УДК 534.222.2

ГРАДИЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ НА ФРОНТЕ УДАРНЫХ И ДЕТОНАЦИОННЫХ ВОЛН

Е. С. Прохоров

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, prokh@hydro.nsc.ru

При использовании естественного предположения к форме записи калорического уравнения состояния (внутренней энергии) среды для одномерного движения получены так называемые градиентные соотношения, устанавливающие однозначное соответствие между первыми частными пространственными производными давления, плотности, массовой скорости (градиентами параметров) на фронте ударных и детонационных волн и производной по времени (ускорением) самого фронта. Предположение основано на том, что с учетом термического уравнения состояния полную внутреннюю энергию, включающую в себя кроме термодинамической части и потенциальную химическую энергию, можно представить в виде функции давления и плотности. Это имеет место как для инертных сред, так и для продуктов реакции в состоянии химического равновесия.

Ключевые слова: ударная волна, детонационная волна, градиенты параметров, ускорение фронта.

Соотношения на сильном разрыве, которые часто называют законами сохранения массы, импульса и энергии на ударном фронте, хорошо известны [1, 2]. С учетом теплового эффекта химических реакций эти законы сохранения применимы и для детонационного фронта (сильного разрыва с тепловыделением) [3, 4]. Если движение среды за фронтом описывается гладким одномерным решением, а параметры перед фронтом постоянны, то можно установить однозначное соответствие между частной пространственной производной (градиентом) любого параметра и производной по времени скорости (ускорением) фронта. Для одномерного адиабатического течения совершенного газа такие градиентные соотношения на фронте ударной волны приведены в работах [5, 6]. Эти соотношения можно использовать при построении численных и аналитических приближенных методов решения газодинамических задач и для установления асимптотических законов затухания ударных волн [7, 8]. Здесь уместно также отметить близкую по тематике работу [9], где получены пространственные производные газодинамических функций за искривленной стационарной ударной волной, на которую набегает равномерный сверхзвуковой поток. Эти результаты получили дальнейшее развитие в работе [10], в которой изучалось поведение вектора вихря скорости за поверхностями сильных разрывов. Однако в отмеченных работах [9, 10] не учитывалось влияние ускорения фронта на градиенты параметров.

Область применимости градиентных соотношений на ударном фронте, представленных в [5, 6], в значительной мере ограничена условиями модели совершенного газа [11], которая для многоатомного газа и смесей различных химически инертных газов приближенно верна лишь в узком интервале температур. Поэтому полученные ранее градиентные соотношения не могут быть использованы для таких важных в практическом отношении случаев, как: 1) движение газа за сильными ударными волнами, когда возможны возбуждение дополнительных степеней свободы и диссоциация молекул; 2) равновесные течения реагирующих газов за фронтом детонации, распространяющейся в химически активной среде.

В связи с этим в настоящей работе при естественном предположении к виду калорического уравнения состояния среды получены более универсальные градиентные соотношения на фронте ударных и детонационных волн. Предположение основано на том, что с учетом термического уравнения состояния полную внутреннюю энергию $U = U_{th} + U_{ch}$, включа-

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00347) и фонда Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (НШ-1886.2008.1).

ющую в себя кроме термодинамической части U_{th} также и потенциальную химическую энергию U_{ch}, можно представить в виде функции давления p и плотности ρ: $U = U(p,\rho)$. Такая зависимость справедлива как для инертных сред, так и для продуктов реакции в состоянии химического равновесия (см., например, [12, 13]). При такой форме записи внутренней энергии, а также с учетом уравнения первого начала термодинамики $dU = TdS - pd(1/\rho)$, где S — энтропия, равновесная скорость звука c в среде определяется из соотношения

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S = \left(\frac{p}{\rho^2} - U_\rho\right)\Big/ U_p,$$
$$U_p = \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_\rho, \quad U_\rho = \left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_p. \tag{1}$$

При выводе искомых соотношений будем использовать следующие дополнительные предположения. Пусть в одномерном приближении ударная или детонационная волна с мгновенной химической реакцией за фронтом движется по сплошной (в общем случае химически активной) среде с заданными газодинамическими параметрами. Условие о мгновенности химической реакции означает, что за фронтом реализуется равновесное течение продуктов реакции.

Законы сохранения массы, импульса и энергии на фронте имеют вид:

$$\rho_*(D-u_*) = \rho_0(D-u_0),$$
$$p_* + \rho_*(D-u_*)^2 = p_0 + \rho_0(D-u_0)^2, \tag{2}$$
$$U(p_*,\rho_*) + \frac{p_*}{\rho_*} + \frac{(D-u_*)^2}{2} = U_0 + \frac{p_0}{\rho_0} + \frac{(D-u_0)^2}{2}.$$

Здесь D — скорость фронта, u — массовая скорость; индексами 0 и $*$ обозначены параметры перед фронтом (в исходном состоянии) и на фронте волны соответственно. Полагаем, что $U = U(p,\rho)$ — известная, в общем виде неявная функция. Отметим, что при детонации из-за необратимости химической реакции $U_0 \neq U(p_0,\rho_0)$.

Дифференцируя (2) по D, с учетом (1) получим систему трех алгебраических уравнений относительно производных $\frac{d\rho_*}{dD}$, $\frac{du_*}{dD}$, $\frac{dp_*}{dD}$, решая которую находим:

$$\frac{d\rho_*}{dD} = \frac{\rho_*-\rho_0}{D-u_0}\frac{\rho_*}{\rho_0}A, \quad \frac{du_*}{dD} = \frac{u_*-u_0}{D-u_0}(A+1),$$
$$\frac{dp_*}{dD} = \frac{p_*-p_0}{D-u_0}(A+2), \tag{3}$$
$$A = \frac{2 + (1/\rho_* - 1/\rho_0)/(U_p)_*}{(1/\mathrm{M}_*)^2 - 1},$$

где $\mathrm{M}_* = (D-u_*)/c_*$ — число Маха относительного потока на фронте волны. Соотношения (3) можно записать в более компактной форме:

$$\frac{d\ln(\rho_*-\rho_0)}{d\ln \mathrm{M}_0} = \frac{\rho_*}{\rho_0}A, \quad \frac{d\ln(u_*-u_0)}{d\ln \mathrm{M}_0} = A+1,$$
$$\frac{d\ln(p_*-p_0)}{d\ln \mathrm{M}_0} = A+2,$$

где $\mathrm{M}_0 = (D-u_0)/c_0$ — число Маха относительного потока перед фронтом.

В работах [2, 4] показано, что если сплошная среда обладает «нормальными» [14] термодинамическими свойствами, то для ударных и детонационных волн выполняются естественные неравенства:

$$p_* > p_0, \ \rho_* > \rho_0, \ u_* > u_0, \ \mathrm{M}_0 > 1, \ \mathrm{M}_* < 1. \tag{4}$$

Из общих соображений также следует, что безразмерная величина A в формулах (3) всегда положительна ($A > 0$), поскольку только в этом случае плотность ρ_* будет возрастать с увеличением скорости фронта ($\frac{d\rho_*}{dD} > 0$). В частности, для совершенного газа $A = 2/(\mathrm{M}_0^2 - 1)$.

Далее для получения искомых градиентных соотношений воспользуемся методом, описанным в [5, 6]. Так, для одномерных неустановившихся движений газа полные производные параметров на фронте $\boldsymbol{y}_*$ по времени t связаны с первыми частными производными аналогичных параметров на фронте по t и координате r следующим образом:

$$\frac{d\boldsymbol{y}_*}{dt} = \frac{d\boldsymbol{y}_*}{dD}\frac{dD}{dt} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial t}\right)_* + D\left(\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial r}\right)_*, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{y} = \{\rho, u, p\}$.

Из уравнений нестационарной газовой динамики [15], описывающих адиабатические плоские движения ($N = 0$), а также движения с осевой ($N = 1$) и центральной ($N = 2$) симметрией, с помощью (5) можно исключить частные производные $\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial t}\right)_*$. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial r}\right)_*$. Решая эту систему с учетом (3), найдем искомые градиентные соотношения на фронте:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right)_* = \frac{1}{\mathrm{M}_*^2 - 1} \times \\
&\quad \times \left\{ \left[3(A+1) - \frac{A}{\mathrm{M}_*^2}\right] \frac{\rho_* - \rho_0}{c_*^2} \frac{dD}{dt} + \frac{\mathrm{M}_* m_*}{c_*} \right\}, \\
&\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_* = \frac{1}{\mathrm{M}_*^2 - 1} \times \\
&\quad \times \left\{ \frac{\rho_0}{\rho_*}(2A+3) \frac{u_* - u_0}{c_*^2} \frac{dD}{dt} + \frac{m_*}{\rho_*} \right\}, \\
&\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_* = \frac{1}{\mathrm{M}_*^2 - 1} \times \\
&\times \left\{ \frac{\rho_0}{\rho_*} \left[A + 2 + \frac{(A+1)}{\mathrm{M}_*^2}\right] \frac{p_* - p_0}{c_*^2} \frac{dD}{dt} + \mathrm{M}_* c_* m_* \right\},
\end{aligned} \qquad (6)$$

где $m_* = \rho_* u_* N / r_*$.

По-видимому, система (6) является наиболее компактной формой записи градиентных соотношений на фронте ударных и детонационных волн. При попытке преобразовать их с помощью соотношений (2) они становятся более громоздкими и теряют наглядность. Для большинства практически важных случаев, когда справедливы неравенства (4), можно показать, что коэффициенты пропорциональности, стоящие перед производной $\dfrac{dD}{dt}$, отрицательны.

В заключение отметим, что кроме практической значимости, указанной в [7, 8], полученные в работе градиентные соотношения могут найти применение в инженерных расчетах для оценки значений производных $\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial r}\right)_*$ по изменению скорости фронта ударной или детонационной волны, фиксируемому в эксперименте. Также они могут быть использованы при конструировании разностных схем численных алгоритмов вблизи подвижной границы типа ударный (детонационный) фронт.

Итак, при естественном предположении к форме записи калорического уравнения состояния (внутренней энергии) среды получены более универсальные, по сравнению с ранее известными, градиентные соотношения для ударных и детонационных фронтов, что позволяет расширить область их возможных применений в приложениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Курант Г., Фридрихс К.** Сверхзвуковое течение и ударные волны. — М.: Изд-во иностр. лит., 1950.
2. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теоретическая физика: Гидродинамика. — М.: Наука, 1986.
3. **Зельдович Я. Б.** Теория горения и детонации газов. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1944.
4. **Митрофанов В. В.** Детонация гомогенных и гетерогенных систем. — Новосибирск: Изд-во ИГиЛ СО РАН, 2003.
5. **Cassen G., Stanton J.** The decay of shock waves // J. Appl. Phys. — 1948. — V. 19, N 9. — P. 803–807.
6. **Седов Л. И.** К общей теории одномерных движений газа // Докл. АН СССР. — 1952. — Т. 85, № 4. — С. 723–726.
7. **Седов Л. И.** Методы подобия и размерности в механике. — М.: Наука, 1963.
8. **Васильев А. А., Николаев Ю. А.** Модель ячейки многофронтовой газовой детонации // Физика горения и взрыва. — 1976. — Т. 12, № 5. — С. 744–754.
9. **Русанов В. В.** Производные газодинамических функций за искривленной ударной волной. — М., 1973. — (Препр. / АН СССР. Ин-т прикл. математики; № 18).
10. **Левин В. А., Скопина Г. А.** Поведение вектора вихря скорости в сверхзвуковых потоках за поверхностями разрывов // Теплофизика и аэромеханика. — 2007. — Т. 13, № 3. — С. 381–389.
11. **Румер Ю. Б., Рывкин М. Ш.** Термодинамика, статистическая физика и кинетика. — М.: Наука, 1977.
12. **Николаев Ю. А., Фомин П. А.** О расчете равновесных течений химически реагирующих газов // Физика горения и взрыва. — 1982. — Т. 18, № 1. — С. 66–72.
13. **Прохоров Е. С.** Приближенная модель для расчета равновесных течений химически реагирующих газов // Физика горения и взрыва. — 1996. — Т. 32, № 3. — С. 77–85.
14. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. — М.: Наука, 1981.
15. **Станюкович К. П.** Неустановившиеся движения сплошной среды. — М.: Наука, 1971.

Поступила в редакцию 8/VII 2008 г.,
в окончательном варианте — 16/III 2009 г.