

В плоскостях изотропии аналогично [3—6] могут быть рассмотрены различные другие модели сложного нагружения, условие $S_{km} = \delta_{km}^0$ аппроксимировано кусочно-линейными поверхностями.

Отметим, что если множество собственных чисел состоит из простых и кратных корней, то система уравнений, описывающая упругопластическую деформацию анизотропной среды, представляет собой комбинацию систем уравнений двух видов: системы уравнений, описывающей процесс деформирования вдоль соответствующих осей анизотропии (построение ведется, как в случае 1), и системы уравнений, описывающей процесс деформирования в соответствующих изотропных подпространствах.

3. *Случай полной изотропии.* Пусть все корни равны между собой:

$$\lambda_1 = \lambda_2 \dots = \lambda_6.$$

Случай 3, очевидно, является частным моментом случая 2, построение уравнений классических теорий пластичности здесь совершенно аналогично предыдущему. В случае 3 изотропным будет все рассматриваемое пространство.

В заключение отметим, что большинство упругопластических моделей записывается в виде

$$T_{\Delta\epsilon} = D \cdot T_{\Delta\sigma},$$

поэтому изложенный выше анализ можно использовать для «отбраковки» некоторых из существующих моделей и построения новых.

Поступила 2 III 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В. В. О формах связи между напряжениями и деформациями в первоначально изотропных неупругих телах (геометрическая сторона вопроса).— ПММ, 1963, т. 27, № 5.
2. Лурье К. А. Некоторые задачи оптимального изгиба и растяжения упругих пластин.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 6.
3. Ишлинский А. Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением.— Укр. мат. журнал АН УССР, 1954, т. 6, № 3.
4. Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В. Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения.— ПММ, 1958, т. 22, № 1.
5. Христианович С. А., Шемякин Е. И. О плоской деформации пластического материала при сложном нагружении.— Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 5.
6. Пнамутдинов А. И. О пластической деформации материалов при сложном нагружении.— ПМТФ, 1979, № 4.

УДК 532.593 : 539.3

ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ ОТ ДВИЖУЩИХСЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

А. Е. БУКАТОВ, Л. В. ЧЕРКЕСОВ, А. А. ЯРОШЕНКО
(Севастополь)

Изучаются пространственные изгибно-гравитационные волны, возникающие под действием нагрузки, движущейся по поверхности плавающей упругой пластинки, находящейся в состоянии равномерного растяжения или сжатия. Без учета растягивающих и сжимающих усилий изгибно-гравитационные пространственные волны рассматривались в [1, 2]. Плоские волны в условиях продольного сжатия изучались в [3, 4].

1. Пусть на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины H плавает тонкая изотропная упругая пластинка. В горизонтальных направлениях пластинка и жидкость не ограничены. По поверхности пластинки перемещается со скоростью v нагрузка $p = p_0 f(x_1, y)$, $x_1 = x + vt$. Рассмотрим влияние равномерного растяжения на возникающие изгибно-гравитационные корабельные волны, считая движение жидкости потенциальным, а скорости движения частиц жидкости и прогиб пластинки ζ малыми.

С учетом равномерного растяжения [5—7] в системе координат x_1, y , связанной с движущейся областью давлений, задача сводится к решению уравнения Лапласа для потенциала скорости ϕ

$$(1.1) \quad \Delta\phi = 0, \quad -H < z < 0, \quad -\infty < x, y < \infty$$

с граничными условиями

$$(1.2) \quad D_1 \nabla^2 \zeta - Q_1 \Delta_1 \zeta + \alpha_1 v^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \zeta + \frac{v}{g} \frac{\partial \phi}{\partial x} = -p_1 f(x, y) \quad \text{при } z = 0,$$

$$\partial\phi/\partial z = 0 \quad \text{при } z = -H,$$

где $D_1 = D/\rho g$, $Q_1 = Q/\rho g$, $\kappa_1 = \rho_1 h/\rho g$, $D = Eh^3/[12(1 - \mu^2)]$, $p_1 = p_0/\rho g$,

$$\nabla^4 = \Delta_1^2, \quad \Delta_1 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2,$$

ρ — плотность жидкости; E , h , ρ_1 , μ — модуль нормальной упругости, толщина, плотность и коэффициент Пуассона пластинки; Q — растягивающее усилие; ζ и φ связаны кинематическим условием $\varphi_z = v\zeta_x$ при $z = 0$. При этом здесь и далее у x_1 опущен индекс 1.

