

ОБ ОДНОМ ИНВАРИАНТНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Ю. П. Савельев

(Ленинград)

Рассматривается задача о групповом расслоении системы уравнений, описывающей движение в ламинарном подслое и турбулентном ядре. Построена основная группа, допускаемая исходной системой; инвариантные решения, построенные на одной из подгрупп, приводят к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Сращивание решений и взаимное переключение уравнений происходит на границе ламинарного подслоя.

Исследован класс степенных течений турбулентного пограничного слоя. В области замедленного движения обнаружена двужначность решения, соответствующая присоединившемуся или отделенному потоку. Вычислены и представлены в виде интерполяционного многочлена обычно употребляемые интегральные характеристики.

При расчете турбулентных пограничных слоев методом интегральных соотношений возникает проблема выбора семейства профилей скорости с одним или более независимым параметром для определения интегральных толщин (δ^* , δ^{**} и т. д.). Следует отметить, что до сих пор отсутствует достаточно рациональный метод, учитывающий все разнообразие форм профилей, возникающих в сечениях турбулентного пограничного слоя при переменном поле статического давления. Ниже излагается один из возможных методов установления семейства профилей скорости для турбулентного пограничного слоя, основанный на использовании полуэмпирической теории турбулентности с привлечением обычно употребляемых универсальных констант.

Используем двухслойную схему расчета турбулентного пограничного слоя, согласно которой в ламинарном подслое движение описывается уравнениями вида

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

а в турбулентном ядре —

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\varepsilon}{\rho} \frac{\partial v_x}{\partial y} \right),$$

где $\varepsilon = \rho l^2 \left| \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|$ является коэффициентом турбулентной вязкости; l — длина перемешивания по Прандтлю, для простоты принимается $l = ky$ по всей толщине пограничного слоя, где k — константа турбулентности. В дальнейшем обозначается

$$u = \frac{v_x}{u_\infty}; \quad s = \text{Re}_x; \quad \text{Re}_x = \frac{\rho u_\infty x}{\mu}; \quad \psi = \int u \bar{y} dy;$$

u_∞ — характерная скорость; $\bar{y} = \text{Re}_y$.

Вводя в рассмотрение функцию тока ψ и переходя к новым переменным s, ψ , получим уравнения:

в ламинарном подслое

$$(1) \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \sqrt{U_e^2 - z} \frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2},$$

в турбулентном ядре

$$(2) \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{k^2}{2} \sqrt{U_e^2 - z} \frac{\partial}{\partial \psi} \left\{ \bar{y}^2 \left| \frac{\partial z}{\partial \psi} \right| \frac{\partial z}{\partial \psi} \right\},$$

где $U_e^2 - u^2 = z$ — дефект скорости, а U_e — внешнее невязкое поле течения, причем для общности можно положить $U_e^2 = u_e^2(s) + 2\omega\psi$, где ω представляет отношение завихренности во внешнем потоке к средней завихренности в турбулентном пограничном слое.

Установление подходящего семейства профилей скорости состоит в совместном решении уравнений (1), (2) при граничных условиях, зависящих от вида рассматриваемой задачи.

Применим для решения сформулированной задачи метод группового расслоения уравнений (1), (2). Этот метод, использующий фундаментальные понятия теории групповых свойств дифференциальных уравнений, в настоящее время получает все большее распространение благодаря циклу работ Л. В. Овсянникова, указавшего алгоритмы построения групп Ли (допускаемых рассматриваемой системой) и возможность использования этих групп для нахождения различных классов частных решений исходной системы [1-3].

Решение уравнения Прандтля — Мизеса (4) для чисто ламинарного течения методом симметричных решений в области $P\{s > 0, 0 \leq \psi \leq \infty\}$ выполнено в работе [4], где основная группа, допускаемая уравнением (1), имеет алгебру Ли операторов со следующим базисом:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial s}; & X_2 &= \frac{\partial}{\partial \psi}; \\ X_3 &= s \frac{\partial}{\partial s} + \frac{m+1}{2} \psi \frac{\partial}{\partial \psi} + 2mz \frac{\partial}{\partial z} + \\ &+ \frac{3m-1}{2} w \frac{\partial}{\partial w} \end{aligned}$$

при ограничениях вида

$$u_e^2 = \beta s^{2m}; \quad \omega = \omega_0 s^{\frac{3m-1}{2}}.$$

Инвариантные решения, построенные на подгруппе, соответствующей оператору X_3 и отыскиваемые в виде

$$\eta = \psi s^{\frac{m+1}{2}}, \quad z = Z(\eta) s^{2m},$$

приводят к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(3) \quad \sqrt{\beta + 2\omega_0 \eta - Z} \cdot Z'' + \frac{m+1}{2} \eta Z' = 2mZ$$

(штрих — производная по η).

