

2. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Заклязьминский Л. А., Волосевич П. П., Дегтярев Л. М., Курдюмов С. П., Попов Ю. П., Соколов В. С., Фаворский А. П. Нелинейный эффект образования самоподдерживающегося высокотемпературного электропроводного слоя газа в нестационарных процессах магнитной гидродинамики. Докл. АН СССР, 1967, т. 173, № 4.

## СТАБИЛИЗАЦИЯ КОНВЕКТИВНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЖИДКОСТИ В КУБИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ ВРАЩЕНИЕМ

А. П. Овчинников, Г. Ф. Шайдуров

(Пермь)

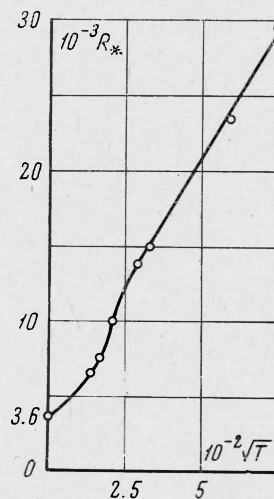
В работе [1] экспериментально исследована устойчивость механического равновесия подогреваемой снизу жидкости в кубической полости. Обнаружены два критических конвективных движения. Первому критическому числу Релея  $R_* = 3650$  отвечает приблизительно круговое движение жидкости в вертикальной плоскости, параллельной грани куба. При  $R > 6000$  возможно более сложное трехмерное критическое движение, переносящее меньше тепла и менее устойчивое, нежели первое. Представляет интерес исследовать влияние вращения полости на развитие возмущений этих двух типов.

Эксперименты проводились с моделью и по методике, описанной в [1]. Вращение полости вокруг ее вертикальной оси симметрии производилось синхронным электродвигателем через бесступенчатый фрикционный редуктор. Скорость вращения во время опыта оставалась постоянной с точностью до 1%. Измерения температур производились в квазистационарном режиме охлаждения вращающейся модели, в которой в начале опыта создавался вертикальный градиент температуры. Для каждой скорости вращения строились кривые теплопередачи  $N - 1 = f(R)$ , где  $N$  — число Нуссельта. Критическое число Релея определялось по излому этих кривых.

Эксперименты показали, что при не очень большой надкритичности  $(N - 1)^2 \sim R - R_*$ . Таким образом, при вращении сохраняется справедливость закона Ландау. В отличие от случая неподвижной полости при вращении не удалось наблюдать второе критическое движение. На фигуре изображена зависимость первого критического числа Релея от  $\sqrt{T}$

$$T = \left( \frac{4\pi l^2}{\nu T} \right)^2 \quad (1)$$

Здесь  $T$  — число Тейлора,  $l$  — длина ребра полости,  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости при температуре в центре полости. При  $T > 6 \times 10^4$ , как видно из графика,  $R_*$  растет линейно с  $\sqrt{T}$ . При меньших числах Тейлора максимальное центростремительное ускорение в полости не превышает  $0,5 \times 10^{-3} g$ , где  $g$  — ускорение силы тяжести. В этом случае кривая спрямляется, если по оси абсцисс отложить  $T$ . Такая линейная зависимость находится в качественном согласии с результатами теоретического исследования конвективной устойчивости жидкого куба со свободными границами [2].



Поступила 16 I 1968

### ЛИТЕРАТУРА

1. О в ч и н н и к о в А. П. Конвективная устойчивость жидкости в кубической полости. ПМТФ, 1967, № 3, стр. 118—120.
  2. Ш л и о м и с М. И. Об устойчивости вращающейся и подогреваемой снизу жидкости относительно периодических по времени возмущений. ПММ, 1962, т. 26, № 2, стр. 267—272.
- 9 ПМТФ, № 6

## О ДВИЖЕНИИ БОЛЬШИХ ПУЗЫРЕЙ ГАЗА, ВСПЛЫВАЮЩИХ В ЖИДКОСТИ

И. Г. Маленков

(Новосибирск)

Строится формула для вычисления скорости всплытия больших газовых пузырей в жидкости. Предполагается, что величина этой скорости определяется распространением волнового возмущения, вносимого в жидкость пузырем.

