

РАСТЕКАНИЕ ЧАСТИЦ ПРИ РАЗГОНЕ И ВНЕДРЕНИИ

Э. И. Андрианкин, В. В. Батий

(Москва)

В работе на основе моделей вязкой несжимаемой и идеальной жидкостей, а также упругой среды рассмотрено разрушение сфероидальных частиц при одностороннем воздействии высокого давления, соответствующего условиям разгона или внедрения. При этом найдены поля давлений и скоростей, определены характерные углы растекания, размеры неразрушающихся компактных зон, даны оценки удельного импульса, приводящего к полному растеканию частиц и т. д.

Теоретическое решение получено методом разделения переменных по полиномам Лежандра с применением преобразования Лапласа (для нестационарной задачи). Проведенные в работе эксперименты согласуются с теорией.

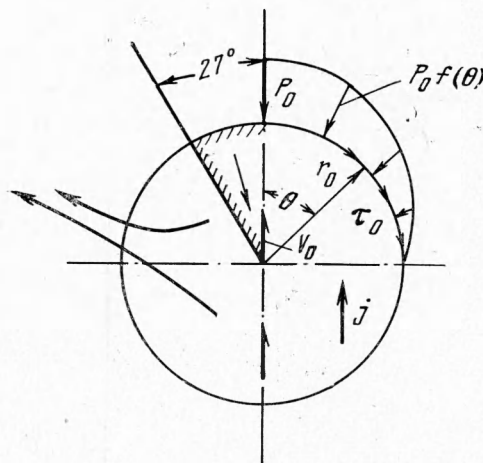
Исследования по разрушению твердых частиц при соударении с преградами и при разгоне были начаты в начале XIX века [1] и интенсивно ведутся в настоящее время [2-5].

На основании моделей вязкой несжимаемой и идеальной жидкостей, а также упругой среды в работе рассмотрено разрушение сфероидальных частиц при одностороннем воздействии высокого давления, соответствующего условиям разгона или внедрения. Эти вопросы представляют интерес для проблемы пробивания, так как от степени разрушения частицы

зависят параметры взаимодействия [5], а также максимальная скорость, которую можно получить при разгоне частицы. Проведенные эксперименты согласуются с теорией.

1. Квазистационарное растекание сферических частиц. Рассмотрим задачу о медленном квазистационарном растекании вязкой сферической частицы диаметром $d_0 = 2r_0$ под действием одностороннего давления (фиг. 1), соответствующего разгону или внедрению.

Считаем, что вещество частицы в условиях больших сжатий порядка 10^{11} бар ведет себя как вязкая несжимаемая жидкость. Этот подход развит в [2] при описании процесса внедрения кумулятивных



Фиг. 1

струй в металлы уравнениями гидродинамики несжимаемой жидкости. При таких давлениях сжимаемость металлов составляет несколько процентов, а вязкие напряжения $\mu_0 \partial V_z / \partial z$ ($\mu_0 = 10^5$ нз) превышают предел текучести σ_T [6-9], хотя число Рейнольдса остается малым ($Re = \rho_0 U r_0 / \mu_0 < 1$).

Для квазистатического рассмотрения необходимо, чтобы время торможения (разгона) t_0 было больше характерного волнового времени $t_w = d_0 / c_0$, а давление на частице должно изменяться плавно, не вызывая откола.

Пренебрегая в уравнениях гидродинамики квадратичными членами инерции и dV/dt , запишем их в виде

$$(1.1) \quad \text{grad } p = \rho \mathbf{j} + \mu_0 \Delta \mathbf{V}, \quad \text{div } \mathbf{V} = 0, \quad \mathbf{j} = -F/m_0 \\ m_0 = 4/3 \pi r_0^3 \rho_0$$

где F — главный вектор поверхностных сил.

В подвижной системе сферических координат, связанной с центром частицы, направим вектор сил инерции \mathbf{j} вдоль оси z против равнодействующей всех поверхностных сил.

Применяя к (1.1) операцию $\text{div } \mathbf{V} = 0$, получим для гидростатического давления уравнение Лапласа $\Delta p = 0$.

Граничными условиями для уравнений (1.1) служат условия равенства напряжений на поверхности шара

$$(1.2) \quad \sigma_{zz}(r_0, \theta) = -p + 2\mu_0 \partial V_r / \partial r = -P_0 f(\theta) \\ \sigma_{r\theta}(r_0, \theta) = \mu_0 (1/r \partial V_r / \partial \theta + \partial V_\theta / \partial r - V_\theta / r) = \tau_0 \Phi(\theta)$$

Решения должны удовлетворять уравнению неразрывности, так как после применения операции div к (1.1) для вывода уравнения $\Delta p = 0$ порядок системы повысился на единицу. Решение ищем методом разделения переменных

$$(1.3) \quad V_r = \sum_{n=0}^{\infty} \psi(r) P_n(\cos \theta), \quad V_\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(r) \partial P_n(\cos \theta) / \partial \theta \\ p = \sum_{n=0}^{\infty} N_n r^n P_n(\cos \theta)$$