В данном исследовании для описания течения в ламинарном подслое использовалось уравнение (3), а отыскание инвариантных решений для уравнения (2) или эквивалентной ему системы Q , описывающей течение в турбулентном ядре

$$\frac{\partial z}{\partial \psi} = w; \quad \frac{\partial \bar{y}}{\partial \psi} = (U_e^2 - z)^{-\frac{1}{2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \pm k^2 \left(\bar{y} w^2 + \bar{y}^2 w \sqrt{U_e^2 - z} \frac{\partial w}{\partial \psi} \right),$$

здесь проводилось согласно рекомендациям работы [1]. Было получено, что основная группа, допускаемая системой Q , описывается алгеброй Ли операторов

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial s}; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial \psi};$$

$$X_3 = s \frac{\partial}{\partial s} + (m+1) \psi \frac{\partial}{\partial \psi} + 2mz \frac{\partial}{\partial z} + (m-1) w \frac{\partial}{\partial w} + \bar{y} \frac{\partial}{\partial \bar{y}}.$$

Инвариантные решения, построенные на подгруппе с оператором X_3 , отыскивались в виде

$$\eta_1 = \psi s^{-(m+1)}; \quad z = Z_1(\eta_1) s^{2m}; \quad \bar{y} = Y(\eta_1) s; \quad w = W(\eta_1) s^{m-1},$$

что приводило после подстановки в Q к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(4) \quad \pm k^2 Y \sqrt{\beta + 2\omega_0 \eta_1 - Z_1} \{ Y' Z_1' + Y Z_1' Z_1'' \} +$$

$$+ (m+1) \eta_1 Z_1' = 2m Z_1;$$

$$(5) \quad Y' = \frac{1}{\sqrt{\beta + 2\omega_0 \eta_1 - Z_1}}.$$

Для получения семейства профилей скорости, зависящих от параметра, необходимо совместно проинтегрировать уравнения (3), (4), (5) при соответствующих граничных условиях. Например, для пристеночных задач могут быть использованы условия вида $Z(0) = \beta$; $Z_1(\infty) = 0$; $Y(0) = 0$. Взаимное переключение уравнений при использовании двухслойной схемы осуществляется на границе ламинарного подслоя; при этом предполагается [5], что при переходе через границу подслоя терпят разрыв производные от скорости $\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=\delta_{л-0}} = k_1 \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=\delta_{л+0}}$, а сами физические величины (скорость, напряжение трения) являются непрерывными. Используя последние соображения, запишем уравнения срачивания на границе ламинарного подслоя (характерные величины обозначены индексом *): физические условия

$$(6) \quad (v_x)_{\delta_{л-0}} = (v_x)_{\delta_{л+0}}, \quad \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{\delta_{л-0}} = k_1 \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{\delta_{л+0}},$$

$$\delta_{л} = \delta_{т}, \quad (\tau_{xy})_{\delta_{л-0}} = (\tau_{xy})_{\delta_{л+0}};$$

преобразованные условия

$$\frac{Z^*}{\beta + 2\omega_0 \eta^*} - \frac{Z_1^*}{\beta + 2\omega_0 \eta_1^*}, \quad \eta^* (2\omega_0 - Z^*) = k_1 \eta_1^* (2\omega_0 - Z_1^*),$$

$$Y^* = \frac{\eta_1^*}{\eta^*} \int_0^{\eta^*} (\beta + 2\omega_0 \eta - Z)^{-1/2} d\eta, \quad 1 = \frac{k^2}{2} Y^{*2} \left(\frac{\eta^*}{\eta_1^*} \right)^2 [2\omega_0 - Z_1^*].$$