Применив для решения задачи (1.1), (1.2) преобразование Фурье по горизонтальным координатам, получим в случае осесимметричной нагрузки интегральное представление для прогиба пластинки (возвышения поверхности пластинка — жидкость):

$$(1.3) \quad \zeta = \frac{1}{2\pi} p_1 \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\infty \frac{r}{\tau} \bar{f}(r) M(r) J(r, R, \gamma) dr \right\};$$

$$(1.4) \quad J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \frac{1}{k_0} \exp [irR \cos(\theta - \gamma)] d\theta,$$

где $M(r) = rg(1 + \kappa_1 rg \operatorname{th} rH)^{-1} \operatorname{th} rH$, $k_0 = rv \cos \theta - \tau$, $\tau = [(1 + Q_1 r^2 + D_1 r^4)M(r)]^{1/2}$, $r = (m^2 + n^2)^{1/2}$, $x = R \cos \gamma$, $y = R \sin \gamma$, $m = r \cos \theta$, $n = r \sin \theta$, $R = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $\bar{f}(r)$ — трансформанта Фурье функции $f(R)$.

Рассмотрим три диапазона изменения скорости перемещения области возмущений:

$$0 < v < v_0, \quad v_0 < v < \sqrt{gH}, \quad v > \sqrt{gH}.$$

Подынтегральное выражение в (1.4) при $0 < v < v_0$ не имеет особенностей на пути интегрирования, а при условиях $v_0 < v < \sqrt{gH}$, $r_1 \leq r \leq r_2$ или $v > \sqrt{gH}$, $0 < r < r_2$ имеет полюсы $\theta_{1,2} = \mp \arccos \tau_0$. Здесь $\tau_0 = (rv)^{-1}\tau$, $v_0 = \tau(r_0)/r_0$, r_0 — единственный положительный корень уравнения $\tau'_0(r) = 0$, штрих означает производную по r , $r_{1,2}$ — вещественные корни уравнения $\tau_0(r) = 1$. При этом $\tau'_0 < 0$ для $0 < r < r_0$ и $\tau'_0 > 0$ для $r_0 < r < \infty$. Кроме того, $\tau_0(0) = \sqrt{gH}/v$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \tau_0 = \infty$, $\tau'_0(0) = \tau'_0(r_0) = 0$. В случае $rH \gg 1$

$$(1.5) \quad v_0 = \sqrt{g/r_0} [(1 + Q_1 r_0^2 + D_1 r_0^4)/(1 + \kappa_1 r_0 g)]^{1/2},$$

где r_0 — положительный корень уравнения

$$2\kappa_1 g D_1 r^5 + 3D_1 r^4 + Q_1 r^2 - 2\kappa_1 r g - 1 = 0.$$

Если $rH \ll 1$, то

$$(1.6) \quad v_0 = \sqrt{gH} [(1 + Q_1 r_0^2 + D_1 r_0^4)/(1 + \kappa_1 g H r_0^2)]^{1/2},$$

а r_0 удовлетворяет уравнению

$$\kappa_1 g H D_1 r^4 + 2D_1 r^2 + Q_1 - \kappa_1 g H = 0.$$

Удовлетворяя условию излучения [8], заменим путь интегрирования в (1.4) на контур L , идущий по действительной оси от $\theta = -\pi/2$ до $\theta = 3\pi/2$ с обходом точек $\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_2$ в комплексной плоскости θ по малым полуокружностям снизу и сверху соответственно.

2. Если $0 < v < v_0$, то, применяя к (1.4) метод стационарной фазы и интегрируя после этого (1.3) по частям, получим, что ζ имеет для больших R порядок не ниже $O(R^{-1})$.

Пусть $v_0 < v < \sqrt{gH}$. Представим в этом случае интеграл (1.3) в виде суммы трех интегралов по отрезкам $[0, r_1]$, $[r_1, r_2]$, $[r_2, \infty]$. Так как подынтегральное выражение в (1.4) на отрезках $[0, r_1]$, $[r_2, \infty]$ не имеет особенностей, то последовательное применение метода стационарной фазы и интегрирование по частям показывают, что двойные интегралы, соответствующие первому и третьему отрезкам, имеют порядок $O(R^{-1})$. Следовательно,

$$(2.1) \quad \zeta = \frac{1}{2\pi} p_1 \operatorname{Re} \left\{ \int_{r_1}^{r_2} r \tau^{-1} \bar{f}(r) M(r) J dr \right\} + O(R^{-1});$$

$$(2.2) \quad J = \frac{1}{2\pi} \int_L k_0^{-1} \exp [irR \cos(\theta - \gamma)] d\theta.$$