Для функций $\psi(r)$ и $\varphi(r)$ получаем систему уравнений

$$r^{1-n} \psi_n'' + 2r^{-n} \psi_n' - [n(n+1) + 2] r^{-n-1} \psi_n + 2n(n+1) r^{-n-1} \psi_n = \\ = nN_n / \mu_0 \\ r^{1-n} \varphi_n'' + 2r^{-n} \varphi_n' - n(n+1) r^{-n-1} \varphi_n + 2r^{-n-1} \varphi_n = N_n / \mu_0$$

из решения которой определяем искомые функции, и находим выражения для поля скоростей и давлений

$$(1.4) \quad V_r = B_1 \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right] \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} r_0^{n+2} \left[A_n \left(\frac{r}{r_0} \right)^{n+1} + \right. \\ \left. + B_n \left(\frac{r}{r_0} \right)^{n-1} r_0^{-2} \right] P_n(\cos \theta) \\ V_\theta = -B_1 \left[1 - 2 \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right] \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} r_0^{n+2} \left[\frac{n+3}{n(n+1)} A_n \left(\frac{r}{r_0} \right)^{n+1} + \right. \\ \left. + \frac{1}{n} B_n \left(\frac{r}{r_0} \right)^{n-1} r_0^{-2} \right] \frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \theta} \\ p = A_0 + (10\mu_0 A_1 + \rho j) r \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2\mu_0(2n+3)}{n} A_n r^n P_n(\cos \theta)$$

Для определения постоянных A_n и B_n разлагаем внешнее давление $P_0 f(\theta)$ на интервале $(0, \pi)$ в ряд по полиномам Лежандра, а трение $\tau_0 \Phi(\theta)$ — по присоединенным полиномам

$$(1.5) \quad f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n(\cos \theta), \quad \Phi(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n \frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \theta}$$

$$f_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi/2} f(\theta) \sin \theta P_n(\cos \theta) d\theta$$

$$\Phi_n = \frac{2n+1}{2} \frac{(n-1)!}{(n+1)!} \int_0^{\pi/2} \Phi(\theta) \sin \theta \partial P_n(\cos \theta) / \partial \theta$$

При внедрении частиц в плотную среду силы поверхностного трения пропорциональны нормальному давлению $\tau = kP(r_0\theta)$. Для металлов k порядка нескольких процентов, так что в этом случае $\tau \ll P$. Рассмотрим часто встречающийся случай, в котором $\tau = 0$, а внешнее давление выражается формулой Ньютона $P(r_0, \theta) = \rho_1 V_0^2 f(\theta)$, где

$$(1.6) \quad f(\theta) = \begin{cases} \cos^2 \theta, & 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < \theta \leq \pi \end{cases}$$

Решение для скоростей и гидростатического давления принимает вид

$$(1.7) \quad V_r = \frac{P_0 r_0}{\mu_0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{u_n^r}{2[2n(n+2)+3]} \left[(n+1) \left(\frac{r}{r_0} \right)^{n+1} - \frac{n(n+2)}{n-1} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{r}{r_0} \right)^{n-1} \right] P_n(\cos \theta)$$

$$V_\theta = \frac{P_0 r_0}{\mu_0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n}{2[2n(n+2)+3]} \left[(n+3) \left(\frac{r}{r_0} \right)^{n+1} - \right. \\ \left. - \frac{n(n+2)}{n-1} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{n-1} \right] \frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \theta}$$

$$p = f_0 P_0 + f_1 P_0 \frac{r}{r_0} \cos \theta + P_0 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)(2n+3)}{2n(n+2)+3} f_n \left(\frac{r}{r_0} \right)^n P_n(\cos \theta)$$

Из (1.7) следует, что во внутренних областях скорости растекания уменьшаются, достигая нулевых значений в центре, хотя градиенты скоростей при $r \rightarrow 0$ увеличиваются. В большинстве областей частицы наблюдаются растекание ее материала наружу. Но со стороны приложенного давления в частице существует так называемая компактная головная зона с движением вещества внутрь. Эта область находится в переднем секторе с центральным углом, равным 54° (фиг. 1).

В процессе растекания частица деформируется.

Можно считать, что частица полностью разрушается, когда радиальные смещения

$$U_r = \int_0^t V_r dt$$

при $\theta = 0$ и π сомкнутся. Выражение для определения этих суммарных смещений находится из формул (1.7) и имеет вид

$$(1.8) \quad \Delta = \frac{(|U_r(r_0, 0)| + |U_r(r_0, \pi)|)}{r_0} = 0.18I / \mu_0,$$

$$I = \int_0^t P(r_0, 0, t) dt$$

Для $\Delta = 2$ найдем критическое значение удельного импульса $I_c = 12\mu_0$. Эксперименты показывают, что металлические частицы разру-

шаются при радиальной деформации $\Delta = 1$, значению которой из (1.8) соответствует величина критического импульса $I_c = 6\mu_0$.