Условия сращивания позволяют определить начальные условия для интегрирования системы (4), (5). Очевидно, если будет известна ордината η^* переключения уравнения (3) на уравнения (4), (5), то можно будет определить из (6) начальные условия η_1^* , Z_1^* , Z^* , Y^* . Недостающее уравнение должно быть получено из рассмотрения условия $\psi_{\delta_{\pi-0}} = \psi_{\delta_{\pi+0}}$. До сих пор задача являлась полностью автомодельной, так как координата s (или x) не входила явно ни в исходные уравнения, ни в граничные условия. Однако требование $\psi_{\pi} = \psi_{\pi}$ превращает задачу в локально-автомодельную, так как при приведении этого условия к безразмерному виду

получаем $\eta_1^* = \eta^* (\text{Re}_x)^{\frac{m+1}{2}}$. Этот результат является следствием известного факта отсутствия подобия для турбулентных пограничных слоев ввиду различного характера развития потока в ламинарной и турбулентной частях пограничного слоя. В классических исследованиях Кармана [6] и Прандтля [7] предполагалось, что такое подобие существует; это предположение основывалось на измерениях, охватывающих диапазон чисел Рейнольдса, близких к $\text{Re}_x \sim 10^6 \div 10^7$. Здесь предполагается наличие локального подобия, и все интегральные характеристики, получаемые в результате решения задачи, вычислялись при определяющем числе Рейнольдса $\text{Re}_x = 4 \cdot 10^6$.

Параметр β , входящий в систему (3), (4), (5), не является существенным, так как путем преобразования вида $\lambda = \frac{Z}{\beta}$, $\zeta = \eta \beta^{-\frac{1}{4}}$, $\lambda_1 = \frac{Z_1}{\beta}$, $\zeta_1 = \eta_1 \beta^{-\frac{1}{2}}$ он исключается как из рассматриваемых уравнений, так и из граничных условий. При проведении расчетов система (3), (4), (5) путем подстановок $\frac{d\lambda}{d\zeta} = t$, $\frac{d\lambda_1}{d\zeta_1} = t_1$ сводилась к системе пяти обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, причем оказалось удобным, как и в работе [4], использовать в качестве аргумента переменные t и t_1 , а не η и η_1 . В этом случае корневая особенность переходит в числитель правых частей полученных уравнений:

$$(7) \quad \frac{d\zeta}{dt} = P, \quad \frac{d\lambda}{dt} = Pt,$$

$$(8) \quad \frac{d\zeta_1}{dt_1} = P_1, \quad \frac{d\lambda_1}{dt_1} = P_1 t_1, \quad \frac{dY}{dt_1} = \frac{P_1}{\sqrt{1 + 2\omega_0 \zeta_1 - \lambda_1}},$$

где

$$P = \frac{\sqrt{1 + 2\omega_0 \zeta - \lambda}}{2m\lambda - \frac{m+1}{2} \zeta t}, \quad P_1 = \pm \frac{k^2 Y^2 t_1 \sqrt{1 + 2\omega_0 \zeta_1 - \lambda_1}}{2m\lambda_1 - (m+1) \zeta_1 t_1 + k^2 Y^2 t_1^2}.$$

Граничные условия имеют вид при $t=t_0$ $\zeta=0$, $\lambda=1$, при $t=t_*$ $\zeta_1=\zeta_R$, $\lambda_1=0$, где ζ_R соответствует разумно выбранному асимптотическому значению η_1 (в расчетах принималось $\zeta_R=10$). Система уравнений (7), (8) интегрировалась методом Рунге—Кутты

с подстройкой по Ньютону для удовлетворения условий при $t=t_*$. Задаваясь произвольным значением t_0 , интегрируем систему (7), проверяя на каждом шаге интегрирования условия срачивания, которые удовлетворяются в том случае, когда

$$(9) \quad \frac{\lambda^2}{h_1} \left\{ \int_0^t (1 + 2\omega_0 \zeta - \lambda)^{-1/2} P dt \right\}^2 \operatorname{Re}_x^{\frac{m+1}{2}} |2\omega_0 - \lambda'| = 2.$$

При выполнении (9) из (6) определяются начальные условия для интегрирования системы (8), которая интегрируется до тех пор, пока будет выполнено условие $\zeta_1 = \zeta_R$. В этой точке проверяется условие $\lambda_1 = 0$, при невыполнении которого итерационный процесс повторяется.

