

6. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН.— 1961.— Т. 16, вып. 3(99).  
 7. Бетчов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости.— М.: Мир, 1971.  
 8. Линь Ц. Ц. Теория гидродинамической устойчивости.— М.: ИЛ, 1958.  
 9. Chu B.-T., Kovaszny L. S. G. Non-linear interactions in a viscous heat-conducting compressible gas // J. Fluid Mech.— 1958.— V. 3, N 5.

г. Новосибирск

Поступила 22/VII 1988 г.

УДК 532.529.6; 532.516

А. Г. Петров

## ЦИРКУЛЯЦИЯ ВНУТРИ ВЯЗКИХ ДЕФОРМИРОВАННЫХ КАПЕЛЬ, ДВИЖУЩИХСЯ В ГАЗЕ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ

Рассматривается движение жидкой капли в стационарном потоке, когда отношение динамической вязкости внешнего течения к вязкости внутреннего течения мало. Из установленной двухсторонней оценки для диссипации энергии внутри капли определяется внутренняя циркуляция. Из уравнения баланса сил внешнего и внутреннего давлений и поверхностного натяжения найдена связь между внутренней циркуляцией и деформацией капли. Получены уравнения колебаний капли, падающей в газе, и решена задача устойчивости. Теоретическое значение критического размера капли согласуется с опытными данными по дроблению капель.

1. Разложения по малому отношению вязкостей. Уравнения первого приближения. Рассмотрим осесимметричное обтекание жидкой капли. Жидкости внутри и вне капли считаем вязкими, несжимаемыми. Обозначим через  $v_+$  вектор скорости вне капли,  $\mu_+$ ,  $\nu_+$  — динамическую и кинематическую вязкости,  $\rho_+$  — плотность жидкости вне капли. Соответствующие характеристики движения внутри капли отметим индексом —.

Внутри и вне капли поля скоростей подчиняются уравнениям Навье — Стокса. На поверхности капли  $\partial V$  заданы четыре условия: равенство нулю нормальных скоростей  $v_n$ , непрерывность тангенциальной скорости  $v_\tau$  и касательного напряжения  $\sigma_\tau$ ; на бесконечности выполняется условие  $v_+ \rightarrow v_\infty$ . Форма капли предполагается известной. Для ее определения в п. 6 привлекается граничное условие для нормальных напряжений.

Для капель, движущихся в газе, обычно выполнено условие  $\mu_+/\mu_- \ll \ll 1$ , при котором  $v_-$  существенно меньше  $v_\infty$ . При большом числе Рейнольдса  $Re_+$  внешнее течение вблизи границы имеет структуру, характерную для теории пограничного слоя на твердой поверхности. Толщина пограничного слоя  $\delta_+ = l/\sqrt{Re_+}$  ( $l$  — радиус шара, эквивалентного капле по объему).

Характерное значение  $\sigma_{+\tau} \sim \sigma$  обратно пропорционально  $\delta_+$ :

$$(1.1) \quad \sigma = \mu_+ v_\infty / \delta_+ = \mu_+ v_\infty \sqrt{Re_+} / l, \quad Re_+ = l v_\infty / \nu_+.$$

Касательное напряжение  $\sigma_{+\tau}$  вызывает вихревое течение внутри капли, скорость которого  $v_- \sim \sigma l / \mu_-$ , откуда с помощью (1.1) имеем  $v_- \sim R v_\infty$ ,  $R = (\mu_+ / \mu_-) \sqrt{Re_+}$ . Предполагая параметр  $R$  малым, решение краевой задачи ищем в виде разложений по степеням  $R$ :

$$(1.2) \quad \mathbf{v}_+ = v_\infty (\mathbf{v}_+^{(0)} + R \mathbf{v}_+^{(1)} + \dots), \quad \mathbf{v}_- = v_\infty (R \mathbf{v}_-^{(1)} + \dots), \\ \sigma_{+\tau} = \sigma (\tau^{(0)} + R \tau^{(1)} + \dots).$$