Через I_c можно выразить максимальную скорость метаемой (или тормозящейся при внедрении) частицы, если условия взаимодействия $p_0 > \sigma_T$ приводят к вязкому течению

$$V_c = \frac{f_1 I_c}{\rho_0 r_0} = \frac{\mu_0}{\rho_0^{2/3}} \left(\frac{4\pi}{3m_0} \right)^{1/3} \xi, \quad \xi = 2.5 - 5, \quad f_1 = \frac{3}{8}$$

В процессе вязкого растекания частица сильно нагревается за счет внутреннего трения.

Будем считать, что время торможения (разгона) τ_0 много меньше характерного времени прогрева. Тогда диссипированная энергия в лагранжевых координатах сохраняется.

В системе координат, где центр неподвижен, при $r \rightarrow 0$, эйлеровы и лагранжевы координаты совпадают и вклад в температуру дают члены разложения (1.7) только при $n = 2$, т. е.

$$(1.9) \quad \rho_0 C_p \left. \frac{dT}{dt} \right|_{r \rightarrow 0} = \frac{192}{361} (f_2 P_0)^2 \mu_0(T), \quad f_2 = \frac{1}{3}$$

Из-за теплопроводности и зависимости вязкости от температуры разогрев падает, так что (1.9) дает верхнюю оценку температуры.

При одностороннем нагружении не все вещество частицы переходит в вязкопластическое состояние. Поэтому попытки получить точную картину напряженного состояния в частице наталкиваются на большие трудности, так как необходимо на неизвестной границе сопрячь решения, удовлетворяющие вязкопластическому и упругому состояниям вещества. Качественно напряженное состояние можно исследовать на примере точного решения упругой задачи, которое представляет также самостоятельный интерес, так как, например, хрупкие вещества разрушаются при малых деформациях, подчиняющихся еще закону Гука.

Общие методы решения уравнений теории упругости известны [10]. Однако случай односторонней нагрузки на сфере по формуле Ньютона представляет особый интерес, так как соответствует квазистационарному внедрению твердых частиц или их разгону в потоке плазмы. Эта задача рассматривалась независимо в работе [13] и авторами. Поэтому ограничимся только основными выводами теории.

Положив $\sigma_{rr}(r_0, \theta) = -P(r_0, \theta)$ и задавая граничные условия в виде (1.6), применяя к уравнениям теории упругости в перемещениях метод разделения переменных, получим искомые решения для компонент тензора напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -f_0 P_0 - f_1 P_0 \left(\frac{r}{r_0} \right) \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} H \left\{ [n(n-1) - 2(1+\eta)] \times \right. \\ &\times \left. \left(\frac{r}{r_0} \right)^n - \frac{n(n+1)^2 - 2n(1-\eta)}{n+1} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{n-2} \right\} P_n(\cos \theta) \\ \sigma_{\theta\theta} &= -f_0 P_0 - f_1 P_0 \left(\frac{r}{r_0} \right) \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} H \left\{ [n(1-4\eta) - 2(1+\eta)] \times \right. \\ &\times \left. \left(\frac{r}{r_0} \right)^n - \frac{n(n+1) - 2n(1-\eta)}{n^2-1} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{n-2} \right\} P_n(\cos \theta) + \\ &+ H \left\{ \frac{n+5-4\eta}{n+1} \left(\frac{r}{r_0} \right)^n - \frac{(n+1) - 2(1-\eta)}{n^2-1} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{n-2} \right\} \times \\ &\times \frac{\partial^2 P_n(\cos \theta)}{\partial \theta^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi} &= -f_0 P_0 - f_1 P_0 \left(\frac{r}{r_0}\right) \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} H \{ [n(1-4\eta) - 2(1+\eta)] \times \\ &\times \left(\frac{r}{r_0}\right)^n - \frac{n(n+1) + 2n(1-\eta)}{n^2-1} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-2} \} P_n(\cos \theta) + \\ &+ H \left\{ \frac{n+5-4\eta}{n+1} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n - \frac{(n+1) - 2(1-\eta)}{n^2-1} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-2} \right\} \times \\ &\times \frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta \\ \sigma_{r\theta} &= \left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \right] \sum_{n=2}^{\infty} H \frac{(n+1)^2 - 2(1-\eta)}{n+1} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \theta} \\ H &= \frac{(n+1) f_n P_0}{2n^2 + 2n(1+2\eta) + 2(1+\eta)} \end{aligned}$$

где η — коэффициент Пуассона.

Из рассмотрения напряженного состояния видно, что оно меняется по объему частицы и имеет особенности в каждой зоне. Для зоны $\theta = \pi/4$ характерны максимальные касательные напряжения, которые возникают вначале в центре и с ростом давления P_0 распространяются к периферии, приводя к сдвиговым деформациям. Вдоль радиуса $\theta = \pi\sigma_{\theta\theta} = 0$ и $\sigma_{\varphi\varphi} = 0$, поэтому в этой области наблюдается одномерное сжатие материала, обусловленное действием инерционных сил.

