

УДК 532.546; 533.15

ОСОБЕННОСТИ ЗОН ВНЕДРЕНИЯ ПРИ БУРЕНИИ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ СКВАЖИН

В. В. Шелухин, И. Н. Ельцов*

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

* Институт геофизики СО РАН, 630090 Новосибирск

E-mails: shelukhin@hydro.nsc.ru, yeltsov@uiggm.nsc.ru

Предложена математическая модель зоны проникновения бурового раствора при бурении горизонтальных скважин. Основное предположение — малое различие плотностей внедряемой и пластовой жидкостей. Определена гравитационная асимметрия фронта внедрения и установлено, что со временем одна из его точек становится аномальной и вся зона внедрения теряет выпуклость. Показано, что основная причина асимметрии — различие плотностей. Если закачивается более легкий раствор, то фронт “всплывает”; если раствор тяжелее, то фронт “оседает”. Аномальная точка фронта появляется под скважиной или над ней в зависимости от удельного веса бурового раствора. В случае, когда буровой раствор легче пластовой жидкости, особое свойство точки фронта, лежащей непосредственно под центром скважины, проявляется в том, что со временем она оказывается продвинутой вниз менее, чем соседние точки фронта слева и справа, если продвижение отсчитывать от горизонтальной оси, проходящей через центр скважины. Эта особенность наиболее ярко выражена при небольшом перепаде давления в скважине и пласте, равном некоторому критическому значению: в таких условиях указанная точка фронта вообще является неподвижной. При больших перепадах давления расширение фронта во всех направлениях происходит практически одинаково.

Ключевые слова: фильтрация, горизонтальная скважина, фронт вытеснения.

Введение. При вскрытии нефтяных пластов-коллекторов в прискважинную область внедряется буровой раствор, который имеет, как правило, иные физические свойства, чем пластовые флюиды. В результате образуется зона проникновения, характеристики которой отличаются от неизменной части пласта. В этой области наблюдается неоднородное распределение электрического сопротивления, нефтенасыщенности, концентрации солей и других важных характеристик. Практически для всех современных средств геофизических исследований скважин зона проникновения является мешающим объектом. Для корректного определения параметров пласта необходимо знать свойства зоны проникновения. Для вертикальных скважин в случае применения буровых растворов на глинистой основе создана совместная геофизическая и гидродинамическая модель прискважинной области. Предложена концепция комплексной интерпретации данных электромагнитных методов каротажа и технологических параметров бурения на основе гидродинамического моделирования проникновения [1].

Однако в последнее десятилетие широкое распространение на практике получило горизонтальное бурение. Причем помимо традиционных применяются буровые растворы на

Работа выполнена в рамках междисциплинарного интеграционного проекта № 61 СО РАН (2003 г.) при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 03-05-65299, 03-05-64210).

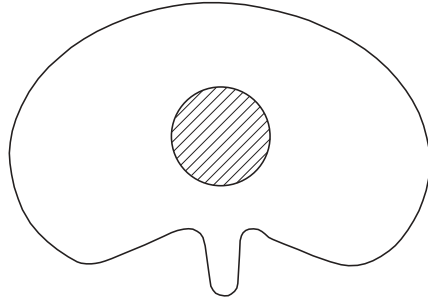


Рис. 1

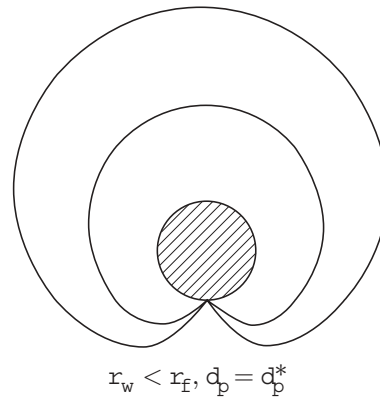


Рис. 2

нефтяной основе, а превышение давления в скважине над пластовым может быть незначительным или даже нулевым. В этом случае внедрение бурового раствора в пласт из-за влияния сил гравитации может быть существенно несимметричным. Как показывают физические эксперименты и компьютерное моделирование, такая асимметрия действительно имеет место [2]. Визуальные наблюдения и измерения с помощью промышленного радара в экспериментах с водонасыщенным песком [3] выявили необычную аномалию фронта при внедрении соляного раствора (рис. 1). Ее причины пока неясны, поэтому требуются дальнейшие исследования, в том числе теоретические.

Данная работа посвящена изучению особенностей проникновения бурового раствора при бурении горизонтальных скважин. Основное внимание сосредоточено на том, как влияет разница давлений в скважине и пласте на геометрию фронта внедрения. Поэтому мы не рассматриваем случай многофазной фильтрации, не учитываем анизотропию пласта и предполагаем, что плотности бурового раствора и пластовой жидкости различаются незначительно.