Разложения для давлений начинаются со слагаемых, имеющих порядок  $p_+ \sim \rho_+ v_\infty^2$ ,  $p_- \sim \rho_- v_-^2 \sim \rho_- R^2 v_\infty^2$ . Подставляя эти разложения в уравнения Навье — Стокса и граничные условия, найдем уравнения и граничные условия для  $\mathbf{v}_\pm^{(i)}$ ,  $p_\pm^{(i)}$  ( $i = 0, 1, \dots$ ). Для  $\mathbf{v}_+^{(0)}$ ,  $p_+^{(0)}$  получим краевую задачу обтекания твердого тела с условием прилипания (из ее решения определится безразмерное касательное напряжение  $\tau^{(0)}$  на гра-

нице), для  $\mathbf{v}^{(1)}$  — задачу о течении вязкой жидкости внутри области  $V$  с условием для безразмерного касательного напряжения на замкнутой поверхности тока  $\partial V$  [1]:

$$(1.3) \quad (\mathbf{v}^{(1)} \nabla) \mathbf{v}^{(1)} = -\nabla p^{(1)} + \frac{1}{\text{Re}_-} \Delta \mathbf{v}^{(1)}, \quad \nabla v^{(1)} = 0,$$

$$\partial V: 2e_{ij} n_i \tau_j = \tau^{(0)}, \quad v_{-n}^{(1)} = 0, \quad \text{Re}_- = lv_\infty R / \nu_-$$

( $e_{ij}$ ,  $n_i$ ,  $\tau_j$  — компоненты тензора скоростей деформаций, нормального и касательного к поверхности  $\partial V$  единичных векторов. Здесь по индексам  $ij$  подразумевается суммирование). В уравнении (1.3) потенциальные массовые силы включены в модифицированное давление  $p^{(1)}$ .

**2. Структура решения внутренней краевой задачи первого приближения.** Решение задачи стационарного движения капли при известной ее форме определяется в общем случае тремя безразмерными параметрами  $\text{Re}_+$ ,  $\text{Re}_-$  и  $R$ . Решение краевой задачи первого приближения (1.3) зависит от  $\text{Re}_+$  и  $\text{Re}_-$  [1], причем существенным параметром является только  $\text{Re}_+$ , определяющий распределение  $\tau^{(0)}$  на поверхности капли. Этот факт устанавливается путем двухсторонних оценок для диссипации энергии  $D$  внутри капли [2]. Согласно (1.2), поле скорости внутри капли пропорционально  $R$ , откуда  $D = \mu_- v_\infty^2 R^2 l d(\text{Re}_+, \text{Re}_-)$ . Безразмерная функция диссипации  $d$  выражается через тензор скоростей деформаций]  $e_{ij}^{(1)}$  для поля скорости  $\mathbf{v}^{(1)}$

$$(2.1) \quad d = 2 \int_V e_{ij}^{(1)} e_{ij}^{(1)} dV = \int_{\partial V} \tau^{(0)} v_\tau^{(1)} dS,$$

где второе равенство есть равенство диссипации энергии работе поверхностных сил, справедливое для любого стационарного течения вязкой жидкости.

Для диссипации энергии верны двухсторонние оценки [2]

$$(2.2) \quad d(\text{Re}_+, \infty) \leq d(\text{Re}_+, \text{Re}_-) \leq d(\text{Re}_+, 0).$$

Первая вытекает из принципа Лагранжа, согласно которому функционал

$$I(\mathbf{v}^{(1)}) = \int_V e_{ij}^{(1)} e_{ij}^{(1)} dV - \int_{\partial V} \tau^{(0)} v_\tau^{(1)} dS,$$

определенный на соленоидальном поле скорости, удовлетворяющем краевым условиям (1.3), достигает наименьшего значения на решении уравнений Стокса с пренебрежимо малыми нелинейными силами инерции. Если оценка сверху (2.2) справедлива для любого решения краевой задачи (1.3), то оценка снизу — в предположении о монотонной зависимости функции  $d$  от  $R_-$ . Оценочные функции для достаточно простых областей находятся аналитически из решений линейных задач.

Для сферической капли (случай малого числа Вебера  $We$ ) двухсторонние оценки выписываются в явном виде. Для этого представим  $\tau^{(0)}$  в виде ряда по присоединенным полиномам Лежандра:

$$(2.3) \quad \tau^{(0)}(\text{Re}_+, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(\cos \theta)$$

( $\theta$  — полярный угол, отсчитываемый от кормовой точки на сфере).

Для  $0,05 \leq \text{Re}_+ \leq 20$  коэффициенты  $a_n$  приведены в [3], где задача обтекания шара решена методом Галеркина. При меньших  $\text{Re}_+$   $a_n$  находятся из асимптотического при  $\text{Re}_+ \ll 1$  решения задачи обтекания шара.

В [4—6] имеются результаты численных расчетов при  $\text{Re}_+ = 50, 150, 500$  и данные эксперимента для функции  $\tau^{(0)}$  при  $\text{Re}_+ = 78\ 600$ , что позволяет вычислить  $a_n$  при этих  $\text{Re}_+$ .

Функция тока  $\psi_0$  предельного решения краевой задачи (1.3) при  $Re_- \rightarrow 0$  и соответствующая ей диссипация энергии представляются рядами

$$(2.4) \quad \psi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n+1} - r^{n+3}}{4n+2} a_n \sin \theta P_n^{(1)}(\cos \theta),$$

$$d(Re_+, 0) = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(2n+1)^2} a_n^2.$$

Функция тока  $\psi_\infty$  предельного течения при  $Re_- \rightarrow \infty$ , найденного в [1], совпадает с первым членом ряда (2.4):

$$(2.5) \quad \psi_\infty = (1/6)(r^2 - r^4)a_1 \sin^2 \theta, \quad d(Re_+, \infty) = (8/9)\pi a_1^2.$$

Предельное течение (2.5) имеет постоянную внутри шара безразмерную интенсивность вихря

$$(2.6) \quad C = \frac{|\text{rot } \mathbf{v}^{(1)}|}{r \sin \theta} = \frac{5}{3} a_1 - \frac{5}{4} \int_0^\pi \tau^{(0)} \sin^2 \theta d\theta.$$

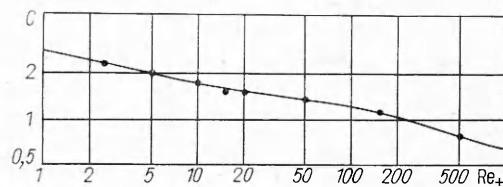
Этот результат получен в [1] из второго равенства (2.1), которое можно считать определяющим соотношением для постоянной  $C$ .

На рис. 1 показана зависимость  $C(Re_+)$  в логарифмическом масштабе для  $Re_+$  в диапазоне  $1 \leq Re_+ \leq 1000$ . Точками изображены расчеты, проведенные с помощью формул (2.6), в которых данные для  $a_1$  и  $\tau^{(0)}(Re_+, \theta)$  взяты из [3–6]. Для малого значения  $Re_+ \ll 1$  функцию  $C(Re_+)$  можно вычислить с помощью асимптотического выражения  $C(Re_+) = (5/2)(1 + (3/8)Re_+)/\sqrt{Re_+}$ .

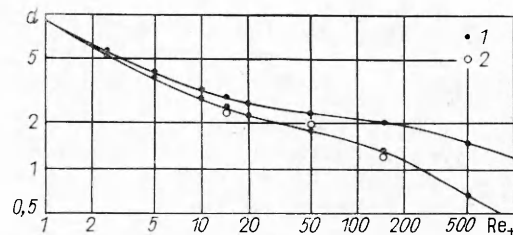
На рис. 2 представлены верхняя  $d(Re_+, 0)$  и нижняя  $d(Re_+, \infty)$  оценки диссипации энергии внутри капли. Точки 1 — расчеты по (2.4) и (2.5), проведенные с помощью коэффициентов разложения касательного напряжения [3–6], 2 — значения  $d(Re_+, Re_-)$  при  $Re_+ = 15, Re_- = 16,1; Re_+ = 50, Re_- = 97,9; Re_+ = 150, Re_- = 509$ , определенные с помощью результатов численных расчетов из [4]. Их отклонение от асимптотики  $d(Re_+, \infty)$  не превышает 9 % и сопоставимо с погрешностью численных расчетов [4], полученных с помощью разностной схемы для уравнений Навье—Стокса.

При изменении  $Re_-$  от нуля до бесконечности функция  $d(Re_+, Re_-)$  варьируется в небольших пределах, которые определяются оценками  $d(Re_+, 0)$  и  $d(Re_+, \infty)$ . Изменение  $d$  составляет 40 % (наибольшее) при  $Re_+ = 150$ , 30 % — при  $Re_+ = 50$ , около 10 % — при  $Re_+ = 10$  и менее 1 % — при  $Re_+ = 1$ .