Вычисляя контурный интеграл (2.2) с учетом знаков выражения $\operatorname{Re}[i \cos(\theta - \gamma)]$ на малых полуокружностях, обходящих точки $\theta = \theta_{1,2}$, и подставляя в (2.1) полученное выражение для J , найдем

$$(2.3) \quad \zeta = \frac{1}{2\pi} p_1 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^5 \eta_j + O(R^{-1}),$$

$$\eta_1 = \int_{r_1}^{r_2} B_1 e^{iR\Phi_1} dr, \quad 0 \leq \gamma \leq \bar{\gamma}; \quad \eta_2 = \int_{r_1}^{n_1} B_1 e^{iR\Phi_1} dr, \quad \bar{\gamma} < \gamma \leq \pi;$$

$$\eta_3 = \int_{n_2}^{r_2} B_1 e^{iR\Phi_1} dr, \quad \bar{\gamma} < \gamma \leq \pi; \quad \eta_4 = \int_{n_3}^{n_4} B_2 e^{iR\Phi_2} dr, \quad 0 \leq \gamma \leq \pi - \bar{\gamma};$$

$$\eta_5 = R^{-1/2} \int_{r_1}^{r_2} B_3 \cos(rR - \pi/4) dr; \quad r_1 < n_1 < n_2 < r_2,$$

$$B_{1,2} = i r \bar{f}(r) M(r) \tau^{-1} \left(v r \sqrt{1 - \tau_0^2} \right)^{-1}, \quad \bar{\gamma} = \pi - \operatorname{arctg} \max \tau_1(r),$$

$$B_3 = q r \bar{f}(r) M(r) \tau^{-1}, \quad \Phi_{1,2} = r \left(\tau_0 \cos \gamma + \sqrt{1 - \tau_0^2} \sin \gamma \right),$$

$$q = 2 \left[\sqrt{2\pi r} (v^2 r^2 \cos^2 \gamma - \tau^2) \right]^{-1}, \quad \tau_1 = \tau_0^{-1} (1 - \tau_0^2)^{1/2},$$

где $n_{1,2}$ — вещественные корни уравнения $\tau_1 = -\operatorname{tg} \gamma$, а $n_{3,4}$ — вещественные корни уравнения $\tau_1 = \operatorname{tg} \gamma$.

Фазовые функции Φ_1 и Φ_2 интегралов η_2 и η_4 не имеют стационарных точек, а $\eta_5 = O(R^{-1})$. Следовательно, $\eta_2 + \eta_4 + \eta_5 = O(R^{-1})$.

Стационарные точки фазовой функции Φ_1 в интегралах η_1, η_3 являются корнями уравнения

$$(2.4) \quad \operatorname{tg} \gamma = \tau_2(r), \quad \tau_2 = (r\tau_0)' (1 - \tau_0^2)^{1/2} [1 - \tau_0 (r\tau_0)']^{-1}.$$

Это уравнение при $v_0 < v < v_1$ имеет в рассматриваемых диапазонах изменения r один зависящий от γ действительный корень $r = \alpha_3$. Здесь

$$v_1 = \tau_3(r_3), \quad \tau_3 = \left[\tau_{01}^2 - \frac{(\tau_{01}')^2 r (\tau_{01} + r\tau_{01}')}{(r\tau_{01})''} \right]^{1/2},$$

r_3 — действительный корень уравнения $\tau_2''(r) = 0$, $r_3 < r_0$, $\tau_{01} = \tau/r$.

Один корень имеет уравнение (2.4) и при $v_1 < v < \sqrt{gH}$, если $0 < \gamma < \gamma_2$ или $\gamma_1 < \gamma < \pi$. Обозначим его через α_1 в первом случае и через α_3 во втором. Если же $v_1 < v < \sqrt{gH}$, а $\gamma_2 < \gamma < \gamma_1$, то имеется три корня $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$. При этом

$$\gamma_1 = \operatorname{arctg} \tau_2(\alpha_4), \quad \gamma_2 = \operatorname{arctg} \tau_2(\alpha_5), \quad \alpha_1 < \alpha_4 < \alpha_2 < \alpha_5 < \alpha_3,$$

$\alpha_{4,5}$ — действительные корни уравнения $\tau_2'(r) = 0$. Отметим, что $\alpha_1 = \alpha_4 = \alpha_2$ при $\gamma = \gamma_1$ и $\alpha_2 = \alpha_5 = \alpha_3$ при $\gamma = \gamma_2$.