Показывается, что даже в этих предположениях зона проникновения бурового раствора со временем теряет выпуклость. При этом точка фронта, удаляющаяся от центра скважины медленнее других, оказывается в результате наименее продвинутой (по сравнению с соседними точками слева и справа) не только от центра скважины, но и от горизонтальной оси, проходящей через центр скважины. Отметим, что данный результат получен главным образом средствами теоретического анализа. Кроме того, устанавливается наличие некоторого критического перепада давлений в скважине и пласте δ_p^* . Так, если удельный вес пластовой жидкости превышает удельный вес бурового раствора и $\delta_p = \delta_p^*$, то фронт в нижней точке скважины не движется, т. е. через эту точку скважины не происходит внедрения бурового раствора (рис. 2). При $\delta_p > \delta_p^*$ вторжение через нижнюю точку происходит, но медленнее, чем через соседние точки скважины. Наоборот, если удельный вес пластовой жидкости меньше удельного веса бурового раствора, то при $\delta_p = \delta_p^*$ фронт не движется в самой верхней точке скважины; при $\delta_p > \delta_p^*$ вторжение через эту точку происходит, но медленнее, чем через соседние точки скважины.

1. Математическая модель. Предлагаемая ниже математическая модель описывает наиболее простую ситуацию, когда внедряемая и пластовая жидкости имеют одинаковую вязкость, а плотность бурового раствора ρ_w мало отличается от плотности пластовой жидкости ρ_f . При этом внедряемая в пласт жидкость теряет глинистые частицы на стенке скважины, преодолевает дополнительное сопротивление образующейся корки и входит в пласт, имея ту же плотность, что и пластовая жидкость [4].

Картина течения предполагается одинаковой в каждой плоскости поперечного сечения с координатами x_1, x_2 . Сечением скважины является круг радиуса ε , его центр совпадает с началом системы отсчета. Ось x_2 направлена вертикально вверх, а ось x_1 — вправо параллельно касательной плоскости к поверхности земли. Рассматривается течение в области, отстоящей от центра скважины на расстояние не более чем R , поэтому далее используются цилиндрические координаты (r, φ) , угол φ откладывается от оси x_1 вверх.

Так как плотность пластовой жидкости постоянна, то распространение соли в пористой среде описывается системой уравнений (см. [5])

$$\Phi c_t + \operatorname{div}(\mathbf{q}c) = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{q} = 0, \quad \mathbf{q} = -k(\nabla p + \gamma_f \nabla z), \quad \gamma_f = \rho_f g. \quad (1.1)$$

Течение рассматривается в кольце $\varepsilon < r < R$. Первое уравнение является уравнением переноса, второе — условие несжимаемости, третье — закон фильтрации Дарси. Приняты следующие обозначения: Φ — пористость; c — массовая концентрация соли; \mathbf{q} — вектор скорости фильтрации; p — давление; k — коэффициент фильтрации; g — ускорение свободного падения; γ_f — удельный вес пластовой жидкости; z — функция глубины ($z = x_2$).

Вдали от скважины давление распределено по гидростатическому закону, поэтому выполняется краевое условие

$$r = R: \quad H \equiv p + \gamma_f z = p_f = \text{const}. \quad (1.2)$$

Равенство

$$r = \varepsilon: \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = -\beta[p] \quad (1.3)$$

есть краевое условие на стенке скважины, где \mathbf{n} — вектор внешней нормали к окружности $r = \varepsilon$. Здесь β^{-1} — коэффициент сопротивления; $[p]$ — скачок давления,

$$[p] = \lim_{\delta \rightarrow 0} (p(1 + \delta, \varphi) - p(1 - \delta, \varphi)).$$

Условие (1.3) означает, что скорость внедрения жидкой фракции бурового раствора линейно зависит от скачка давления. Как следует из (1.2), p_f есть давление в пласте на уровне центра скважины на расстоянии R от нее.

Еще одно предположение заключается в том, что величина напора $H_w \equiv p + \rho_w g z$ на стенке скважины одинакова для всех частиц бурового раствора. Так, в частности, будет, если циркулирующий в затрубном пространстве буровой раствор описывается гидродинамическими уравнениями Эйлера безвихревого движения. В этом случае имеет место интеграл Бернулли, т. е.

$$\rho_w \mathbf{v}^2 / 2 + p + \rho_w g z = \text{const},$$

поэтому напор одинаков для всех частиц, имеющих одинаковую скорость $|\mathbf{v}|$. Таким образом, на стенке скважины имеет место условие постоянства напора

$$r = \varepsilon: \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} p(1 - \delta, \varphi) + \gamma_w z = p_w \equiv \text{const}, \quad \gamma_w = \rho_w g,$$

и поэтому равенство (1.3) можно записать в виде

$$r = \varepsilon: \quad H_r - \beta_1 H + \beta_1 (\delta_\gamma r \sin \varphi + p_w) = 0, \quad \beta_1 = \beta/k, \quad \delta_\gamma = \gamma_f - \gamma_w. \quad (1.4)$$

Систему уравнений (1.1) необходимо дополнить краевым и начальным условиями для концентрации солей

$$c|_{r=\varepsilon} = c_1, \quad c|_{t=0} = c_0. \quad (1.5)$$

Заметим, что первое из условий (1.5) для c имеет смысл только для тех точек круга $r = \varepsilon$, в которых вектор скорости \mathbf{q} направлен в пласт, т. е. должно выполняться неравенство

$$\frac{\partial H}{\partial n} \leq 0 \quad \text{при} \quad r = \varepsilon. \quad (1.6)$$

Ниже это условие будет сформулировано в терминах параметра δ_p .

