенок из (2.12) следует, что входной участок отсутствует. Заметим, что отношение параметров $\delta$ и $\gamma$ представляет собой число Льюиса

$$L = \delta/\gamma = \rho c_p D/\lambda \qquad (2.14)$$

Обычно $L \approx 1$, так что длины $\xi'$ и $\xi''$ являются величинами одного порядка.

Оценка параметра $\delta$ для типичных условий в канале магнитогазодинамического генератора (например, для аргона при $p = 1$ *ат*, $T = 3000°$ K, $a = 1$ *м*, $v = 10^3$ *м/сек*) дает величину порядка $10^6$, т. е. длины теплового и диффузионного входных участков получаются значительно больше любой разумной длины канала. Отсюда вытекает, что в этих условиях можно пренебречь уменьшением температуры газа и концентрации присадки вдоль канала за счет теплового и диффузионного потоков на стенку. Следовательно, физические свойства стенок практически не сказываются на поведении электропроводности в ядре потока.

В заключение рассмотрим еще случай установившегося колебательного режима, когда $f(\tau) = 1$, $g(\tau) = 1 + \nu\sin\omega\tau$, т. е.

$$f^{(\tau)} = \frac{1}{p}, \qquad g^{(\tau)} = \frac{1}{p} + \frac{\nu\omega}{\omega^2+p^2}$$

В этом случае концентрация $\beta$ определяется формулой

$$\beta = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cos\frac{2k+1}{2}\pi\eta\exp\left[-\frac{\xi}{\gamma}\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right)^2\right] \qquad (2.15)$$

а для нахождения $\theta$ следует, используя (2.5), вычислить вычеты в полюсах $p = \pm i\omega$.

При $\varkappa = \infty$ получаем в результате выкладок

$$\theta = \frac{4\nu}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos{}^1/_2(2k+1)\pi\eta\sin\omega(\tau-\xi)}{2k+1}\exp\left[-\frac{\xi}{\delta}\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right)^2\right] \qquad (2.16)$$

т. е. температура распространяется вдоль канала в виде затухающей волны со скоростью $v$, причем декремент затухания $\Delta = 4\delta/\pi^2$ не зависит от частоты.

При $\varkappa = 0$ изменение температуры распространяется в виде незатухающей волны

$$\theta = \nu\sin\omega(\tau-\xi) \qquad (2.17)$$

Влияние пульсаций температуры на изменение электропроводности потока нетрудно определить при помощи формулы (1.13).

Поступила 6 IV 1965

## ЛИТЕРАТУРА

1. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. Гостехиздат, 1951.
2. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. Гостехиздат, 1955.
3. Эккерт Э. Р., Дрейк Р. М. Теория тепло- и массообмена. Госэнергоиздат, 1961.
4. Frost L. S. Conductivity of seeded atmospheric pressure plasmas. J. Appl. Phys., 1961, vol. 32, No 10, p. 2029.
5. Смыслов Ю. Н., Чекмарев И. Б. Магнитогидродинамический пограничный слой на пластине, обтекаемой высокотемпературным потоком при наличии вдува паров легкоионизующейся присадки. Ж. техн. физ., 1954, т. 34, № 4, стр. 630.