На основании проведенного анализа расположения стационарных точек фазовых функций интегралов η_1, η_3 получим из (2.3)

$$\zeta = \zeta_3 + O(R^{-1}) \quad \text{при } 0 < |\gamma| < \pi,$$

если $v_0 < v < v_1$. Если $v_1 < v < \sqrt{gH}$, то

$$(2.5) \quad \zeta = \begin{cases} \zeta_1 + O(R^{-1}) & \text{при } 0 < |\gamma| < \gamma_2, \\ \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + O(R^{-1}) & \text{при } \gamma_2 < |\gamma| < \gamma_1, \\ \zeta_3 + O(R^{-1}) & \text{при } \gamma_1 < |\gamma| < \pi. \end{cases}$$

$$\text{Здесь } \zeta_k = R^{-1/2} \psi(\alpha_k) \cos \left[R\Phi_1(\alpha_k, \gamma) - (-1)^k \frac{\pi}{4} \right], \quad \psi = -f_1(r) M(r) \times$$

$$\times \left[v \tau \sqrt{1 - \tau_0^2} \right]^{-1} (2\pi |\Phi_1''|)^{-1/2}, \quad f_1(r) = \bar{f}(r) p_1.$$

Видно, что при скоростях $v_0 < v < v_1$ движущиеся возмущения генерируют только одну систему волн ζ_3 , затухающих с расстоянием как $1/\sqrt{R}$. Эти волны покрывают всю поверхность пластинки (границы пластинка — жидкость). Направление гребней этих волн на большом удалении от оси x определяется углом

$$\gamma_0 = \operatorname{arctg}[(v/v_0)^2 - 1]^{-1/2}.$$

Расстояние между соседними гребнями волн на лучах $\gamma = 0$ и $\gamma = \pi$ равно соответственно $\lambda_1 = 2\pi/r_1$, $\lambda_2 = 2\pi/r_2$. Расстояние от движущегося возмущения до гребня волн

ны, бегущей за возмущением, равно $l_1 = \pi/4r_1$, а до гребня волны, бегущей впереди, $l_2 = 3\pi/4r_2$.

При скоростях $v_1 < v < \sqrt{gH}$ образуются три системы волн: ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 . Из них система волн ξ_1 носит характер поперечных, а ξ_2 продольных гравитационных корабельных волн [2, 9, 10], деформированных за счет растягивающих усилий, упругих и массовых сил пластинки. Волны ξ_3 , образующиеся в этом случае в области $\gamma_2 < |\gamma| < \pi$, обусловлены, как и при $v_0 < v < v_1$, исключительно упругими силами пластинки, а направление их гребней также характеризуется углом γ_0 .

Пусть теперь $v > \sqrt{gH}$. В этом случае $r_1 = 0$, а уравнение $\tau_2'(r) = 0$ имеет только один действительный корень α_5 . Фазовая функция интегралов η_1 , η_3 не имеет при $0 < \gamma < \gamma_2$ стационарных точек — действительных корней уравнения (2.4). При $\gamma_2 < \gamma < \gamma_3$, где $\gamma_3 = \text{arctg}[v^2(gH)^{-1} - 1]^{-1/2}$, имеются две стационарные точки α_2 , α_3 , а при $\gamma_3 < \gamma < \pi$ — только одна α_3 . Принимая это во внимание, из (2.3) найдем

$$\xi = \begin{cases} O(R^{-1}) & \text{при } 0 < |\gamma| < \gamma_2, \\ \xi_2 + \xi_3 + O(R^{-1}) & \text{при } \gamma_2 < |\gamma| < \gamma_3, \\ \xi_3 + O(R^{-1}) & \text{при } \gamma_3 < |\gamma| < \pi, \end{cases}$$

где ξ_2 и ξ_3 те же, что и в (2.5).

Следовательно, возмущения, перемещающиеся со скоростью $v > \sqrt{gH}$, возбуждают две системы волн: ξ_2 , ξ_3 . Волны ξ_3 образуются вне угла $\gamma < |\gamma_2|$. Внутри его за движущимся возмущением волны с амплитудой, затухающей как $1/\sqrt{R}$, вообще не возникают. Волны ξ_2 генерируются внутри угловых зон $\gamma_2 < |\gamma| < \gamma_3$.

3. Волновое движение, генерируемое в случае равномерно сжатой пластинки при величине сжимающего усилия, удовлетворяющего условию

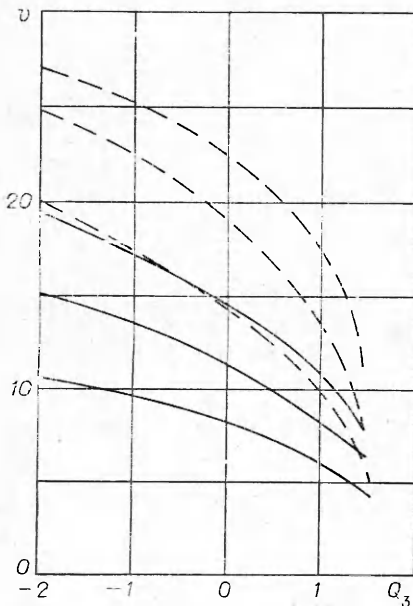
$$Q_1 < Q_2 = \tau_4(r_4), \\ \tau_4 = [(1 + D_1 r^4)\tau_5(r) + 4D_1 r^4 \tau_6(r)][\tau_5(r) + 2\tau_6(r)]r^{-2}, \\ \tau_5 = \text{th } rH + rH \text{ ch}^{-2} rH, \quad \tau_6 = (1 + \kappa_1 r g \text{ th } rH) \text{ th } rH,$$

описывается теми же формулами, что и при равномерном растяжении, если в них заменить Q_1 на $-Q_1$.

4. Для количественной оценки влияния равномерного растяжения и сжатия на возникающие волны проводились численные расчеты в случае ледяной пластины толщиной 0,2; 0,5; 1 м при значениях параметров [6, 11]:

$$(4.1) \quad E = 3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, \quad \rho_1 = 870 \text{ кг/м}^3, \quad \mu = 0,34, \quad \rho = 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad H = 10^2 \text{ м}.$$

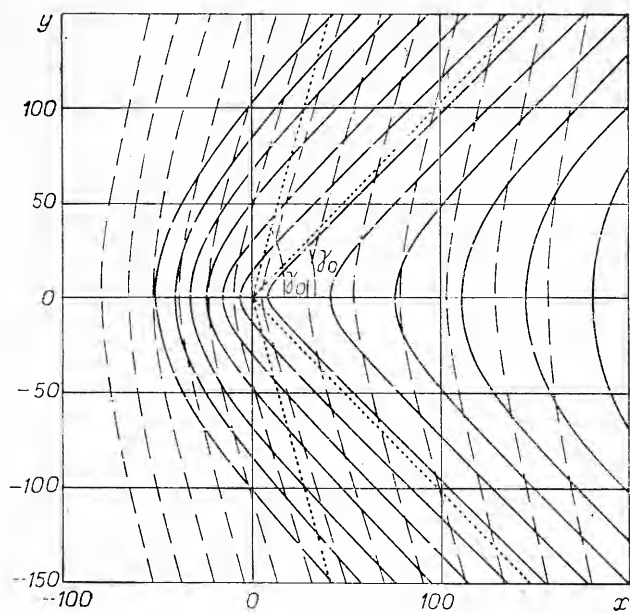
Величина растягивающего усилия изменялась в диапазоне $[0, 2\rho g\sqrt{D_1}]$, а сжимающее — в диапазоне $[0, \rho g Q_2]$. Здесь Q_2 при $h = 0,2; 0,5; 1$ м равно $1,479 \sqrt{D_1}; 1,478 \sqrt{D_1}; 1,476 \sqrt{D_1}$ соответственно. Результаты расчетов представлены на фиг. 1—6, где $Q_3 = -Q_1/\sqrt{D_1}$. Отрицательные значения Q_3 характеризуют растяжение, а положительные — сжатие. Величина $Q_3 = 0$ отвечает случаю отсутствия сжимающих и растягивающих усилий [1, 2]. Зависимость v_0 и v_1 (м/с) от Q_3 иллюстрируется фиг. 1. Сплошные (v_0) и штриховые (v_1) линии по порядку сверху вниз соответствуют толщине пластины 1; 0,5; 0,2 м. Видно, что значения критических скоростей v_0 и v_1 , в окрестности которых меняется характер волнового движения, растут с увеличением растягивающих и убывают с ростом сжимающих усилий. Причем эти изменения могут быть значительными. Например, при толщине пластины 1 м значения v_0 и v_1 равны соответственно 18,3; 26,2 м/с при $Q_3 = -1,476; 14,6; 22,5$ м/с при $Q_3 = 0; 7,9; 11,0$ м/с при $Q_3 = 1,476$.



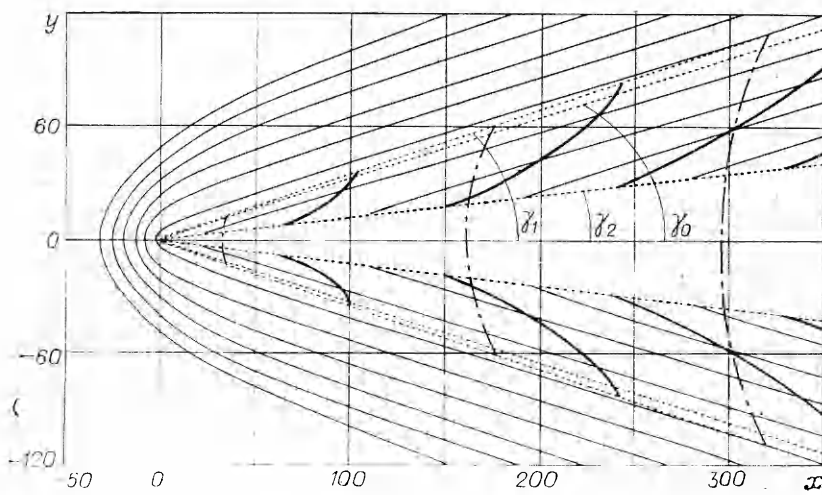
Фиг. 1

Фазовые портреты образующихся волн изображены на фиг. 2—4 для $h = 0,2$ м при скоростях перемещения возмущений, равных 10 (фиг. 2), 20 (фиг. 3), 35 м/с (фиг. 4) из диапазонов $v_0 < v < v_1$, $v_1 < v < \sqrt{gH}$, $v > \sqrt{gH}$ соответственно.

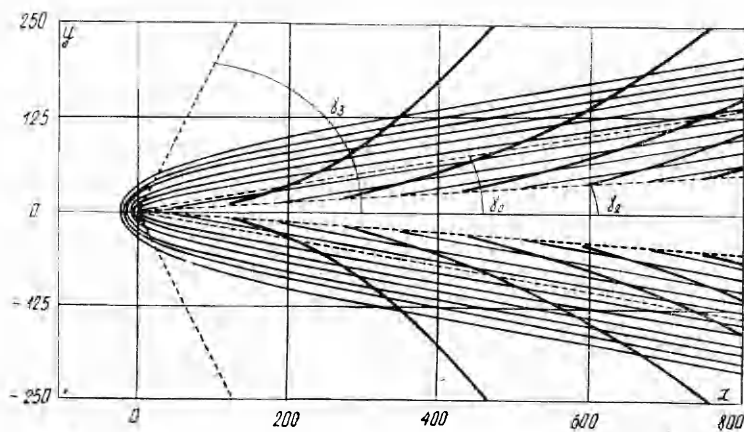
Сплошные ($Q_3 = 0,5$) и штриховые ($Q_3 = -1$) кривые на фиг. 2 представляют собой узловые линии волн ξ_3 . Узловым линиям волн ξ_3 , ξ_2 , ξ_1 в случае $Q_3 = 1$ отвечают тонкие сплошные, жирные сплошные и штрихпунктирные кривые на фиг. 3, 4. Качественно такие же волновые картины образуются и при отсутствии сжимающих и растягивающих усилий ($Q_3 = 0$). Однако диапазоны изменения скорости v , при которой они имеют ме-



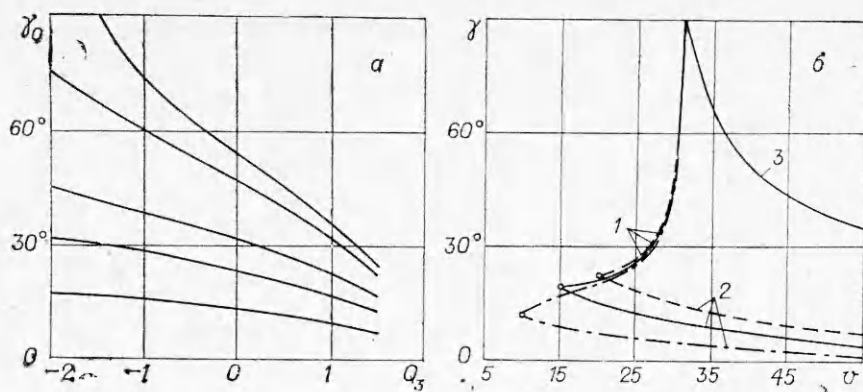
Фиг. 2



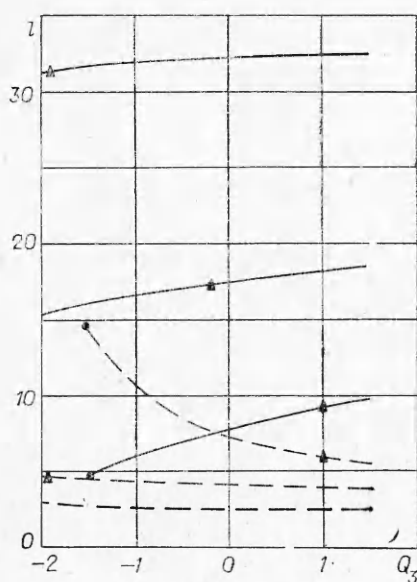
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

сто, меняются с изменением Q . Меняются и величины угловых зон, где генерируются волны $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$. Влияние сжимающих и растягивающих усилий на величину угла γ_0 характеризуется зависимостями, представленными на фиг. 5, а, а на величины углов $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — на фиг. 5, б. Кривые по порядку сверху вниз на фиг. 5, а отвечают скоростям перемещения возмущений, равным 10; 11; 15; 20; 35 м/с. Штриховые ($Q_3 = -1,9$), сплошные ($Q_3 = 0$) и штрихпунктирные ($Q_3 = 1$) кривые 1—3 соответствуют на фиг. 5, б углам $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Кружками помечены значения $\gamma_{1,2}$, отвечающие скорости v_1 . Отметим при этом, что $\gamma_1 = \gamma_3 = \pi/2$ при $v = \sqrt{gH}$, $\gamma_0 = \pi/2$ при $v = v_0$.

Из данных фигур следует, что угол γ_0 при растяжении больший, чем при сжатии и при $Q_3 = 0$. Величина угла γ_3 практически не зависит от изменений Q_3 . Что касается углов γ_1 и γ_2 , то они растут с увеличением растягивающего усилия и убывают с ростом сжимающего. Следовательно, при $v > \sqrt{gH}$ большему сжимающему (растягивающему) усилию отвечает меньшая (большая) угловая зона за движущимися возмущениями, в которой амплитуда волн имеет порядок не ниже R^{-1} . Область

$\gamma_3 < |\gamma| < \gamma_2$, где генерируются волны ζ_2 совместно с ζ_3 , уменьшается при увеличении растягивающего усилия и расширяется с увеличением усилия сжатия.

Если $v_0 < v < \sqrt{gH}$, то увеличение растягивающего (сжимающего) усилия приводит к расширению (сужению) области образования поперечных волн ζ_1 . При этом область $\gamma_1 < |\gamma| < \gamma_2$, в которой образуются поперечные ζ_1 , продольные ζ_2 и изгибные ζ_3 волны, уменьшается с ростом растягивающего усилия и увеличивается с ростом усилия сжатия.

С изменением Q_3 меняется и расстояние l вдоль оси x от области возмущений до первого гребня впереди бегущей волны ζ_3 и позади бегущей волны ζ_1 . При $h = 0,2$ м это иллюстрируется соответственно штриховыми и сплошными линиями на фиг. 6. По порядку сверху вниз сплошные линии отвечают скоростям перемещения возмущений 20; 15; 10 м/с, а штриховые — скоростям 10; 20; 35 м/с. Значения l , помеченные треугольниками и кружками, характеризуют расстояния при величине Q_3 , отвечающей критическим скоростям v_1 и v_0 . Видно, что с увеличением сжимающего усилия расстояние от первого гребня волны ζ_1 до области возмущений растет, а с увеличением растягивающего усилия убывает. Расстояние от первого гребня волны ζ_3 до области возмущений имеет обратную зависимость от изменений Q .