2. Уравнения для фронта вторжения. Напор H не зависит от времени и находится как решение следующей краевой задачи в полярных переменных:

$$\Delta H \equiv r(rH_r)_r + H_{\varphi\varphi} = 0, \quad H|_{r=R} = p_f, \quad H_r - \beta_1 H + \beta_1(\delta_\gamma r \sin \varphi + p_w)|_{r=\varepsilon} = 0.$$

Методом разделения переменных находим, что

$$H = p_f - b_3 \ln(r/R) + (-b_1 r + b_2 r^{-1}) \sin \varphi, \quad (2.1)$$

где

$$b_1 = \frac{\beta_1 \varepsilon \delta_\gamma}{(1 - \beta_1 \varepsilon) + (1 + \beta_1 \varepsilon)(R/\varepsilon)^2}, \quad b_2 = b_1 R^2, \quad b_3 = \frac{\delta_p}{(\beta_1 \varepsilon)^{-1} + \ln(R/\varepsilon)}, \quad \delta_p \equiv p_w - p_f.$$

Из этого решения видно, что картина течения симметрична относительно вертикальной оси. Найдем функцию тока ψ из условий $\psi_{x_1} = kH_{x_2}$, $\psi_{x_2} = -kH_{x_1}$ с помощью криволинейного интеграла

$$\psi(x_1, x_2) = \int_{(x_1^0, x_2^0)}^{(x_1, x_2)} -kH_{x_1} dx_2 + kH_{x_2} dx_1 = \int_{L_1} \dots + \int_{L_2} \dots, \quad (x_1, x_2) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Здесь $(x_1^0, x_2^0) = (\varepsilon, 0)$. Отрезок L_1 соединяет точку (x_1^0, x_2^0) с точкой $(x_1^*, x_2^*) = (r, 0)$. Параметрическое задание отрезка L_1 дается в виде

$$L_1: \quad x_1 = \varepsilon + \mu(r - \varepsilon), \quad x_2 = 0, \quad 0 \leq \mu \leq 1.$$

Криволинейный отрезок L_2 представляет собой часть окружности с параметрическим заданием

$$L_2: \quad x_1 = r \cos(\mu\varphi), \quad x_2 = r \sin(\mu\varphi), \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{x_2}{x_1}, \quad 0 \leq \mu \leq 1.$$

Каждый интеграл \int_{L_i} вычисляется по формуле

$$\int_{L_i} \dots = \int_0^1 -kH_{x_1}(x_1(\mu), x_2(\mu))x_2'(\mu) + kH_{x_2}(x_1(\mu), x_2(\mu))x_1'(\mu) d\mu,$$

где $x_1 = x_1(\mu)$, $x_2 = x_2(\mu)$ — параметрическое задание отрезка L_i . Окончательно получаем представление для функции ψ тока в полярных координатах

$$\psi(r, \varphi) = kb_3\varphi - k(b_1 r + b_2/r) \cos \varphi + \text{const}.$$

Теперь траектория каждой жидкой частицы, выходящей из точки скважины (ε, φ_0) , задается равенством $\psi(r, \varphi) = \psi(\varepsilon, \varphi_0)$.

Уравнение переноса в полярных координатах имеет вид

$$c_t - \lambda(c_r H_r + r^{-2} c_\varphi H_\varphi) = 0, \quad \lambda = k/\Phi,$$

или

$$c_t + \lambda[b_3 r^{-1} + (b_1 + b_2 r^{-2}) \sin \varphi] c_r - \lambda \cos \varphi (-b_1 r^{-1} + b_2 r^{-3}) c_\varphi = 0.$$

Известно, что решение подобных уравнений сводится к построению характеристик, вдоль которых значение решения не изменяется. В пространстве переменных r, φ, t характеристики задаются уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \lambda[b_3 r^{-1} + (b_1 + b_2 r^{-2}) \sin \varphi], & r(0) &= \varepsilon, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \lambda[b_1 r^{-1} - b_2 r^{-3}] \cos \varphi, & \varphi(0) &= \varphi_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Для построения фронта внедрения достаточно найти решение системы (2.2):

$$r = r(t, \varphi_0), \quad \varphi = \varphi(t, \varphi_0), \quad \varphi_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (2.3)$$

Равенства (2.3) представляют собой параметрическое задание этого фронта с параметром φ_0 . Исключение параметра φ_0 и дает уравнение самого фронта

$$r = r(t, \varphi). \quad (2.4)$$

Перейдем к безразмерным переменным. Пусть τ — характерное время процессов распространения, например одни сутки. Обозначим $r = \varepsilon \hat{r}$, $t = \tau \hat{t}$. Тогда безразмерные функции $\hat{r}(\hat{t})$, $\varphi(\hat{t})$ (далее знак “ \wedge ” у безразмерных величин опущен) удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= B_3 r^{-1} + (B_1 + B_2 r^{-2}) \sin \varphi, & r(0) &= 1, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= (B_1 r^{-1} - B_2 r^{-3}) \cos \varphi, & \varphi(0) &= \varphi_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \end{aligned} \quad (2.5)$$

где безразмерные параметры B_i заданы формулами

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{k\tau\beta_1\delta_\gamma}{\Phi[(1 - \beta_1\varepsilon) + (1 + \beta_1\varepsilon)(R/\varepsilon)^2]}, \\ B_2 &= \frac{k\tau\beta_1\delta_\gamma R^2}{\Phi\varepsilon^2[(1 - \beta_1\varepsilon) + (1 + \beta_1\varepsilon)(R/\varepsilon)^2]}, & B_3 &= \frac{k\tau\delta_p}{\Phi\varepsilon^2[(\beta_1\varepsilon)^{-1} + \ln(R/\varepsilon)]}. \end{aligned}$$

Обозначим $v = \sin \varphi$. Тогда (2.5) эквивалентна следующей задаче:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= B_3 r^{-1} + (B_1 + B_2 r^{-2})v, & r(0) &= 1, \\ \frac{dv}{dt} &= (1 - v^2)(B_1 r^{-1} - B_2 r^{-3}), & v(0) &= v_0 \in [-1, 1]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

3. Качественный анализ фронта вторжения. Поведение фронта определяется главным образом параметрами δ_p и δ_γ . В зависимости от знака δ_γ возможны три случая: $\delta_\gamma = 0$, $\delta_\gamma > 0$ и $\delta_\gamma < 0$. Рассмотрим их последовательно.

3.1. Пусть $\delta_\gamma = 0$, тогда $B_1 = B_2 = 0$ и фронт определяется уравнениями

$$\dot{r} = B_3/r, \quad \dot{v} = 0, \quad r(0) = 1, \quad v(0) = v_0 \in [-1, 1]. \quad (3.1)$$

Так как при $r = \varepsilon$

$$H_r = -\frac{\beta_1\delta_p}{1 + \beta_1\varepsilon \ln(R/\varepsilon)},$$

то необходимое условие вторжения (1.6) приводит к неравенству $\delta_p \geq 0$. Поэтому $B_3 \geq 0$ и решение задачи (3.1) дается равенствами

$$r(t) = \sqrt{1 + 2tB_3}, \quad v(t) = v_0, \quad B_3 = \frac{k\tau\delta_p}{\Phi\varepsilon^2((\beta_1\varepsilon)^{-1} + \ln(R/\varepsilon))}. \quad (3.2)$$

Значит, фронт является окружностью с центром в начале координат и радиусом, задаваемым формулой (3.2).

3.2. Пусть $\delta_\gamma > 0$. Прежде всего выясним условия выполнения неравенства (1.6). С помощью (1.4) и (2.1) данное неравенство записывается в виде

$$-\delta_p - b_3 \ln(\varepsilon/R) + \max_{\varphi} (\sin \varphi [-b_1 \varepsilon + b_2 \varepsilon^{-1} - \delta_\gamma \varepsilon]) \leq 0,$$

т. е.

$$\frac{\delta_p}{\varepsilon \delta_\gamma} \geq \frac{(1 + (R/\varepsilon)^2)(1 + (\beta_1 \varepsilon) \ln(R/\varepsilon))}{(1 - \beta_1 \varepsilon) + (1 + \beta_1 \varepsilon)(R/\varepsilon)^2} \equiv \frac{\delta_p^*}{\varepsilon \delta_\gamma}. \quad (3.3)$$

В терминах B_i неравенство (3.3) принимает простую форму

$$B_3 \geq B_1 + B_2. \quad (3.4)$$

Неравенство (3.4) есть условие на давление в скважине p_w , при котором происходит внедрение жидкой фракции бурового раствора в пласт по всему периметру скважины. В дальнейшем предполагается, что неравенство (3.4) выполнено.

Анализ фронта внедрения будет базироваться на следующем математическом утверждении: *при каждом $t > 0$ функция $r(t, \varphi)$ в (2.4), задающая фронт, монотонно возрастает с ростом φ , $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$. При этом*

$$r_\varphi > 0, \quad \text{если } -\pi/2 < \varphi < \pi/2, \quad \text{а если } \varphi = \pm\pi/2, \quad \text{то } r_\varphi = 0. \quad (3.5)$$

Докажем это утверждение. Так как $r_\varphi = r_v \cos \varphi$, то достаточно установить, что

$$r_v(t, v) > 0 \quad \text{при } t > 0, \quad -1 \leq v \leq 1, \quad (3.6)$$

где

$$r = r(t, v) \quad (3.7)$$

есть уравнение границы фронта внедрения в переменных (v, r) при фиксированном $t > 0$.

Продифференцируем равенство (3.7) по v_0 :

$$\frac{dr}{dv_0} = \frac{dr}{dv} \frac{dv}{dv_0}, \quad \frac{dr}{dv} = \frac{\alpha}{\omega}, \quad \alpha = \frac{dr}{dv_0}, \quad \omega = \frac{dv}{dv_0}.$$

Функции $\alpha(t, v_0)$, $\omega(t, v_0)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\alpha}{dt} = -B_3 r^{-2} \alpha - 2B_2 r^{-3} v \alpha + (B_1 + B_2 r^{-2}) \omega, \quad \alpha(0, v_0) = 0, \quad (3.8)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = (1 - v^2)(-B_1 r^{-2} + 3B_2 r^{-4}) \alpha - 2(B_1 r^{-1} - B_2 r^{-3}) v \omega, \quad \omega(0, v_0) = 1,$$

которые получаются дифференцированием равенств (2.6) по v_0 .

Пусть $[0, T]$ — интервал времени, на котором определено решение задачи (2.6) и значение r не превосходит R/ε . Покажем, что α и ω строго положительны на всем интервале $(0, T]$. Пусть $T_1(v_0)$ — первый момент времени, когда $\omega(t, v_0)$ обращается в нуль. Допустим, что $T_1(v_0) < T$. Рассматривая первое уравнение системы (3.8) как обыкновенное дифференциальное уравнение для α , получаем следующее представление:

$$\alpha(t, v_0) = A_1 \int_0^t \omega(s, v_0) G_1(s, v_0) ds, \quad A_1(t, v_0) = \exp \left(\int_0^t F_1(s, v_0) ds \right), \quad (3.9)$$

$$F_1(t, v_0) = -B_3 r^{-2} - 2B_2 r^{-3} v, \quad G_1(t, v_0) = (B_1 + B_2 r^{-2}) A_1^{-1}(t, v_0).$$

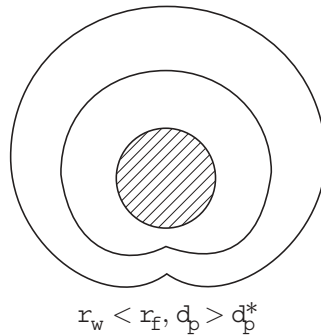


Рис. 3

Поэтому $\alpha \geq 0$ на интервале $[0, T_1(v_0)]$. Аналогично из второго уравнения системы (3.8) получаем

$$\omega(t, v_0) = A_2 + A_2 \int_0^t \alpha(s, v_0) G_2(s, v_0) ds, \quad A_2 = \exp\left(\int_0^t F_2(s, v_0) ds\right), \quad (3.10)$$

$$F_2(t, v_0) = -2(B_1 r^{-1} - B_2 r^{-3})v, \quad G_2(t, v_0) = (1 - v^2)r^{-4}A_2^{-1}(3B_2 - B_1 r^2).$$

Так как

$$3B_2 - B_1 r^2 = B_1(3(R/\varepsilon)^2 - r^2) \geq 2B_1(R/\varepsilon)^2 \geq 0,$$

то $\omega(T_1(v_0), v_0) > 0$, что является противоречием. Таким образом, $\omega(t, v_0)$ строго положительна на всем интервале $[0, T]$. Из (3.9) и (3.10) нетрудно заключить, что $\alpha(t, v_0) > 0$ на $(0, T]$. Поэтому неравенство (3.6) и соотношения (3.5) выполняются.

Доказанное утверждение означает, что в каждый фиксированный момент времени фронт менее всего вытянут в направлении $\varphi = -\pi/2$ от центра скважины, т. е. вниз, и наиболее продвинуто в направлении $\varphi = \pi/2$, т. е. вверх. При этом продвижение в направлении $\varphi = \varphi_2$ больше, чем в направлении $\varphi = \varphi_1$, если угол φ_2 больше, чем угол φ_1 (рис. 3). Далее глубины проникновения в направлениях $\varphi = \pm\pi/2$ будут представлены явными формулами.

Рассмотрим критический случай

$$B_3 = B_1 + B_2. \quad (3.11)$$

При этом условии система (2.6) при $v_0 = -1$ имеет решение, не зависящее от времени:

$$r = 1, \quad v = -1.$$

Значит, если перепад давлений δ_p является критическим, т. е. $\delta_p = \delta_p^*$, то фронт “стоит” в нижней точке $r = 1$, $\varphi = -\pi/2$ (см. рис. 2).

Далее будем предполагать, что $B_3 > B_1 + B_2$, т. е. $\delta_p > \delta_p^*$, и найдем расстояния наименьшего и наибольшего удаления от центра $r_1(t)$ и $r_2(t)$. Эти функции находятся как решения уравнений

$$\dot{r}_1 = \frac{B_3}{r_1} - \frac{B_2}{r_1^2} - B_1, \quad \dot{r}_2 = \frac{B_3}{r_2} + \frac{B_2}{r_2^2} + B_1, \quad r_1(0) = r_2(0) = 1. \quad (3.12)$$

Их интегрирование приводит к формулам

$$r_1 - 1 + \ln\left(\frac{r_1 - c_1}{1 - c_1}\right)^n \left(\frac{r_1 - c_2}{1 - c_2}\right)^m = -B_1 t,$$

$$r_2 - 1 + \ln \left(\frac{r_2 + c_2}{1 + c_2} \right)^n \left(\frac{r_2 + c_1}{1 + c_1} \right)^m = B_1 t, \quad (3.13)$$

где $c_1 = b_4 + \varkappa$, $c_2 = b_4 - \varkappa$, $n = b_4 + (\varkappa + b_4^2/\varkappa)/2$, $m = b_4 - (\varkappa + b_4^2/\varkappa)/2$, $b_4 = B_3/(2B_1)$, $\varkappa^2 = B_3^2/(4B_1^2) - B_2/B_1$. Равенства (3.13) позволяют с любой точностью вычислить величины r_1 и r_2 , т. е. глубины проникновения бурового раствора вниз и вверх по вертикали, проходящей через центр скважины. Из уравнений (3.12) также можно получить приближенную формулу для коэффициента симметрии вдоль вертикального направления $S(t) \equiv (r_1 - 1)/(r_2 - 1)$, характеризующего несимметрию фронта вдоль центральной вертикали. Так как $r_i - 1 = t\dot{r}_i(0) + o(t)$, то

$$S(t) = \frac{r_1(t) - 1}{r_2(t) - 1} \approx \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \quad \xi = \frac{B_1 + B_2}{B_3}.$$

Чем меньше прошло времени с начала вторжения, тем точнее эта формула. Симметрия $S = 100\%$, если $\xi = 0$, т. е. фронт круговой. Симметрия $S = 0$, если $\xi = 1$, т. е. фронт “стоит” в нижней точке скважины.

Вообще, можно ввести коэффициент симметрии вдоль направления φ :

$$S_\varphi(t) = \frac{r(t, -\varphi) - 1}{r(t, \varphi) - 1}, \quad \varphi \in [0, \pi/2],$$

где $r = r(t, \varphi)$ — уравнение фронта, получающееся из решения $r = r(t, \varphi_0)$, $\varphi = \varphi(t, \varphi_0)$ системы (2.5) после исключения параметра φ_0 . Очевидно, что коэффициент симметрии монотонно уменьшается с ростом угла и принимает наименьшее значение при $\varphi = \pi/2$:

$$S_0(t) = 1, \quad S_{\varphi_1}(t) > S_{\varphi_2}(t) \quad \text{при} \quad 0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq \pi/2, \quad S_{\pi/2}(t) = S.$$

Со временем ближайшая к центру скважины точка фронта с координатами $r = r_1(t)$, $\varphi = -\pi/2$ становится аномальной в том смысле, что соседние с ней точки фронта слева и справа оказываются лежащими ниже горизонтальной прямой $z = r_1(t)$ и тем самым зона проникновения уже не является выпуклым множеством. В критическом случае, когда $B_3 = B_1 + B_2$, это свойство доказать несложно, а в общем случае оно подтверждается сравнительно простыми расчетами.

Действительно, горизонтальная прямая $z = -r_1(t)$ задается в полярных координатах уравнением $r \sin \varphi = -r_1(t)$ или $rv = -r_1(t)$, где $v := \sin \varphi$. Для такой линии

$$\frac{dr}{dv} = \frac{r_1(t)}{v^2},$$

поэтому для уравнения фронта $r = r(v, t)$ достаточно установить, что начиная с некоторого момента времени выполняется неравенство

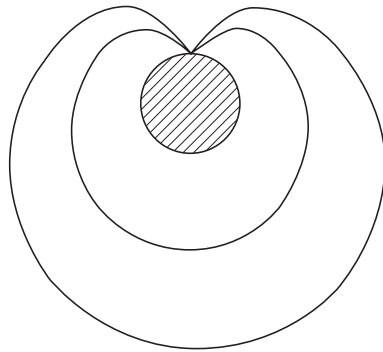
$$J(t) := \left. \frac{dr}{dv} \right|_{v=-1} > r_1(t). \quad (3.14)$$

Полагая в формулах (3.8) $v = -1$, находим, что функция $J(t) := (\alpha/\omega)|_{v=-1}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dJ}{dt} = F_3 J + B_1 + \frac{B_2}{r_1^2}, \quad F_3(t) := \frac{4B_2}{r_1^3} - \frac{2B_1}{r_1} - \frac{B_3}{r_1^2}, \quad J(0) = 0.$$

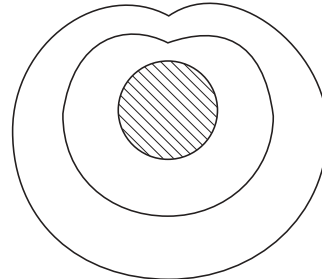
Его решение дается формулами

$$J = A_3(t) \int_0^t \left(B_1 + \frac{B_2}{r_1^2(\tau)} \right) A_3^{-1}(\tau) d\tau, \quad A_3 := \exp \left(\int_0^t F_3(\tau) d\tau \right). \quad (3.15)$$



$$r_w > r_f, d_p = d_p^*$$

Рис. 4



$$r_w > r_f, d_p > d_p^*$$

Рис. 5

В критическом случае $r_1(t) \equiv 1$, поэтому формулы (3.15) упрощаются:

$$J(t) = (B_1 + B_2) e^{3(B_2 - B_1)t} \int_0^t e^{-3(B_2 - B_1)s} ds.$$

Отсюда ясно, что начиная с некоторого момента времени $J(t) > 1$. Расчеты интегралов (3.15) с помощью формул (3.13) показывают, что неравенство (3.14) выполняется при достаточно больших t и в общем случае. Таким образом, со временем точка фронта вторжения, лежащая непосредственно под центром скважины, неизбежно становится аномальной.

3.3. Пусть $\delta_\gamma < 0$. В этом случае математический анализ уравнений фронта проводится по той же схеме, что и при $\delta_\gamma > 0$. Для этого достаточно заменить положительные параметры B_1 и B_2 на отрицательные: $B_1 := -|B_1|$, $B_2 := -|B_2|$. Приведем лишь окончательные результаты. Необходимое условие вторжения (1.6) обеспечивается при выполнении неравенства

$$B_3 \geq |B_1| + |B_2|.$$

Свойство монотонности фронта при каждом фиксированном моменте времени выражается условиями

$$r_\varphi < 0, \quad \text{если} \quad -\pi/2 < \varphi < \pi/2, \quad \text{а если} \quad \varphi = \pm\pi/2, \quad \text{то} \quad r_\varphi = 0. \quad (3.16)$$

При $B_3 = |B_1| + |B_2|$ фронт “стоит” в верхней точке скважины (рис. 4). Вообще, фронт является симметричным отражением (относительно горизонтальной оси $x_2 = 0$) фронта, полученного для случая $\delta_\gamma := |\delta_\gamma|$ (рис. 5). Это вытекает из того, что система уравнений (2.5) обладает следующей симметрией. Пусть $B_1 < 0$, $B_2 < 0$, $B_3 > 0$. Обозначим решение задачи (2.5) через $r(t; B_1, B_2, B_3, \varphi_0)$, $\varphi(t; B_1, B_2, B_3, \varphi_0)$. Введем функции $r_1(t) = r(t; B_1, B_2, B_3, \varphi_0)$, $\varphi_1(t) = -\varphi(t; B_1, B_2, B_3, \varphi_0)$. Тогда легко проверяется, что (r_1, φ_1) есть решение задачи (2.5) при замене B_1 на $|B_1|$, B_2 на $|B_2|$, B_3 на B_3 и φ_0 на $-\varphi_0$, т. е.

$$\begin{aligned} \frac{dr_1}{dt} &= B_3 r_1^{-1} + (|B_1| + |B_2| r_1^{-2}) \sin \varphi_1, & r_1(0) &= 1, \\ \frac{d\varphi_1}{dt} &= (|B_1| r_1^{-1} - |B_2| r_1^{-3}) \cos \varphi_1, & \varphi_1(0) &= -\varphi_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

При $\delta_\gamma < 0$ коэффициент симметрии определяется аналогично:

$$S_\varphi(t) = \frac{r(t, \varphi) - 1}{r(t, -\varphi) - 1}, \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

где $r = r(t, \varphi)$ — уравнение фронта.

4. Численный анализ фронта вторжения. Свойство монотонности фронта по угловой переменной φ , выраженное условиями (3.5) или (3.16), дает лишь качественную картину зоны проникновения для фиксированных моментов времени. Для изучения геометрии фронта и его динамики были проведены расчеты системы уравнений (2.5) по методу Рунге — Кутты. Фронт строился как набор точек $(r_m^n, \varphi_m^n) = (r(t_n, \varphi_m), \varphi(t_n, \varphi_m))$ для дискретных моментов времени t_n и для дискретного набора начальных данных φ_m , где $r(t_n, \varphi_m), \varphi(t_n, \varphi_m)$ — численное решение задачи Коши (2.5).

Вычисления проводились для некоторого типичного набора физических параметров, использованных при анализе вертикальных скважин [1]: радиус скважины $\varepsilon = 0,108$ м, характерный размер пласта $R = 10$ м, пористость $\Phi = 0,2$, приведенный коэффициент фильтрации $k_0 \equiv k\gamma_f = 0,1$ м/сут.