Зона $\theta = \pi/2$ содержит растягивающие напряжения $\sigma_{\varphi\varphi}$, которые являются определяющими при разрушении хрупких частиц.

В окрестности критической точки $\theta = 0$ имеет место всестороннее сжатие материала. Эта область является наиболее «прочной».

2. Нестационарное растекание сфероидальных частиц. Решения, полученные в п. 1, можно считать справедливыми по прошествии времени $t > t_0$, когда произведение чисел Струхала и Рейнольдса становится много меньшим единицы. Представляет интерес изучить характер выхода течения на этот квазистационарный режим в предположении о малости изменения за время t_0 контура частицы и малости Re .

Решение задачи справедливо для нестационарных граничных условий, когда приложенное к частице давление зависит от времени. Так как $Re \ll 1$ и $t_0 \gg r_0/c$, то уравнения движения в подвижной системе координат имеют вид

$$(2.1) \quad \rho_0 \partial \mathbf{V} / \partial t + \operatorname{grad} p = \mu_0 \Delta \mathbf{V} + \rho \mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad \mathbf{j} = \mathbf{F} / m_0$$

с граничными и начальными условиями

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{rr}(r_0, \theta, t) &= -P_0(t) f(\theta), \quad \sigma_{r\theta}(r_0, \theta, t) = 0 \\ V_r(r, \theta, 0) &= 0 \quad V_\theta(r, \theta, 0) = 0 \end{aligned}$$

Применяя к (2.1) и (2.2) преобразование Лапласа

$$(2.3) \quad \begin{aligned} U_r \rightarrow V_r, \quad \Pi_0 \rightarrow P_0(t), \quad \Pi \rightarrow p, \text{ получим} \\ \rho_0 S U + \operatorname{grad} \Pi = \mu_0 \Delta U + \rho \mathbf{j}, \quad \operatorname{div} U = 0, \quad \Delta \Pi = 0 \end{aligned}$$

$$(2.4) \quad -\Pi(r_0, \theta) + 2\mu_0 \left. \frac{\partial U_r}{\partial r} \right|_{r=r_0} = -\Pi_0(S) f(\theta)$$

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n(\cos \theta)$$

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} + \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r} \right) \Big|_{r=r_0} = 0, \quad u_r(r, \theta, 0) = 0 \quad u_\theta(r, \theta, 0) = 0$$

Переменные в уравнениях (2.3) разделяются по полиномам Лежандра

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \Pi &= K_0 + K_1 r \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} K_n r^n P_n(\cos \theta) \\ u_r &= \sum_{n=0}^{\infty} \psi(r) P_n(\cos \theta) \\ u_\theta &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(r) \frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \theta}, \quad \varphi_n = \frac{1}{n(n+1)} \left(r \frac{\partial \psi_n}{\partial r} + 2\psi_n \right) \end{aligned}$$

Подставляя (2.5) в (2.3), получим уравнения для определения ψ_n и φ_n . Решения ψ_n^0 и φ_n^0 соответствующих однородных уравнений имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_0^0 &= A_0 x^{-1/2} I_{1/2}(x), \quad \psi_n^0 = A_n x^{-1/2} I_\alpha(x) + B_n x^{-1/2} I_\beta(x) \\ \varphi_n^0 &= C_n x^{-1/2} I_\alpha(x) + D_n x^{-1/2} I_\beta(x), \quad x = r \sqrt{\rho_0 S / \mu_0} \\ C_n &= -\frac{A_n}{n+1}, \quad D_n = \frac{B_n}{n}, \quad \alpha = n + \frac{3}{2}, \quad \beta = n - \frac{1}{2} \\ n &\geq 1 \end{aligned}$$

Частные решения неоднородных уравнений будем искать в виде $\psi_n^* = n\varphi_n^*$.

Для φ_n^* получим уравнение

$$x^2 \frac{d^2 \varphi_n^*}{dx^2} + 2x \frac{d\varphi_n^*}{dx} - [x^2 + n(n-1)] \varphi_n^* = \frac{K_n}{\mu_0} \left(\frac{\rho_0 S}{\mu_0} \right)^{-(n+1)/2} x^{n+1}$$

набор ограниченных решений которого имеет вид

$$(2.6) \quad \varphi_n^* = R_n x^{-1/2} I_\beta(x) - \frac{K_n}{\mu_0} \left(\frac{\rho_0 S}{\mu_0} \right)^{-(n+1)/2} x^{n-1}$$

Выбираем константу

$$R_n = 2^\beta \Gamma(\beta + 1) \frac{K_n}{\mu_0} \left(\frac{\rho_0 S}{\mu_0} \right)^{-(n+1)/2}$$

так, чтобы при $x \rightarrow 0$ в разложении φ_n^* уничтожались главные члены, пропорциональные x^{n-1} , и частные решения (2.6) переходили в частные решения уравнений (1.4).