## Обозначения

$w$  — скорость движения пузыря (капли),  $\xi$  — коэффициент трения,  
 $\gamma$  — удельный вес,  $g$  — ускорение силы тяжести,  
 $\mu$  — вязкость динамическая,  $D$  — диаметр пузыря (капли),  
 $\nu$  — вязкость кинематическая,  $p$  — давление,  
 $r$  — радиус пузыря (капли),  $c$  — скорость распространения волнового  
 $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $\lambda$  — длина волны

Один штрих характеризует тяжелую фазу системы, два штриха — легкую фазу системы, индекс  $m$  — экстремальные значения.

Определению скорости всплытия пузырей в жидкостях посвящено большое количество теоретических [1-3] и экспериментальных [4-6] работ. Однако до сих пор не установлена достаточно определенно связь этой скорости с размерами пузырей. В настоящее время в интервале диаметров пузырей от 0 до 20 мм различаются, по крайней мере, четыре области, для которых установлены различные расчетные соотношения [7].

1. Область ламинарного обтекания пузырей, сохраняющих форму шара. Область ограничивается значением числа Рейнольдса  $R < 2$ . Скорость всплытия определяется по формуле

$$w = \frac{2}{9} \frac{\gamma' - \gamma''}{\mu'} r^2 \quad (1)$$

2. Область движения пузырей, имеющих форму плоских, пульсирующих сфероидов. Область ограничена изменением числа Рейнольдса в пределах  $2 < R < 4 A^{0.42}$ . Соотношение, рекомендуемое для определения скорости всплытия пузырей, имеет вид

$$w = 0.33 \frac{g^{0.76}}{\nu^{0.52}} r^{1.28} \quad (2)$$

3. Область движения плоских, относительно устойчивых пузырей ограничена  $4A^{0.42} < R < 3A^{0.5}$ . Формула для определения скорости всплытия дается в виде

$$w = 1.35 \left( \frac{g\sigma}{r(\gamma' - \gamma'')} \right)^{0.5} \quad (3)$$

4. Область движения грибообразных пузырей определяется значением числа  $R > 3A^{0.5}$ . В этой весьма обширной области скорости движения пузырей рекомендуется вычислять по формуле

$$w = \left( \frac{4g^2\sigma(\gamma' - \gamma'')}{\xi^2\gamma'^2} \right)^{1/4} \quad (4)$$

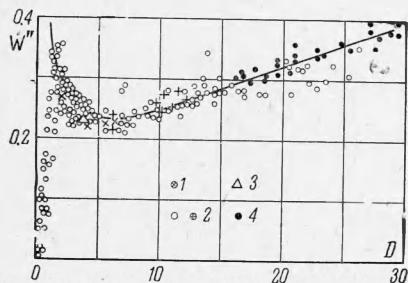
Величина  $A$ , служащая для определения границ применимости формул (1) — (4), определяется формулой

$$A = \frac{\sigma^{3/2}\gamma'}{g\mu'^2 \sqrt{\gamma' - \gamma''}}$$

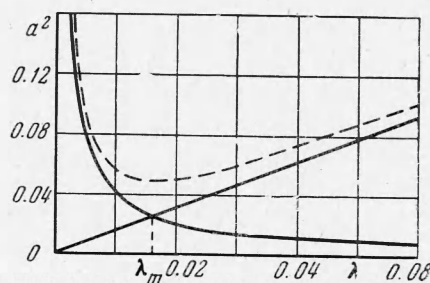
На фиг. 1 приведены экспериментальные данные, заимствованные из [8, 9], которые отражают зависимость скорости всплытия одиночных воздушных пузырей в воде при  $p = 9.8 \cdot 10^4$  н/м<sup>2</sup>. Видно, что характер этой зависимости действительно является сложным. Однако деление всего диапазона значений  $D$  на четыре характерных области нельзя считать естественным, отражающим реальное различие механизмов, определяющих скорость пузыря в данной среде. Искусственность определения размеров этих областей видна также и из конструкции рекомендуемых формул.

В данном сообщении в качестве универсальной зависимости, коррелирующей экспериментальные данные в третьей и четвертой областях, предлагается формула, полученная из предположения, что скорость всплытия пузырей тождественно равна фазовой скорости распространения в жидкости капиллярных волн длины  $\pi D$ . В корректности такого предположения легко убедиться из следующего.

Незначительная величина трения жидкости о газ при малых относительных скоростях движения обуславливает безотрывное обтекание всплывающих пузырей [10]. Этому же способствует эластичность межфазовой поверхности и малая «жесткость» больших пузырей, поскольку любое местное изменение давления вызывает соответствующее изменение формы. Вследствие этого можно предположить, что частицы жидкости, обтекающие пузырь, не вовлекаются в слутное движение, а, оставаясь на том же горизонте, совершают лишь колебания около положения равновесия. Известно, что



Фиг. 1. Зависимость скорости всплытия  $w''$  м/сек от диаметра пузыря  $D$  мм, при  $p = 9.8 \cdot 10^4$  н/м<sup>2</sup>, точки 1, 2, 3, 4 соответствуют работам [8, 9, 10].



Фиг. 2. Зависимость скоростей распространения капиллярных и гравитационных волн  $\alpha^2$  м/сек<sup>2</sup> от длины  $\lambda$  м

скорость колебательного движения и скорость распространения волнового возмущения связаны соотношением

$$v = \Delta p / \rho' a \quad (5)$$

Здесь  $\Delta p$  — избыточное давление в волне,  $\rho' a$  — волновое сопротивление ( $\rho'$  — плотность среды,  $a$  — скорость распространения волны).

Механическая энергия колебательной системы складывается из кинетической и потенциальной. Для системы без потерь характерны периодические переходы одного вида энергии в другой так, что в любой момент времени полная энергия колебательного движения единицы объема, согласно [11], равна

$$E = 1/2 \rho' v^2 \quad (6)$$

Носителем кинетической энергии является элемент массы, а потенциальной — упругий элемент. В рассматриваемой системе упругий элемент характеризуется коэффициентом поверхностного натяжения, величиной поверхности раздела. Поэтому очевидно, что

$$E = \sigma \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (7)$$

Горизонтальный размер пузыря  $r_1$  не играет большой роли, так как силы, действующие в этой плоскости, взаимно скомпенсированы (предполагается, что пузырь в плане имеет форму, близкую к кругу). Соотношение (7) можно переписать

$$E \approx \sigma / r_2 \quad (8)$$

Сравнивая (6) и (8), найдем, что колебательная скорость системы будет равна

$$v = \sqrt{2\sigma / r_2 \rho'} \quad (9)$$

Избыточное давление в рассматриваемой колебательной системе представляет собой лапласовскую добавку, в общем случае равную (7). Как показывают эксперименты, для относительно небольших пузырей ( $D \sim 10$  мм) величина  $r_1 = (1.15 \div 1.20) r_2$ . Поэтому с точностью до 15—20% можно принять

$$\Delta p = 2\sigma / r_2 \quad (10)$$

Как будет отмечено ниже, увеличение размеров пузыря приводит к снижению погрешности.

Положив  $r_2 \equiv r$  и подставив (9) и (10) в (5), получим соотношение для скорости распространения волнового возмущения в жидкости

$$a = \sqrt{2\sigma / r \rho'} \quad (11)$$

Величина  $r$  по порядку оценивается соотношением

$$r \sim \sqrt{\sigma / (\gamma' - \gamma'')}$$

Подставив это в соотношение (11), получим

$$a \approx \left( \frac{4g^2\sigma (\gamma' - \gamma'')}{\gamma'^2} \right)^{1/4} \quad (12)$$

Сравнивая (12) и (4), видим, что при  $\xi = 1$  скорости  $w$  и  $a$  равны, т. е. скорость распространения волны совпадает со скоростью всплытия пузыря. При каких условиях  $\xi = 1$  в (4) — ниже будет показано.

Таким образом, оказывается, что характер движения частиц жидкости при обтекании пузыря действительно подобен тому, который существует в случае волнового движения поверхности раздела двух несмешивающихся жидкостей, и что скорость движения объекта, производящего в жидкости возмущение, равна скорости распространения волны, образующейся при этом на поверхности раздела компонент.

Из теории поверхностных волн известно, что различаются два предельных типа волн — гравитационные и капиллярные, которые разделены некоторой промежуточной областью длин волн, где волновое движение носит смешанный характер. На фиг. 2 показаны графики изменения скорости движения гравитационных (прямая линия) и капиллярных (гиперболическая линия) волн в зависимости от их длины. Пунктирная линия представляет собой суммарный результат совместного влияния на скорость волны гравитационных и капиллярных сил. В общем случае (пунктирная кривая) фазовая скорость распространения волнового возмущения описывается уравнением [11]

$$a^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} \frac{\gamma' - \gamma''}{\gamma' + \gamma''} + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{g\sigma}{\gamma' + \gamma''} \quad (13)$$

где  $\lambda$  — длина волны.

Минимальная скорость движения волны соответствует некоторой длине волны, равной

$$\lambda_m = 2\pi \sqrt{\sigma / (\gamma' - \gamma'')} \quad (14)$$

Из сравнения экспериментального графика фиг. 1 с суммарной кривой фиг. 2 видно, что между ними существует, как и следует из приведенных выше рассуждений, не только качественная, но и количественная аналогия.

Следовательно, чтобы уравнение (13) стало пригодным для вычисления скорости всплытия пузыря, достаточно установить вид связи длины возбужденной волны  $\lambda$  с размерами возбуждающего ее пузыря. Выявленное нами тождество скоростей всплытия пузыря и распространения волны позволяют легко сделать это. Для этого предположим, что минимум скорости всплытия пузырей (фиг. 1) соответствует минимуму суммарной скорости распространения волн (фиг. 2).

Минимальная величина длины волны  $\lambda_m$  легко вычисляется по формуле (14). Для воды, например,  $\lambda_m = 17.1$  мм при  $20^\circ$  С. Из фиг. 1 видно, что  $D_m \approx 5.5$  мм. Следовательно

$$\lambda_m / D_m = \pi \quad (15)$$

Очевидно, что это соотношение должно выполняться для всех жидкостей.

Поскольку  $\lambda = \lambda_m$  есть частный случай из всей области возможных значений длин волн, для которых скорость движения определяется соотношением (13), то можно предположить, что формула (15) будет справедливой и для всего рассматриваемого диапазона длин волн, т. е.

$$\lambda = \pi D \quad (16)$$

Подстановка (16) в (13) дает

$$w = \left( \frac{gD}{2} \frac{\gamma' - \gamma''}{\gamma' + \gamma''} + \frac{2g\sigma}{D(\gamma' + \gamma'')} \right)^{1/2} \quad (17)$$

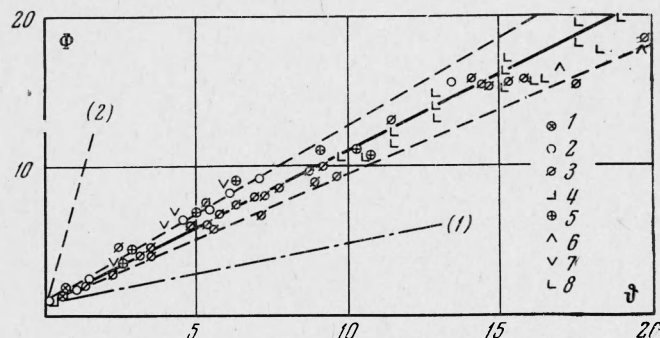
На фиг. 1 сплошная линия соответствует расчетным данным, полученным по уравнению (17). Видно, что это уравнение вполне удовлетворительно описывает экспериментальные данные в большом диапазоне изменения размеров пузырей ( $D \geq 1.5$  мм).

Подкоренное выражение соотношения (17) представляет собой сумму гравитационных (первое слагаемое) и капиллярных (второе слагаемое) сил. С увеличением  $D$  роль второго слагаемого уменьшается, поэтому величина погрешности, вносимая неточностью равенства (16), также снижается.

Интересно отметить, что при  $\lambda = \lambda_m$  формула (13) дает

$$w = \left( \frac{4g^2\sigma (\gamma' - \gamma'')}{(\gamma' + \gamma'')^2} \right)^{1/4} \quad (18)$$

которое при давлениях, близких к атмосферному, т. е. когда можно пренебречь величиной  $\gamma''$ , оказывается аналогичным соотношению (4), полученному Франк-Каменецким для вычисления скорости всплытия больших деформированных пузырей [7]. Следовательно, соотношение (4) является частным случаем более общего соотношения (17) и справедливо в весьма ограниченном диапазоне размеров пузырей, а именно в окрестности значения  $D = \lambda_m/\pi$  (в пределах  $4 \text{ мм} < D < 7 \text{ мм}$ ), где действительно скорость всплытия слабо зависит от величины пузыря. Только в этом случае в (4) коэффициент сопротивления может быть принят равным единице. Введение в (4) величины  $\xi$  следует рассматривать как вынужденную меру для учета действия неизвестных факторов, влияющих на величину скорости всплытия пузырей.



Фиг. 3 Сопоставление опытных данных в безразмерных величинах  $\Phi$  и  $v$  по движению в жидкости пузырей и капель согласно формулы 19. точки 1, 2, 3, 4 соответствуют данным работ [13, 6, 8, 15] для воды — воздуха; точки 5 — данным работы [8] для раствора сапонин — воздух, точки 6 — работы [8] для циклогексана, точки 7 — работы [1] для воды — водорода, точки 8 — работы [9] для воды — воздуха

Соотношение (17) получено для вычисления скорости всплытия пузырей. Однако в механизме всплытия пузырей и капель нет очевидных принципиальных различий и поэтому (17) должно быть справедливым и для случая движения капель в жидкости. Для наглядности сопоставления опытных данных по всплытию пузырей и капель формулой (17) придадим ей безразмерную форму и построим график функции

$$\Phi = \Phi(v) \left( \Phi = \frac{w^2 D (\gamma' + \gamma'')}{2g\sigma}, \quad v = \frac{D^2 (\gamma' - \gamma'')}{4\sigma} \right) \quad (19)$$

На фиг. 3 приведены экспериментальные и расчетные данные, полученные в координатах (19). Видно, что большинство опытных данных, полученных различными авторами для системы газ — жидкость, вполне удовлетворительно коррелируются с расчетом (сплошная линия). Исключением являются опытные данные Пиблза и Гарбера [12] (штрихпунктирная линия (1)), которые получены при движении пузырей в трубке с относительно малым диаметром (25 мм). Отклонение этих точек объясняется, по-видимому, влиянием твердых стенок на скорость распространения волнового возмущения. Здесь же нанесены опытные данные некоторых авторов [13] по движению капель жидкостей (пунктирная прямая (2)). Качественный характер зависимости сохраняется, но наблюдается значительное количественное расхождение. Действительные скорости движения капель оказываются более низкими, чем значение, получаемое по формуле (17). Несовпадение опытных данных зависимости  $w = f(D)$  для капель и пузырей объясняется, по-видимому, тем, что обтекание капель жидкостью не является безотрывным, и взаимодействием компонент на границе раздела в системе жидкость — жидкость пренебрегать нельзя. Наличие касательных напряжений на поверхности соприкосновения компонент приводит к необратимым потерям энергии, и капля движется медленнее.

Поступила 27 V 1968

#### ЛИТЕРАТУРА

1. R y b c z y n s k i M. W. O ruchy postepowym kuliciektej w ošrodku lepkim. Über die fortschreitende bewegung einer flüssigen kudel in einem sähen medium. Bull. Internat. Acad. Polon. Sci. et Lettr. Ser. A: Sci. Math., 1911, No. 1 A.
2. H a d a m a r d N. T. Mecanique mouvement permanent lent d'un sphere liquide et visqueuse dans in liquide visqueux. C. r. Acad., Sci., 1911, Vol. 152, No. 1.
3. Л е в и ч В. Г. Физико-химическая гидродинамика. Изд-во АН СССР, 1952.