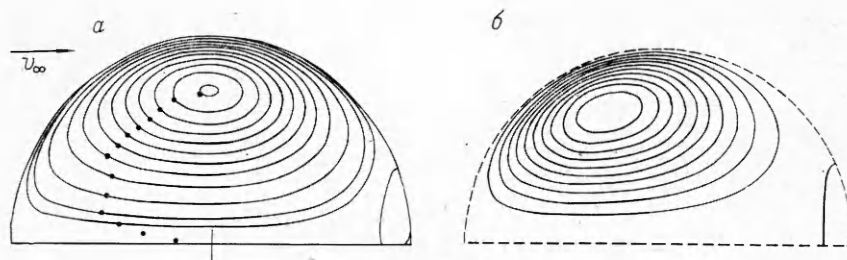
Анализ изолиний функции тока (2.4) при различных  $Re_+$  показывает, что при  $Re_+ = 150$  появляется второй вихрь внутри капли в окрестности кормовой точки. При  $Re_+ = 150$  максимальная скорость в зоне второго вихря в 30 раз меньше наибольшей скорости внутри капли. Даже при весьма больших  $Re_-$  число Рейнольдса, рассчитанное по характерному размеру второго вихря и скорости внутри него, будет малым. Поэтому раздели-



Р и с. 1



Р и с. 2



Р и с. 3

тельная линия тока, указывающая границу второго вихря, не зависит от  $Re_-$ . Это подтверждается сравнением с численными расчетами. Разделительная линия тока, приведенная на рис. 3, а [4], при  $Re_+ = 150$  и  $Re_- = 509$  в точности совпадает с представленной на рис. 3, б при  $Re_+ = 150$  и  $Re_- = 0$ .

Достигнутое упрощение задачи, когда вместо трех безразмерных параметров существует один ( $Re_+$ ), возможно при единственном ограничении: скорость внутри капли много меньше  $v_\infty$ , или  $R/5 \ll 1$ .

**3. Уравнение пограничного слоя внутри капли.** В соответствии с теорией [1] при большом внутреннем  $Re_-$  около границы капли возникает «мягкий» пограничный слой толщины  $\delta_- = l/\sqrt{Re_-}$ . В пограничном слое происходит изменение значения вихря  $\omega_- = |\text{rot } v_-|$  порядка единицы и малое изменение  $v_-$  порядка  $\delta_-$ . Величина  $c_- = \omega/y$  ( $y$  — расстояние от оси симметрии) постоянна внутри капли всюду вне пограничного слоя ( $c_- = c = \text{const}$ ), а в пограничном слое удовлетворяет уравнению конвективной диффузии на предельном поле скорости  $v_c$  ( $|\text{rot } v_c| = cy$ ).

При написании уравнений пограничного слоя учтем, что производная по координате  $x_1$  поперек пограничного слоя в  $\sqrt{Re_-}$  раз больше производной по координате  $s$  вдоль линии тока. Таким образом,

$$(3.1) \quad v_c \frac{\partial c_-}{\partial s} = \frac{v_-}{h_1^2} \frac{\partial^2 c_-}{\partial x_1^2}$$

( $h_1$  — коэффициент Ламэ, соответствующий координате  $x_1$ ). За координату  $x_1$  удобно принять функцию тока  $\psi_0$  поля скорости  $v_0 = v_c/c$ , тогда  $h_1 = 1/(y v_0)$ , а (3.1) приведет к уравнению типа теплопроводности

$$(3.2) \quad \partial c_- / \partial t = \partial^2 c_- / \partial x^2, \quad dt = y^2(s) v_0(s) ds, \quad x = \psi_0 \sqrt{c/v_-},$$

где  $y(s)$  — расстояние от точки на границе капли до оси симметрии;  $v_0(s)$  — значение скорости  $v_0$  в этой же точке на границе.

Граничная линия тока  $L$  делится полюсами  $A$  и  $B$  на части  $L_1$  и  $L_2$ . На первой, примыкающей к внешней области, задано  $\sigma_\tau$ , которое выразим через величину вихря, скорость и кривизну  $K$  граничной линии тока:

$$(3.3) \quad \sigma_\tau = \mu_- (y c_- - 2K v_-).$$

Из (3.3) представим  $c_-$  через заданное на границе капли напряжение  $\sigma_{+\tau}$ , откуда получим условие на  $L_1$

$$(3.4) \quad c_-(t, 0) = (2K v_c + \sigma_{+\tau} / \mu_-) / y, \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad t_0 = \int_A^B y^2 v_0 ds.$$

В пограничном слое, примыкающем к отрезку оси вращения капли  $L_2$ ,  $c_-$  переносится вдоль линий тока без изменения, откуда вытекает условие равенства функций  $c_-$  в полюсах  $A$  и  $B$

$$(3.5) \quad c_-(0, x) = c_-(t_0, x).$$

Вне пограничного слоя  $c_-$  должна стремиться к постоянной  $c$ , отсюда

$$(3.6) \quad c_- \rightarrow c \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

Краевая задача (3.2)—(3.6) имеет единственное решение. Если определить  $c_-(t, x)$  вне отрезка  $t \in [0, t_0]$  по условию периодичности  $c_-(t + t_0, x) = c_-(t, x)$ , то получим классическую задачу о температурных колебаниях полубесконечного стержня, решаемую методом Фурье. Причем  $c$  является нулевой гармоникой Фурье для  $c_-(t, 0)$ , определяемой из (3.4):

$$(3.7) \quad c = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} c_-(t, 0) dt.$$

Нетрудно показать, что соотношение (3.7) с учетом (3.4) эквивалентно равенству диссипации энергии на предельном поле скорости  $v_c = cv_0$  и работе силы касательного напряжения  $\sigma_{+\tau}$  на поверхности капли, оно запишется как

$$(3.8) \quad c^2 D_0 = \int \frac{\sigma_{+\tau} v_c}{\partial v} dS$$

( $c^2 D_0$  — диссипация энергии на предельном поле скорости  $v_c = cv_0$ ).

Соотношение (3.8), из которого находится постоянная  $c$ , получено в [1], его удобно представить в форме

$$(3.9) \quad c = \frac{2\pi}{D_0} J, \quad J = \int_0^{t_0} \frac{\sigma_{+\tau} dt}{y(t)}.$$

Для эллипсоидальной капли

$$(3.10) \quad D_0 = \frac{8\pi}{15} \mu_- l^5 \frac{\chi^{2/3} (16 - 2\chi^2 + \chi^4)}{(4 + \chi^2)^2}, \quad t_0 = \frac{t}{15} l^5 \chi^{2/3}$$

( $\chi$  — отношение оси, перпендикулярной потоку, к оси эллипсоида, параллельной потоку). Для решения всей задачи остается определить интеграл  $J$ .

**4. Расчет интенсивности вихря внутри эллипсоидальной капли.** Форму каплю будем считать эллипсоидальной. Это допущение не является чрезмерно грубым. В ряде экспериментальных работ до весьма больших деформаций капли имели эллипсоидальную форму в широком диапазоне исходных параметров [7—9]. Предположение об эллипсоидальности апробировано в теоретических работах, посвященных расчету всплывающих пузырей и падающих капель.

Для упрощения вычислений  $J$  в (3.9) считаем, что подынтегральная функция зависит от одного линейного параметра — радиуса кривизны  $a = l\chi^{4/3}$  в полюсе эллипсоида. Действительно, функция  $\sigma_{+\tau}/y$  от  $t$  максимальна в полюсе и в окрестности  $t = 0$  дает основной вклад в  $J$ , поэтому второй линейный параметр эллипсоида менее существен и зависимостью от него можно пренебречь. Указанные соображения позволяют сделать вывод о виде подынтегральной функции:

$$(4.1) \quad \frac{\sigma_{+\tau}}{y} = \frac{\sigma}{a} T(t', \text{Re}_*), \quad t' = \frac{t}{i_0}, \quad \text{Re}_* = av_\infty/\nu_+, \quad \sigma = \mu_+(v_\infty/a) \sqrt{\text{Re}_*}.$$

Подставляя (4.1) в (3.9), получим

$$(4.2) \quad \sqrt{\Omega} = \frac{ct^2}{v_\infty} = \frac{3\pi(4 + \chi^2)^2 C(\text{Re}_*)}{5\chi^2(16 - 2\chi^2 + \chi^4)}, \quad C(\text{Re}_*) = \frac{5}{3} \int_0^1 T(t', \text{Re}_*) dt'.$$

Функция  $C(\text{Re}_*)$  не зависит от деформации капли. Для сферической капли формулы (2.6) и (4.2) для  $C(\text{Re}_*)$  тождественны. Таким образом, параметр  $\Omega$  в (4.2) для деформированной капли выражается через известную уже функцию  $C(\text{Re})$ , изображенную на рис. 1.

Как показывает (4.2), при постоянном  $Re$  зависимость  $\Omega$  от деформации  $\chi$  весьма существенна. Так, при изменении деформации от  $\chi = 1$  до  $\chi = 2\Omega$  уменьшается почти в 9 раз.

Безразмерный параметр  $(\rho_-/\rho_+)\Omega$  — это отношение характерных динамических напоров внутри и вне капли. Вместе с безразмерным  $We$  параметр  $(\rho_-/\rho_+)\Omega$  определяет деформацию капли. Таким образом, по деформации капли можно судить о  $(\rho_-/\rho_+)\Omega$ , а с помощью (4.2) найти  $C(Re_*)$ . Предлагаемый способ — один из возможных путей определения внутренней интенсивности вихря непосредственно из эксперимента.

**5. Вычисление вихря внутри капли по деформации.** Рассмотрим задачу нахождения формы капли, падающей в газе под действием силы тяжести. Для этого привлечем оставшееся пока не учтенным граничное условие для нормальных напряжений. При  $Re_+ \gg 1$  нормальные напряжения близки к давлениям  $p_+$  и  $p_-$  соответствующих предельных течений невязких жидкостей. Причем внешнее течение, вообще говоря, отрывное. Запишем это граничное условие как

$$(5.1) \quad p_- - p_+ = 2\kappa H$$

( $\kappa$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $H$  — средняя кривизна поверхности).

Из экспериментальных данных для падающих дождевых капель хорошо известно, что капли имеют форму, близкую к сжатому эллипсоиду вращения [8, 9]. Ниже предлагается проекционный метод Галеркина в сочетании с вариационным методом [10]. Давление вне и внутри капли представляются в виде

$$(5.2) \quad p_+ = (1/2)\rho_+ v_\infty^2 c_p^+ - \rho_+ gz, \quad p_- = (1/2)\rho_- v_\infty^2 \Omega c_p^- - \rho_- gz, \\ H = h/l, \quad \kappa H = \rho_+ v_\infty^2 h/We,$$

где  $c_p^+$  и  $c_p^-$  — безразмерные давления;  $\rho_+ gz$ ,  $\rho_- gz$  — гидростатические давления вне и внутри капли;  $z$  — координата, направленная вертикально вверх;  $We$  — число Вебера ( $We = \rho_+ v_\infty^2 l/\kappa$ ).

Для нахождения деформации эллипсоида возьмем три ортогональные на эллипсоиде функции — полиномы Лежандра  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ . Спроектируем граничное условие (5.1) на эти функции. Проекция на  $P_0$  определит неизвестную постоянную в разности давления  $p_- - p_+$ . Проекция на  $P_1$  — уравнение баланса силы сопротивления капли и силы тяжести — позволяет найти скорость падения капли  $v_\infty$ . Проекция на  $P_2$  — уравнение деформации капли

$$(5.3) \quad \frac{\rho_-}{\rho_+} \Omega (c_p^-, P_2) - (c_p^+, P_2) - \frac{4}{We} (h, P_2) = 0.$$

В уравнение (5.3) гидростатическое давление не дает вклада, так как его проекция на  $P_2$  равна нулю. Проекции, входящие в (5.3), выражаются через производные от безразмерных функций кинетических энергий вне и внутри капли  $m(\chi)$ ,  $i(\chi)$  и площадь поверхности эллипсоида  $s(\chi)$ :

$$(5.4) \quad (c_p^-, P_2) = i'(\chi), \quad (c_p^+, P_2) = m'(\chi), \quad (h, P_2) = -(1/4)s'(\chi).$$

Аналитический вид  $m$ ,  $i$ ,  $s$  найден в [12]. Таким образом, из (5.3) и (5.4) получим уравнение, устанавливающее связь между тремя параметрами:

$$(5.5) \quad f(\chi) = -m'(\chi) + (\rho_-/\rho_+)\Omega i'(\chi) + s'(\chi)/We = 0$$

(штрихи здесь и далее означают производные по  $\chi$ ). В частном случае ( $\Omega = 0$ ) из (5.5) следует зависимость  $We(\chi)$  [11, 10]. Предположим известными из эксперимента деформацию  $\chi$  и  $We$ , тогда из (5.5) определим  $\Omega$ , а с помощью (4.2) —  $C^2(Re)$ .

В таблице представлены безразмерные  $C$  при больших  $Re_+$ , вычисленные по (4.2) и (5.5). Данные для  $l$ ,  $v_\infty$ ,  $\chi$  взяты из [8, 9, 13] для падающих капель в воздухе при нормальных условиях ( $\kappa = 72,8$  дин/см,  $\rho_+ = 0,0012$  г/см<sup>3</sup>,  $\nu_+ = 0,15$  см<sup>2</sup>/с,  $\rho_- = 1$  г/см<sup>3</sup>,  $\nu_- = 0,01$  см<sup>2</sup>/с). Видно,

$l$ , мм	$v_{\infty}$ , см/с	$\chi$	$Re_+$	$We$	$C$	$\partial f/\partial \chi$	$\partial f_1/\partial \chi$	Источник
0,7	517	1,060	241	0,308	0,611	—	—	[13]
1,0	649	1,104	433	0,694	0,595	—	—	«
1,5	806	1,185	806	1,62	0,553	0,391	1,31	«
2,0	874	1,279	1180	2,31	0,529	-0,327	0,533	«
2,5	909	1,389	1515	3,44	0,565	-0,433	0,353	«
2,9	917	1,492	1770	4,06	0,609	-0,502	0,241	«
3,0	918	1,53	1800	4,12	0,636	-0,488	0,237	[8]
3,5	918	1,61	2144	4,82	0,67	-0,603	0,088	«
4,0	919	1,72	2450	5,51	0,75	-0,706	-0,057	«

что  $C$  колеблется около значения 0,6, что согласуется с теоретически найденным в [1] ( $C \leq 0,7$  при  $Re_+ \rightarrow \infty$ ) (см. рис. 1).

**6. Устойчивость стационарного движения капель.** Изучение деформаций капли, движущейся в потоке идеальной несжимаемой жидкости, можно провести с помощью уравнений Лагранжа. В [10] дано выражение для функции Лагранжа  $L(u, \chi, \dot{\chi})$  динамической модели эллипсоидальной капли, имеющей две степени свободы: координата, определяющая поступательное движение  $x_0$ ,  $\dot{x}_0 = u$ ; координата  $\chi$ , определяющая деформацию капли.

Уравнение для деформации капли есть

$$(6.1) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}} - \frac{\partial L}{\partial \chi} = C_*$$

В [10] оно дополняется законом сохранения количества движения:  $\partial L/\partial u = \text{const}$ . Ввиду того что для жидких капель, движущихся в газе, плотность  $\rho_-$  на три порядка превышает плотность газа  $\rho_+$ , из этого закона следует, что скорость капли постоянна. В [10] для деформации капли в стационарном движении получено уравнение (5.5), а для устойчивости стационарного движения — условие

$$(6.2) \quad \partial f/\partial \chi > 0.$$

Из соответствующих значений в таблице видно, что по условию (6.2) водяные капли, падающие в воздухе, теряют устойчивость при  $l \geq 1,88$  мм, т. е. значительно раньше, чем в опытах [8, 13]. Причина расхождения с экспериментом заключается в том, что при изменении деформации капли меняются вязкое сопротивление и скорость падения капли.

Для учета этого эффекта примем квадратичный по скорости закон сопротивления с коэффициентом сопротивления  $c_x = 0,365\chi^{1,8}$ . Отсюда имеем зависимость скорости падения капли от деформации

$$(6.3) \quad u = u(\chi) = \left( \frac{g}{3c_x} gl \frac{\rho_-}{\rho_+} \right)^{1/2} = 2,7\chi^{-0,9} \left( gl \frac{\rho_-}{\rho_+} \right)^{1/2}.$$

Эмпирическая зависимость (6.3) хорошо согласуется с данными опытов [8, 13] (см. таблицу).

Из системы уравнений (6.1), (6.3) вытекает условие устойчивости

$$(6.4) \quad \partial f_1/\partial \chi > 0,$$

где  $f_1 = -m'(\chi)(u^2(\chi))/(u^2(\chi_0)) + (\rho_-/\rho_+)\Omega i'(\chi) + s'(\chi)/We$ .