Константы A_n , B_n и K_n определяются подстановкой решений $\psi_n = \psi_n^0 + \psi_n^*$ и $\varphi_n = \varphi_n^0 + \varphi_n^*$ в граничные условия (2.4), откуда после преобразований с использованием рекуррентных соотношений для функций Бесселя находим

$$\begin{aligned} A_n &= -\frac{2n(n^2-1) \Pi_0 f_n r_0 x_0^{1/2}}{(2n+1) \mu_0 g_n} \\ B_n &= \frac{2n(n^2-1) \Pi_0 f_n r_0 x_0^{1/2}}{(2n+1) \mu_0 g_n} \left[1 - \frac{2^\beta \Gamma(\beta+1) \theta_n}{2(n^2-1) x_0^\beta} \right] \\ \theta_n &= 2(n^2-1) I_\beta + \frac{2n(n+2)+3}{2n+3} x_0 I_{\beta+1}(x_0) + \frac{2n(n+2)}{2n+3} x_0 I_{\beta+3}(x_0) \\ K_n &= \frac{\Pi_0 f_n x_0^{2\theta_n}}{(2n+1) g_n r_0^n} \\ g_n &= \{2(n-1)[2n(n+2)+3] + x_0^2(2n+1)\} I_\alpha(x_0) + \\ &+ [2(2n+1)(n-1) + x_0^2] x_0 I_{\alpha+1}(x_0) \\ & \quad n \geq 2 \\ A_0 &= A_1 = B_1 = K_1 = 0, \quad K_0 = \Pi_0 f_0 \end{aligned}$$

Решения для изображений имеют вид

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \Pi &= f_0 \Pi_0 + f_1 \Pi_0 \frac{r}{r_0} \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} K_n r^n P_n(\cos \theta) \\ U_r &= \sum_{n=2}^{\infty} A_n x^{-1/2} I_\alpha(x) + B_n x^{-1/2} I_\beta(x) + n K_n F(x) \\ U_\theta &= \sum_{n=2}^{\infty} -A_n / (n+1) x^{-1/2} I_\alpha(x) + (B_n / n) x^{-1/2} I_\beta(x) + K_n F(x) \\ F(x) &= \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\mu_1}{\rho_0 S} \right)^{(n+1)/2} [2^\beta \Gamma(\beta+1) x^{-1/2} I_{n-1/2}(x) - x^{n-1}] \end{aligned}$$

Используя разложения бesselевых функций в степенные ряды и оставляя только главные члены, можно проверить, что при $S \rightarrow 0$ выражения (2.6) переходят в решения (1.7) для квазистационарной задачи. Выражение $q_n(x)$ для $n \geq 2$ и $x > 0$ содержит только положительные члены, а $q_n(-x) = (-1)^n q_n(x)$ при $x < 0$. Поэтому действительных корней при $x < 0$ уравнение $q_n(x) = 0$ не имеет. Чисто мнимые корни $q_n(i\lambda_k)$ удобно искать, заменяя $I_\alpha(x) = i^{-\alpha} I_\alpha(\lambda)$, $\lambda = ix$, т. е. определять их из выражения

$$(2.8) \quad \{2(n-1)[2n(n+2)+3] - \lambda_{kn}^2(2n+1)\} I_\alpha(\lambda_{kn}) - \lambda_{kn} [2(2n+1)(n-1) - \lambda_{kn}^2] I_{\alpha+1}(\lambda_{kn}) = 0$$

Корни λ_{kn} не могут быть комплексными. Функции Бесселя I_α и $I_{\alpha+1}$ представляются в виде степенных рядов с действительными коэффициентами, поэтому если бы существовали комплексные корни λ и $\bar{\lambda}$ в уравнении (2.8), то они были бы попарно сопряжены. Используя (2.8) и рекуррентное соотношение $\lambda I_{\alpha+1} = \alpha I_\alpha - \lambda dI_\alpha/d\lambda$, при вычислении интеграла

$$(2.9) \quad 0 < \int_0^1 \xi I_\alpha(\lambda \xi) I_\alpha(\bar{\lambda} \xi) d\xi = \frac{|I_\alpha(\lambda)|^2 [3 - (n-1)(4n^2-1)]}{|2(n-1)(2n+1) - \lambda^2|^2}$$

приходим к противоречию, так как при $n \geq 2$ выражение в правой части (2.9) отрицательно, а интеграл всегда положителен. Это противоречие доказывает отсутствие комплексных корней в уравнении (2.8). Число действительных корней уравнения (2.8) бесконечно для каждого n . Скорость выхода на стационарный режим определяют корни, ближайšie к нулю. Расчеты по таблицам [11] показывают, что при $n = 2$ ближайšie к нулю корни $\lambda_{21} = 5.5$ и $\lambda_{22} = 8.8$ и поправка к стационарному режиму быстро затухает пропорционально

$$\exp[-(\mu_0 t / \rho_0 r_0^2) (5.5)^2]$$

Переходя в формулах (2.7) от изображения к оригиналу, получим точное решение нестационарной задачи с неподвижным контуром