Система (7), (8) содержит два существенных параметра — m и ω_0 . Область изменения m определяется из условия существования решения исходной системы уравнений, а область изменения ω_0 такова, чтобы не были нарушены основные предпосылки концепции пограничного слоя. Большинство расчетов было проведено при $\omega_0 = 0$, однако рассматривались случаи $\omega_0 = 0,5; 1, 0$. Ввиду слабого влияния ω_0 в рассмотренном диапазоне на интегральные характеристики пограничного слоя эти расчеты здесь не приводятся.

Параметр градиента давления m изменялся от $m=1$ (передняя критическая точка) до значения $m \simeq -0,286$, при котором решение исходной системы еще существует. В области $0,5 \leq m \leq 1$ интегральные характеристики практически не зависят от m , все изменения затрагивают только область ламинарного подслоя, которая мала и в ускоренном течении не оказывает существенного влияния на структуру турбулентного ядра. Поэтому для повышения точности интерполяционных многочленов, приводимых ниже, результаты расчетов были обработаны вплоть до $m=0,5$.

В области замедленного течения $m < 0$ так же, как и в известном решении Хартри уравнения Фокнера — Скэн, была обнаружена неоднозначность решения, приводящая к тому, что при одном и том же значении $m < 0$ независимо существуют два решения, причем одно решение соответствует присоединенному течению на поверхности, а второе описывает отделившийся поток. Отметим, что впервые на эту особенность обратил внимание Клаузер в своей экспериментальной работе [8], а также Людвиг и Тиллман в работе [9].

Точка отрыва турбулентного пограничного слоя ($\tau_w = 0$) характеризуется следующими условиями: $m_s = -0,2662$; $H_s = \left(\frac{\delta^*}{\delta^{**}} \right)_s = 1,7566$. Эти результаты довольно хорошо согласуются с экспериментальными данными Стретфорда [10], который получил $m_s \simeq -0,25$; $H_s \simeq 1,8 \div 2,0$. На фигуре приводятся вычисленные значения для наиболее часто употребляемых в теории турбулентного пограничного слоя формпараметров $\kappa = \frac{\delta^{**}}{\delta^*}$,

$$I = \frac{\delta^{**3}}{\delta^*}, \quad R = 2\delta^* \int_0^{\delta} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u}{U_e} \right) \right]^2 dy. \quad \text{Величина } R \text{ соответствует интегралу}$$

вязкой диссипации и употребляется в известном методе Трукенброта, а

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy, \quad \delta^{**} = \int_0^\delta \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy,$$

$$\delta^{***} = \int_0^\delta \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u^2}{U_e^2}\right) dy.$$

На фигуре формпараметр $a \geq 0$ означает безразмерную скорость на границе ламинарного подслоя, а формпараметр a_1 — уменьшенную на постоянную величину ($a_1^* = 0,035$) скорость вдоль разделяющей линии тока $\psi = 0$, т. е. $a_1 = \left(\frac{u}{U_e}\right)_{\psi=0} = 0,035$. Последнее условие вытекает из того факта, что при $a=0$ $\left(\frac{u}{U_e}\right)_{\psi=0} = 0,035$. В точке, где $a=0$, выполняется условие $a_1=0$. Это создает определенные удобства при использовании различных интегральных методов для расчета отрывных турбулентных течений.

Результаты расчетов, обработанные по методу наименьших квадратов, могут быть представлены в виде интерполяционных многочленов вида:

присоединенное течение и частично отрывное ($0 \leq a \leq 0,49$;

$$0 \leq \left(\frac{u}{U_e}\right)_{\psi=0} \leq 0,035$$

$$\kappa = 0,5393 + 0,6301a + 0,4826a^2 + 0,6981a^3 - 3,4145a^4;$$

$$I = 0,9005 + 1,0113a + 1,1964a^2 + 7,1022a^3 - 17,0728a^4;$$

$$R = 0,1008 - 0,3854a - 0,0040a^2 + 1,6511a^3 - 1,3658a^4;$$

отрывное течение ($0 \leq a_1 \leq 0,51$)

$$\kappa = 0,5393 - 1,0766a_1 + 0,1011a_1^2 - 0,0618a_1^3 - 0,2131a_1^4;$$

$$I = 0,9005 - 2,1394a_1 + 3,1247a_1^2 - 6,0071a_1^3 + 5,9687a_1^4;$$

$$R = 0,1008 - 2,8594a_1 + 4,9339a_1^2 - 9,4434a_1^3 + 7,8162a_1^4.$$

Погрешность интерполяции не превосходит 2%.