При определении численного значения коэффициента сопротивления β_1 будем полагать, что он мало зависит от разности удельных весов δ_γ , поэтому его можно рассчитать с помощью формул (3.2) из опытов, в которых $\delta_\gamma = 0$. Пусть при некотором контрольном перепаде давления δ_p^c за контрольное время τ (соответствующее безразмерному времени $t = 1$) зона распространения достигла значения d (безразмерное значение равно d/ε). Тогда

$$\frac{d}{\varepsilon} = \sqrt{1 + 2B_3}, \quad B_3 = \frac{k\tau\delta_p^c}{\Phi\varepsilon^2((\beta_1\varepsilon)^{-1} + \ln(R/\varepsilon))}.$$

Отсюда находим приведенный коэффициент сопротивления $\beta_0 = \beta_1 k\gamma_f$:

$$\beta_0 = \frac{\Phi k_0 (d^2 - \varepsilon^2)}{2\varepsilon k_0 \tau \delta_p^{c,0} - \varepsilon \Phi (d^2 - \varepsilon^2) \ln(R/\varepsilon)}, \quad \delta_p^{c,0} = \frac{\delta_p^c}{\gamma_f}. \quad (4.1)$$

Примем за контрольные параметры те, которые рассчитаны в [1] для вертикальной скважины с радиально симметричным фронтом вторжения: $\tau = 1$ сут, $\delta_p^{c,0} = 100$ м, $d = 0,508$ м. Тогда из (4.1) получаем, что $\beta_0 = 2,3 \cdot 10^{-3}$ 1/сут.

Безразмерные параметры B_i имеют представление

$$B_1 = \frac{\tau\beta_0(1 - \gamma_w/\gamma_f)}{\Phi(1 - \beta_0\varepsilon/k_0 + (1 + \beta_0\varepsilon/k_0)(R/\varepsilon)^2)},$$

$$B_2 = B_1 \left(\frac{R}{\varepsilon}\right)^2, \quad B_3 = \frac{\tau k_0 \delta_p^0}{\Phi\varepsilon^2(k_0/(\varepsilon\beta_0) + \ln(R/\varepsilon))}.$$

По ним и находятся их численные значения.

Отношение удельных весов γ_w/γ_f меняется в пределах от 0,95 до 1,20. Приведенный скачок давления $\delta_p^0 \equiv \delta_p/\gamma_f$ может достигать 600 м.

Расчеты показывают, что фронт вторжения расширяется со временем вдоль любого луча $\varphi = \text{const}$. Рис. 2–5 иллюстрируют это при сравнительно небольших значениях δ_p^0 для двух последовательных моментов времени $t_1 = 0,5$ сут и $t_2 = 1$ сут, когда $\varepsilon = 0,108$ м, $R = 10$ м, $\Phi = 0,2$, $k_0 = 0,1$ м/сут, $\tau = 1$ сут, $\beta_0 = 2,3 \cdot 10^{-3}$ 1/сут, $\gamma_w/\gamma_f = 0,95$ или $\gamma_w/\gamma_f = 1,20$.

В заключение приведем результаты вычисления вертикальной симметрии S для пяти последовательных моментов времени (суток) в случае, когда $\gamma_w/\gamma_f - 1 = 0,20$ и $\delta_p^0 = 100$ м: 0,5 сут — 0,9998; 1 сут — 0,99991; 2 сут — 0,99994; 4 сут — 0,99997; 5 сут — 0,99998. Эти данные получены путем численного решения задачи Коши (2.5).

Вычислим S по приближенной формуле $S \simeq (1 - \xi)/(1 + \xi)$. Так как

$$\xi \equiv \frac{|B_1| + |B_2|}{B_3} = \frac{\gamma_w/\gamma_f - 1}{\delta_p^0} \frac{(\varepsilon^2 + R^2)(1/\varepsilon + (\beta_0/k_0) \ln(R/\varepsilon))}{1 - \varepsilon\beta_0/k_0 + R^2/\varepsilon^2 + \varepsilon\beta_0 R^2/(k_0\varepsilon^2)},$$

$\xi = 2,2 \cdot 10^{-4}$, $S = (1 - \xi)/(1 + \xi) = 99,956 \%$. Таким образом, при типичных условиях бурения фронт вторжения является практически круговым.

На стадии бурения большой перепад давления обеспечивает циркуляцию бурового раствора. После прекращения бурения перепад давления резко снижается и наступает вторая фаза внедрения, когда внедрившийся буровой раствор начинает “подпираться” следующей порцией раствора, но уже под меньшим давлением. Таким образом, возникает задача о деформации почти кругового фронта, созданного на стадии бурения. В свете сказанного данную работу можно также толковать как разработку методики расчета начальных условий для второй фазы внедрения.

Авторы признательны А. А. Кашеварову за участие в обсуждении представленных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кашеваров А. А., Ельцов И. Н., Эпов М. И. Гидродинамическая модель формирования зоны проникновения при бурении скважин // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 6. С. 148–157.
2. Alpak F. O., Dussan E. B., Torres-Verdin V. C. Numerical simulation of mud-filtrate invasion in horizontal wells and sensitivity analysis of array induction tools // SPWLA 43, Ann. Log. Symp. June 2–5, 2002.
3. Peeters M., Kovats J., Moita C., et al. Monitoring and modeling invasion using ground penetrating radar and flow simulation programs // Ibid.
4. Капранов Ю. И. О фильтрации взвеси твердых частиц // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63, вып. 4. С. 620–628.
5. Chavent G., Jaffre J. Mathematical models and finite elements for reservoir simulation. Amsterdam: North-Holland, 1986.

*Поступила в редакцию 12/III 2004 г.,
в окончательном варианте — 8/IV 2004 г.*