$$(2.10) \quad \begin{aligned} p &= p_c + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \exp\left(-\frac{\mu_0}{\rho_0} \frac{\lambda_{kn}^2}{r_0^2} t\right) \left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos \theta) \\ C_k &= \frac{f_n \Pi_0 x_{0k}^{2n} q_n'(x_{0k})}{(2n+1) q_n'(x_{0k})}, \quad q_n' = \frac{dq_n(x_0)}{dS} \Big|_{S=S_k} \\ V_r &= V_{rc} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} [A_n(x_{0k}) x_k^{-1/2} I_\alpha(x_k) + B_n(x_{0k}) x_k^{-1/2} I_\beta(x_k) + \\ &+ n K_n(x_{0k}) F(x_k)] \frac{q_n(x_{0k})}{q_n'} \exp\left[-\frac{\mu_0}{\rho_0} \frac{\lambda_{kn}^2}{r_0^2} t\right] \end{aligned}$$

$$V_{\theta} = V_{\theta c} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{A_n(x_{0k})}{n+1} x_k^{-1/2} I_{\alpha}(x_k) + \frac{B_n(x_{0k})}{n} x_k^{-1/2} I_{\beta}(x_k) + K_n(x_{0k}) F(x_k) \right] \frac{q_n(x_{0k})}{q_n'} \exp \left[-\frac{\mu_0}{\rho_0} \frac{\lambda_{kn}^2}{r_0^2} t \right]$$

где индексом c отмечены давление и компоненты скорости в квазистационарном решении (1.7), соответствующие $S = 0$.

С ростом амплитуды давления скорость деформирования частицы становится столь большой, что число Re нельзя считать малым. В этом случае деформирование похоже на растекание капли идеальной жидкости. Если время действия внешнего давления мало, а амплитуда давления велика, то за короткое время частица приобретает конечный импульс. Поле скоростей в объеме частицы под действием удара возникает мгновенно и описывается уравнениями гидродинамического потенциала

$$(2.11) \quad \Delta \varphi = 0, \quad \mathbf{V} = \text{grad } \varphi$$

При растекании частицы ее форма меняется и при строгой постановке должна определяться в ходе решения задачи. Для качественной оценки можно считать, что в процессе растекания частица превращается в сплюснутый эллипсоид вращения с переменным во времени эксцентриситетом. Рассмотрим задачу в системе эллипсоидальных координат α, β, γ , принимая схему нагружения прежней (фиг. 1) и учитывая распределение импульса $I(\beta)$ на поверхности эллипсоида в соответствии с законом сопротивления Ньютона

$$I_{\alpha} = I_0 \text{ch}^2 \alpha_0 \cos^2 \beta / (\text{ch}^2 \alpha_0 - \sin^2 \beta), \quad 0 \leq \beta \leq \pi/2$$

Решение уравнения Лапласа для внутренней эллипсоидальной области при граничном условии $\varphi|_{\alpha=\alpha_0} = -I_0 f(\beta)/\rho_0$ имеет вид

$$\varphi = -\frac{I_0}{\rho_0} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{P_n(i \text{sh } \alpha)}{P_n(i \text{sh } \alpha_0)} P_n(\cos \beta)$$

поэтому для компонент скорости получим формулы

$$(2.12) \quad V_{\alpha} = -\frac{I_0}{\rho_0 h c} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{P_n(i \text{sh } \alpha)}{P_n(i \text{sh } \alpha_0)} \frac{\partial P_n(i \text{sh } \alpha)}{\partial \alpha} P_n(\cos \beta)$$

$$V_{\beta} = -\frac{I_0}{\rho_0 h c} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{P_n(i \text{sh } \alpha)}{P_n(i \text{sh } \alpha_0)} \frac{\partial P_n(\cos \beta)}{\partial \beta}$$

$$h = (\text{ch}^2 \alpha_0 - \sin^2 \beta)^{1/2}, \quad \text{sh } \alpha_0 = b/c, \quad \text{ch } \alpha_0 = a/c$$

где c — фокусное расстояние, a и b — большая и малая полуоси эллипсоида.

Из анализа (2.12) следует, что с ростом отношения a/b , нормальная скорость деформации контура при $\beta = \pi/2$ уменьшается, а касательная остается постоянной. Если $a \rightarrow r_1$, $b \rightarrow r_1$, $c \rightarrow 0$, то эллипсоид превращается в сферу. Начальное поле скоростей при этом будет

$$(2.13) \quad V_r = \frac{I_0}{\rho r_1} \sum_{n=1}^{\infty} n f_n \left(\frac{r}{r_1} \right)^{n-1} P_n(\cos \theta)$$

$$V_{\theta} = \frac{I_0}{\rho r_1} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \left(\frac{r}{r_1} \right)^{n-1} \frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \theta}$$

Анализ (2.13) показывает, что при импульсивном воздействии основная масса вещества частицы растекается наружу за исключением тыльной компактной зоны, лежащей в секторе $\theta = 160\text{--}200^\circ$, которая под действием инерционных сил вдавливается в частицу.