Поступила 14 XI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. Группы и интегрально-групповые решения дифференциальных уравнений. — «Докл. АН СССР», 1958, т. 118, № 3.
2. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск, «Наука», 1962.
3. Овсянников Л. В. Групповое расслоение уравнений пограничного слоя. — В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 1. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1969.
4. Бережагина-Мышкова Л. И. О взаимодействии завихренности в свободном потоке с диссипативным слоем в зоне отрыва. — «Вестн. Ленинград. ун-та», 1968, № 7, вып. 2.
5. Гинзбург И. П. Теория сопротивления и теплопередачи. Изд. Ленингр. ун-та, 1970.

6. Von Karman Th. Über laminare und turbulente Reibung. — ZAMM, 1921, N 1, S. 233—252.
7. Prandtl L. Über den Reibungswiderstand strömender Luft. — «Ergebnisse AVA», Göttingen, 1927, III, Lieferung, 1—5.
8. Clauser F. H. The turbulent boundary layer. — In: Advances Appl. Mech. Vol. 4. N. Y., 1956, p. 1—51.
9. Ludwig H., Tillman W. Untersuchungen über die Wandschubspannung in turbulenten Reibungsschichten. — «Ing.-Arch.», 1949, B. 17, S. 288—299.
10. Stratford B. S. An experimental flow with zero skin friction throughout its region of pressure rise. — «J. Fluid Mech.», 1959, vol. 5, p. 17—35.

УДК 532.529:536.25

СТАЦИОНАРНЫЙ ДВУХФАЗНЫЙ ПОТОК В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТРУБЕ ПРИ СОВМЕСТНОМ ДЕЙСТВИИ СВОБОДНОЙ И ВЫНУЖДЕННОЙ КОНВЕКЦИИ

В. А. Дубовик

(Томск)

В рамках двухскоростной и двухтемпературной модели сплошной среды рассматривается вязкостно-гравитационное течение смеси несжимаемой жидкости и частиц в вертикальной круглой трубе. Уравнения свободной конвекции записываются на основании общих уравнений движения и энергии двухфазной среды [1, 2]. Методом конечного интегрального преобразования Ханкеля строится решение для случая линейного распределения температуры стенки вдоль трубы.

Приводятся результаты расчетов поля скоростей и температур по сечению, а также безразмерного коэффициента теплоотдачи в зависимости от числа Рейля и концентрации фаз. При этом предполагается, что коэффициенты динамического и теплового взаимодействия между фазами отвечают стоковскому режиму обтекания каждой частицы, в результате чего наблюдается [3] малое скоростное и тепловое отставание фаз.

1. Рассматривается течение и теплообмен в вертикальной круглой трубе радиуса R на достаточном удалении от входа, т. е. в области с наступившей тепловой и гидродинамической стабилизацией потока. В этой области течение происходит параллельно стенке и скорости не изменяются по длине трубы. Физические свойства фаз и их концентрации, исключая плотности, считаются постоянными. Изменение истинных плотностей в зависимости от температуры аналогично однофазному течению [4, 5], предполагается линейным и учитывается лишь в тех членах уравнений движения, которые выражают подъемную силу. Незначительное изменение скоростей при свободной конвекции и малое скоростное отставание фаз позволяют в уравнениях энергии исключить из рассмотрения члены, обусловленные вязкостным взаимодействием фаз и диссипацией энергии.

При этих допущениях исходная система уравнений [1, 2] существенно упрощается.

Ось z цилиндрической системы координат ρ, φ, z направлена вверх по оси трубы. Тогда с учетом симметрии течения и теплообмена уравнения гравитационной конвекции двухфазной среды при сформулированных предположениях принимают вид: