

Е. А. Краснопевцев*(Новосибирск)***ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ – ФРЕНЕЛЯ
В СПЕКЛ-ИНТЕРФЕРОМЕТРИИ**

Рассмотрено преобразование Фурье – Френеля на основе геометрической оптики, осуществляемое собирающей и рассеивающей линзами и используемое в спекл-интерферометрии для определения с варьируемой чувствительностью смещения в плоскости и наклона элементов поверхности деформируемого тела.

Введение. Преобразование Фурье – Френеля является обобщением дробного фурье-преобразования, для которого расстояния транспарант–собирающая линза и линза–экран одинаковы. Дробное преобразование Фурье применяется в теории преобразования сигналов, при создании оптических систем [1], в голографической и спекл-интерферометрии [2, 3]. Интегральное оптическое преобразование традиционно определяется на основе волновой теории [4]. В работе [5] фурье-преобразование получено из геометрической оптики. В предлагаемой работе преобразование Фурье – Френеля (см. [6, 7]), осуществляемое собирающей и рассеивающей линзами при произвольных расстояниях транспарант–линза и линза–экран, рассмотрено с точки зрения геометрической оптики в параксиальных лучах и параболическом приближении. Установлены свойства преобразований. Использование результатов в спекл-интерферометрии позволяет определить сдвиг и наклон элементов поверхности деформируемого тела с варьируемой чувствительностью. Преобразование Фурье – Френеля дает более широкий диапазон измерений по сравнению с преобразованием Фурье благодаря использованию дополнительных варьируемых параметров.

Преобразование Фурье – Френеля на основе собирающей линзы. Функцию пространственной переменной $f(x)$ представим в виде множества точечных синфазных излучателей x_i , расположенных в плоскости на расстоянии z от собирающей линзы L с фокусным расстоянием f (рис. 1). Каждый излучатель характеризуется амплитудой $f(x_i)$, тогда

$$f(x) = \int f(x_i) \delta(x - x_i) dx_i.$$

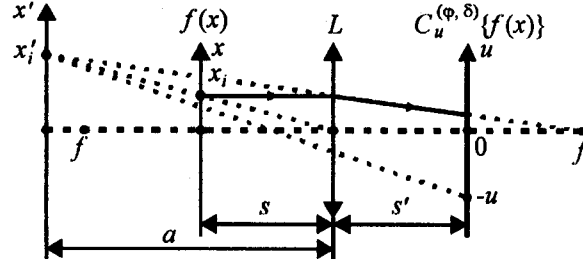


Рис. 1. Преобразование на основе собирающей линзы

Считаем линзу линейным преобразователем, обеспечивающим выполнение принципа суперпозиции, тогда искомое преобразование

$$C_u\{f(x)\} = \int f(x_i) C_u\{\delta(x - x_i)\} dx_i.$$

Излучатель x , формирует в плоскости, проходящей через ось u , сферическую волну

$$C_u\{\delta(x - x_i)\} = \frac{a}{s} \frac{1}{a + s'} \exp[i\Phi_i(-u)],$$

где

$$\Phi_i(-u) = \Phi(x'_i) + \frac{2\pi}{\lambda} [(a + s')^2 + (x'_i - u)^2]^{1/2} \cong$$

$$\cong \Phi(x'_i) + \frac{2\pi}{\lambda} (a + s') \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x'_i - u}{a + s'} \right)^2 \right],$$

$$\Phi(x'_i) \cong -\frac{2\pi}{\lambda} (a - s) \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x'_i - x_i}{a - s} \right)^2 \right], \quad x'_i = x_i \frac{a}{s}, \quad a = \frac{s}{f - s} f.$$

Определяя $s = f(1 - \cos\varphi)$, $\frac{s}{a} = \cos\varphi$, $\frac{s - a}{s^2} = -\frac{1}{f \cos\varphi}$, $s' = s + \delta f$, $q^2 = = q_0^2(\sin\varphi + \delta \operatorname{ctg}\varphi)$, $q_0 = \sqrt{\lambda f}$, получаем $\frac{s}{a}(a + s') = \frac{q^2}{\lambda} \sin\varphi$. Тогда

$$\begin{aligned} \Phi_i(-u) &= \frac{2\pi(2s + \delta f)}{\lambda} + \frac{\pi}{\lambda} \left[\frac{(x'_i - u)^2}{a + s'} - \frac{(x'_i - x_i)^2}{a - s} \right] = \\ &= \frac{2\pi(2s + \delta f)}{\lambda} + \frac{\pi}{q^2} \left[\frac{u^2 + x_i^2(1 - \delta/\cos\varphi)}{\operatorname{tg}\varphi} - \frac{2x_i u}{\sin\varphi} \right] \end{aligned}$$