Потеря устойчивости по критерию (6.4) наступает при больших, чем по (6.2), деформациях капли. Это объясняется тем, что при условии постоянства скорости капли увеличение ее деформации приводит к росту внешнего динамического напора на экваторе. В действительности при увеличении деформации капли скорость ее падения замедляется согласно (6.3) и динамический напор будет меньше, чем при постоянной скорости падения.

Деформация падающих дождевых капель вплоть до  $l = 4$  мм изучена в опытах [13], результаты которых даны в таблице ( $l \leq 2,9$  мм) и 2 ( $l \geq 3$  мм). Как видно из таблицы, условие (6.4) с учетом (6.3) выполнено для капель всех размеров, кроме  $l = 4$  мм. В опытах [13] установлено также, что капли размером  $l = 4$  мм нестабильны и дробятся на более мелкие.

Таким образом, учет зависимости скорости капли от ее деформации весьма существен при описании колебаний капель и изучении устойчивости стационарной формы капель.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Воинов О. В., Петров А. Г.** О течениях с замкнутыми линиями тока и движении капель при больших числах Рейнольдса // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1987. — № 5.
2. **Петров А. Г.** Скорость диссипации энергии вязкой жидкости с условием для касательного напряжения на граничной линии тока // ДАН СССР. — 1989. — Т. 304, № 5.
3. **Dennis S. C. A., Walker J. D. A.** Calculation of the steady flow past a sphere at low and moderate Reynolds numbers // J. Fluid Mech. — 1971. — V. 48, pt 4.
4. **Le Clair B. P., Hamielec A. E.** A theoretical and experimental study of the internal circulation in water drops falling at terminal velocity in air // J. Atmosph. Sci. — 1972. — V. 29, N 4.
5. **Rimon J., Cheng S. I.** Numerical solution of a uniform flow over a sphere at intermediate Reynolds numbers // Phys. Fluids. — 1969. — V. 12, N 5, pt 1.
6. **Tomotica.** The distribution of laminar skin friction on a sphere placed in a uniform stream // Proc. Phys. Mag. Soc. Japan. — 1938. — V. 20. — P. 103.
7. **Wellek R. M., Argawal A. K., Skelland A. H. P.** Shape of liquid drops moving in liquid media // AIChE J. — 1966. — V. 12, N 5.
8. **Gunn R., Hinzer G. D.** The terminal velocity of fall for water droplets in stagnant air // J. Meteorol. — 1949. — V. 6, N 6.
9. **Матвеев Л. Г.** Курс общей метеорологии. — Л.: Гидрометиздат, 1976.
10. **Клячко Л. А.** К теории дробления капли потоком газа // Инж. журн. — 1963. — Вып. 3.
11. **Moore D. W.** The velocity of rise of distorted gas bubbles in a liquid of small viscosity // J. Fluid Mech. — 1965. — V. 23, N 4.
12. **Петров А. Г.** Функция Лагранжа для вихревых течений и динамика деформированных капель // ПММ. — 1977. — Т. 41, № 1.
13. **Pruppacher H. R., Pitter R. L.** A semi-empirical determination of the shape of cloud and rain drops // J. Atmosph. Sci. — 1971. — V. 28. — P. 86—94.

г. Москва

Поступила 9/II 1987 г.,  
в окончательном варианте — 9/X 1987 г.

УДК 532.528+532.593

А. Г. Ляхов

### ВЛИЯНИЕ КАВИТАЦИОННОГО ОТКОЛА НА ГАШЕНИЕ ВОЛН В ЖИДКОСТИ ПОРИСТЫМИ ПРОСЛОЙКАМИ

Приводятся результаты экспериментального и теоретического исследования гашения плоских волн в воде прослойками из сильно сжимаемого материала. Рассмотрены нагрузки на неподвижную твердую преграду в зависимости от параметров волны и характеристик прослойки, расположенной на поверхности преграды. Показано, что при взаимодействии волны с прослойкой происходит кавитационный откол прилегающих слоев воды. Эти слои наносят последовательные удары по прослойке, а через нее и по преграде, вызывая возрастание давления. Действующее на преграду давление может более чем на порядок превышать значение, рассчитанное без кавитации.

1. Процесс гашения волн пористой прослойкой можно охарактеризовать временем действия амортизирующей прослойки

$$(1.1) \quad t^* = \alpha_0 h_0 \rho a / 2 p_m,$$