Фиг. 2

Аналогично исследуется растекание сферических частиц, состоящих из ядра с плотностью ρ_2 и радиусом r_2 и оболочки с плотностью ρ_1 и внешним радиусом r_1 . Решение для потенциалов в ядре φ_2 и оболочке имеет вид

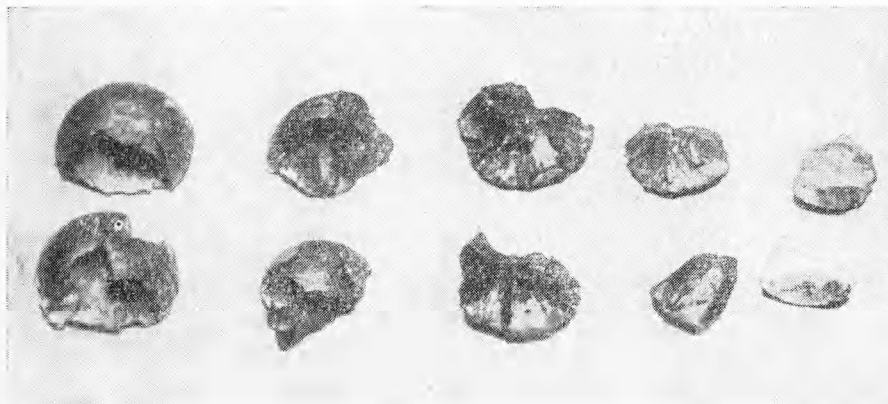
$$(2.14) \quad \varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n-1}) P_n(\cos \theta),$$

$$\varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} D_n r^n P_n(\cos \theta)$$

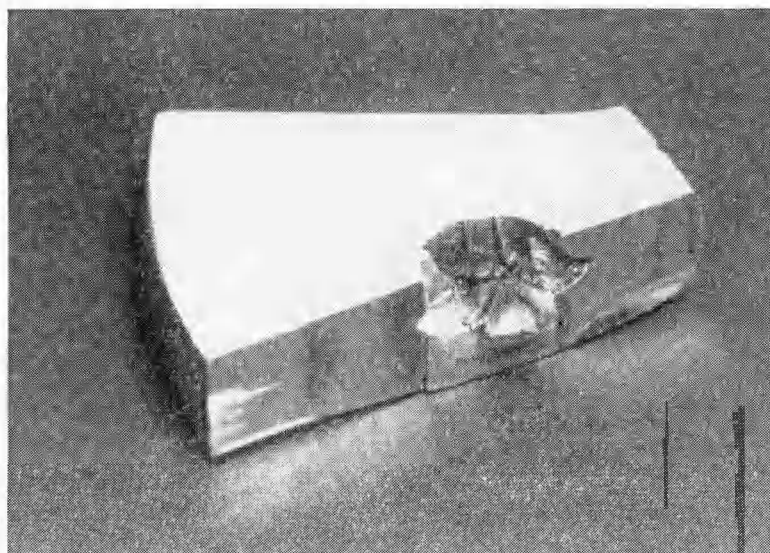
Для определения констант A_n , B_n и D_n кроме условий на внешнем контуре $\varphi_1(r_1, \theta) = -I_0 f(\theta)/\rho_1$ в задаче следует использовать условия равенства при $r = r_2$ скоростей $(\partial\varphi_1/\partial r)_{r=r_2} = (\partial\varphi_2/\partial r)_{r=r_2}$ и импульсов $\rho_1\varphi_1(r_2) = \rho_2\varphi_2(r_2)$. При $\rho_2 = 0$ (2.14) дает решение задачи о растекании полых частиц.

3. Экспериментальные результаты. Эксперименты проводились с использованием баллистической установки, которая позволяла метать

стальные шарики диаметром 9—15 мм (вес 3—13 г) со скоростями до 2.5 км/сек. В первой серии опытов рассматривались квазистатические режимы нагружения частиц, для чего они тормозились в алюминиевых блоках, толщина которых во много раз превышала диаметр частиц. Рассмат-



Фиг. 3

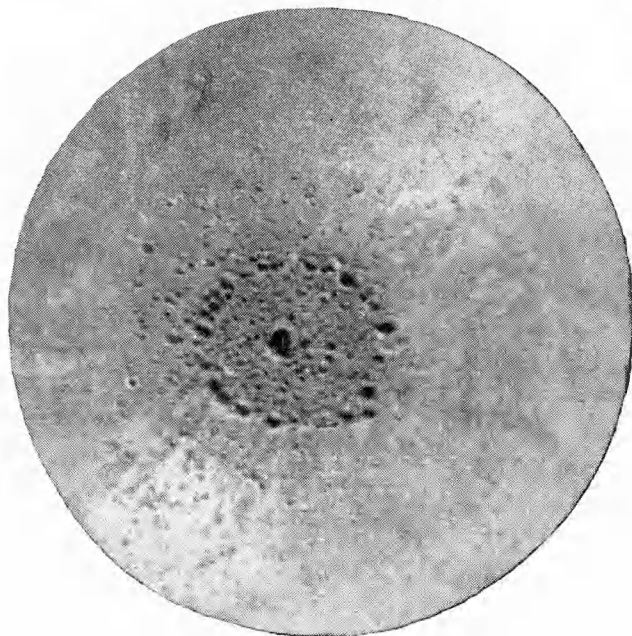


Фиг. 4

ривались отожженные и закаленные частицы, т. е. вязкие и хрупкие. В каждом эксперименте шарики после внедрения извлекались из блоков и исследовался механизм их разрушения. Фотографии закаленных шариков со стороны тыльных поверхностей приведены на фиг. 2, а. Из фотографий видно, что основным видом разрушений в этом случае являются разрывы за счет растягивающих напряжений $\sigma_{\text{рт}}$, возникающих в «экваториальной» области шарика.

Радиальные трещины отчетливо выражены у эллипсоидальных частиц (фиг. 2, б), где они занимают относительно большой объем в сравнении

со сферической частицей. Следующая серия экспериментов проводилась с отожженными (вязкими) частицами, основным механизмом разрушения которых является сдвиговый механизм. Эти эксперименты подтверждают наличие головной компактной зоны, которая сохраняет свою целостность при разрушении частицы (фиг. 3). Компактные зоны имеют вид конусов с углом при вершине $\sim 90^\circ$. Остальная часть вещества сфероидов скользит по образующим этого конуса, разлетаясь наружу в соответствии с теорией вязкого растекания и теорией упругости.



Фиг. 5

На фиг. 4 приведена фотография кратера в разрезе, образованного в толстой алюминиевой преграде при скорости шарика $V = 2 \cdot 10^5$ см/сек. В центре кратера имеется возвышение, образованное неразрушившейся головной компактной зоной частицы. Кратер похож на лунные цирки, дополняя, таким образом, гипотезу [12] о возможном механизме их образования.

Для оценки углов разлета вторичных частиц, образующихся при разрушении основной частицы, использовались свинцовые шарики, которые в указанном диапазоне скоростей полностью разрушались. Их поведение хорошо описывается моделями вязкой и идеальной жидкостей. Преграда имела толщину $h/d_0 = 0.6$.

С ростом скорости, угол разлета вторичных частиц растет, стремясь к конечному значению, в соответствии с результатом теории. На фиг. 5 приведена фотография блока, расположенного на некотором расстоянии от тонкой ($h/d_0 = 0.5$) преграды, пробиваемой при скорости $V_0 = 5$ км/сек, на которой виден «кольцевой» разлет вторичных частиц, обусловленный, как это следует из теории, интенсивным перемещением материала частицы в ее периферийные области.

Авторы благодарны Г. С. Шапиро за обсуждения результатов работы.

Поступила 26 III 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Helie F.* Traite de balistique expérimentale. Paris Gautier — Villars, 1840, pp. 1884.
2. *Лаврентьев М. А.* Кумулятивный заряд и принципы его работы. Усп. матем. н., 1957, т. 12, вып. 4, стр. 76.
3. *Беляков Л. В., Витман Ф. Ф., Златин Н. А.* О процессе соударения деформируемых тел и его моделировании, II. Ж. техн. физ., 1963, т. 33, вып. 8, стр. 990.
4. *Титов В. М., Фадеев Ю. И., Титова Н. С.* Разгон твердых частиц кумулятивным взрывом. Докл. АН СССР, 1968, т. 180, № 5, стр. 1051.
5. *Андрианкин Э. И.* О пробивании преград метеоритами. Космические исследования, 1966, т. 4, вып. 2, стр. 280.
6. *Ильюшин А. А.* Деформация вязко-пластичного тела. Уч. зап. МГУ, Механика, 1940, вып. 39.
7. *Сахаров А. Д., Зайдель Р. М., Минеев В. Н., Олейник А. Г.* Экспериментальное исследование устойчивости ударных волн и механических свойств вещества при высоких давлениях и температурах. Докл. АН СССР, 1964, т. 159, № 5.
8. *Годунов С. К., Дерибас А. А., Захаренко И. Д., Мали В. И.* Исследование вязкости металлов при высокоскоростных соударениях. Физика горения и взрыва 1971, т. 7, № 1.
9. *Альтшулер Л. В., Бражник М. И., Телегин Г. С.* Прочность и упругость железа и меди при высоких давлениях ударного сжатия. ПМТФ, 1971, № 6.
10. *Лурье А. И.* Теория упругости. М., «Наука», 1970.
11. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. М., Изд-во иностр. лит., 1949, т. 2.
12. *Станюкович К. П.* Об образовании метеоритных кратеров. Астрон. ж., 1937, т. 14, № 3.
13. *Лобанов В. Ф., Фадеев Ю. И.* Расчет напряжений в упругом шаре, обтекаемом гиперзвуковым потоком. В сб. «Динамика сплошной среды», № 7. Новосибирск, 1971.