содержит параметры φ и δ . В результате искомое преобразование

$$C_u^{(\varphi, \delta)} \{f(x)\} = \frac{\lambda \exp [i2\pi(2s + \delta f)/\lambda]}{q^2 \sin \varphi} \times \\ \times \int f(x) \exp \left\{ \frac{i\pi}{q^2} \left[\frac{u^2 + x^2(1 - \delta/\cos \varphi)}{\operatorname{tg} \varphi} - \frac{2xu}{\sin \varphi} \right] \right\} dx.$$

Переходя к безразмерным переменным $x = x'q$, $u = u'q$, получаем преобразование Фурье – Френеля для собирающей линзы:

$$C_u^{(\varphi, \delta)} \{f(x)\} = \frac{e^{i\varphi/2}}{\sqrt{i \sin \varphi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp \left\{ i\pi \left[\frac{u^2 + x^2 \Delta}{\operatorname{tg} \varphi} - \frac{2xu}{\sin \varphi} \right] \right\} dx, \quad (1)$$

где $\Delta = 1 - \delta/\cos \varphi$.

Преобразование функции со сдвинутым аргументом и линейным фазовым множителем имеет вид

$$C_u^{(\varphi, \delta)} \{e^{i2\pi u_0 x} f(x + b)\} = e^{i\pi \theta} C_{u - u_0 \sin \varphi + b(\cos \varphi - \delta)}^{(\varphi, \delta)} \{f(x)\}, \quad (2)$$

где

$$\theta = 2(u_0 \cos \varphi + b \sin \varphi + b \delta \operatorname{ctg} \varphi) u - \\ - \frac{1}{2} u_0^2 \sin 2\varphi + b^2 (\sin \varphi + \delta \operatorname{ctg} \varphi) (\cos \varphi - \delta) - 2b u_0 (\sin^2 \varphi + \delta \cos \varphi).$$

Рассмотрим частные случаи преобразования (1).

1. При $\delta = 0$ получаем преобразование Фурье дробного порядка:

$$C_u^{(\varphi, 0)} \{f(x)\} \equiv F_u^{(\varphi)} \{f(x)\} = \frac{e^{i\varphi/2}}{\sqrt{i \sin \varphi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp \left[i\pi \left(\frac{u^2 + x^2}{\operatorname{tg} \varphi} - \frac{2xu}{\sin \varphi} \right) \right] dx. \quad (3)$$

2. Если $\delta = \delta_\varphi \equiv \cos \varphi$, то $s = f(1 - \cos \varphi)$, $s' = f$, $\Delta = 0$, $q_\varphi = q_0 \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi}}$ и из

(1) следует

$$C_u^{(\varphi)} \{f(x)\} = \frac{e^{i\varphi/2}}{\sqrt{i \sin \varphi}} \exp \left(i\pi \frac{u^2}{\operatorname{tg} \varphi} \right) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp \left(-\frac{i2\pi u}{\sin \varphi} x \right) dx. \quad (4)$$

Из (2) находим

$$C_u^{(\varphi)} \{e^{i2\pi u_0 x} f(x + b)\} = e^{i\pi \theta_1} C_{u - u_0 \sin \varphi}^{(\varphi)} \{f(x)\},$$

где

$$\theta_1 = 2 \left(u_0 \cos \varphi + \frac{b}{\sin \varphi} \right) u - u_0 (u_0 \sin \varphi \cdot \cos \varphi + 2b).$$

3. Если $\varphi = \pi/2$ и $\delta \neq 0$, то $s = f$, $s' = f(1 + \delta)$, $q = q_0$ и из (1) находим

$$C_u^{(\delta)}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp[i\pi(\delta x^2 - 2ux)] dx. \quad (5)$$