Поступила 24 XII 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Доценко С. Ф. Установившиеся гравитационно-упругие волны от движущихся возмущений. — В кн.: Цунами и внутренние волны. Севастополь: изд. МГИ АН УССР, 1976.
2. Черкесов Л. В. Гидродинамика волн. Киев: Наукова думка, 1980.
3. Букатов А. Е. Влияние продольно сжатой упругой пластинки на неустановившиеся

- волновое движение однородной жидкости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 5.
4. Букатов А. Е., Мордашев В. П. Влияние продольно сжатой упругой пластинки на развитие волнового возмущения потока однородной жидкости с вертикальным сдвигом скорости. — ПМТФ, 1981, № 1.
 5. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967.
 6. Хейсин Д. Е. Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат, 1967.
 7. Петренко М. П., Барсуку Р. П. Колебания и устойчивость сжатых прямоугольных пластин на упругом основании. — ПМ, 1980, т. 16, № 4.
 8. Стокер Д. Д. Волны на воде. М.: ИЛ, 1959.
 9. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.
 10. Черкесов Л. В. Гидродинамика поверхностных и внутренних волн. Киев: Наукова думка, 1976.
 11. Богородский В. В., Гаврило В. П. Лед. Физические свойства. Современные методы гляциологии. Л.: Гидрометеиздат, 1980.

УДК 539.3

О КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ С ПОЛУПЛОСКОСТЬЮ

Э. М. КИМ, В. П. ОЛЬШАНСКИЙ
(Харьков)

Постановка задачи и метод решения. Пусть внешняя нагрузка приложена к оболочке и направлена параллельно краю полубесконечной пластины, как показано на фигуре. Тела спаяны на участке, ширина которого h_0 мала по сравнению с длиной $2l$, так что область контакта можно считать отрезком прямой линии $\{x \in [-l, l], y = 0\}$. В качестве основной неизвестной примем плотность касательных контактных усилий $\tau(x)$. Нормальную составляющую положим равной нулю. Это физически оправдано тем, что жесткость тонкостенной панели на изгиб значительно меньше жесткости растяжения — сжатия. Аналогичное упрощение использовано в [1] при анализе контактного взаимодействия оболочек и в математическом отношении состоит в том, что вместо системы двух имеем одно сингулярное интегральное уравнение. Чтобы составить его, примем в качестве условия контакта равенство деформаций $(u_0)'_x$ в пластине и u'_x в оболочке. Используя функции Грина из [1, 2], имеем

$$(1) \quad \int_{-l}^l \tau(\xi) \Phi(x - \xi) d\xi = f(x),$$

где

$$(2) \quad \Phi(t) = C[t^{-1} + S(t)];$$

$$S(t) = (Cl)^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^{2m} (tl^{-1})^{2m-1} \left(c_{1m} + c_{2m} \ln \frac{|t|}{l} \right);$$

$$C = -(1 + \nu)(3 - \nu)(4\pi Eh)^{-1} - 2(\pi E_0 h_0)^{-1}; \quad \varepsilon = 0,5bl; \quad b^1 = 12(1 - \nu^2)h^{-2}R^{-2};$$

E, ν, h, R — модуль упругости, коэффициент Пуассона, толщина и радиус оболочки; E_0, h_0 — модуль упругости и толщина пластины; $f(x)$ — деформация панели в зоне контакта от внешних нагрузок.

Выражений c_{sm} ($s = 1; 2$), зависящих от m и $\ln \varepsilon$, не приводим. Их можно получить из работы [2]. Убывание c_{sm} обеспечивает сходимость ряда (2) и двух его производных на всей числовой оси.

Для отыскания плотности $\tau(x)$ преобразуем методом равносильной регуляризации выражение (1) в интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$(3) \quad Q(x) = Q_0(x) + L[Q(x)],$$

$$\text{где} \quad Q(x) = \tau(x)(l^2 - x^2)^{1/2};$$

$$Q_0 = P\pi^{-1} + (\pi^2 C)^{-1} \int_{-l}^l (l^2 - t^2)^{1/2} f(t) (t - x)^{-1} dt;$$

$$P = \int_{-l}^l \tau(x) dx; \quad L = -\pi^{-2} \int_{-l}^l Q(\xi) (l^2 - \xi^2)^{-1/2} F(\xi) d\xi;$$