4. Если $\delta = \cos\varphi - 1$, то $s' = 0$, $q_\varphi = q_0 \sqrt{\frac{1 - \cos\varphi}{\sin\varphi}}$ и из (1) получаем

$$C_u^{(\varphi)}\{f(x)\} = \frac{e^{i\varphi/2}}{\sqrt{i \sin\varphi}} \exp\left(i\pi \frac{\cos\varphi - 1}{\sin\varphi} u^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} f(x + u) \exp\left(\frac{i\pi}{\sin\varphi} x^2\right) dx. \quad (6)$$

5. Для сфокусированного действительного изображения из формулы линзы находим

$$s'_\varphi = f \left(1 - \frac{1}{\cos\varphi}\right), \quad \delta_\varphi = \frac{s(2f - s)}{f(s - f)} = -\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi},$$

где $\pi/2 < \varphi \leq \pi$. Тогда $\Delta_\varphi = \cos^{-2}\varphi$, $K = s'_\varphi/s = -1/\cos\varphi$ – поперечное увеличение линзы, $q^2 = 0$. Преобразование (1) имеет вид

$$\begin{aligned} C_u^{(\varphi, \text{сфок})}\{f(x)\} &= \frac{e^{i\varphi/2}}{\sqrt{i \sin\varphi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\left\{i\pi \left[\frac{u^2}{\text{tg}\varphi} + \frac{x^2}{\sin\varphi \cdot \cos\varphi} - \frac{2xu}{\sin\varphi} \right]\right\} dx = \\ &= \frac{e^{i\varphi/2}}{\sqrt{i \sin\varphi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp[i\pi(x - u_1)^2/\gamma] dx, \end{aligned}$$

где $u_1 = u \cos\varphi = -\frac{u}{K}$, $\gamma = \sin\varphi \cdot \cos\varphi$. Разлагая $f(x)$ в ряд Маклорена и учитывая

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\pi(x - u_1)^2/\gamma] x^n dx \cong \sqrt{i\gamma} u_1^n$$

при $(u_1)^2 \gg 1$, что для размерной переменной означает $u^2 > \lambda f K^2 \varepsilon$, где $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$C_u^{(\varphi, \text{сфок})}\{f(x)\} = cf(u_1) = cf\left(-\frac{u}{K}\right),$$

что соответствует перевернутому и масштабированному образу.

6. Для слабо сфокусированного изображения полагаем $s' = s'_0 + \varepsilon^2 f \operatorname{tg} \varphi$, где $\pi/2 < \varphi \leq \pi$, $\varepsilon^2 \ll 1$. Тогда

$$\delta = \delta_\varphi + \varepsilon^2 \operatorname{tg} \varphi = \frac{\varepsilon^2 - \sin \varphi}{\operatorname{ctg} \varphi}.$$

В результате $q = \varepsilon q_0$.

Исследование деформируемого участка поверхности при помощи собирающей линзы. Процесс измерения включает два этапа, на каждом используется преобразование Фурье – Френеля. Вначале создается двухэкспозиционная спеклограмма исследуемого участка, затем интерферограмма. Структурная схема получения спеклограммы и интерферограммы приведена на рис. 2, где 1 – исследуемый участок до и после деформации, 2 – фотопластинка, 3 – проявленная фотопластинка в виде двухэкспозиционной спеклограммы, 4 – интерферограмма, L, L' – линзы. При помощи диафрагмы выделяется исследуемый участок, распределенный вдоль оси x и испускающий в направлении собирающей линзы волну с амплитудой $f(x)$. Фотопластинка регистрирует в частотной плоскости u интенсивность, пропорциональную $I_0(u) = |C_u^{(\varphi, \delta)} \{f(x)\}|^2$, где x и u безразмерны. Если участок смещается вдоль оси x на расстояние A и наклоняется по отношению к этой оси на угол γ , то регистрируется сигнал

$$I_1(u) = |C_u^{(\varphi, \delta)} \{e^{i2\pi u_0 x} f(x + b)\}|^2,$$

где $b = \frac{A}{q}$, $u_0 = \gamma \frac{q}{\lambda}$, $q = q_0 \sqrt{\sin \varphi + \delta \operatorname{ctg} \varphi}$, $q_0 = \sqrt{\lambda f}$.

Из (2) следует

$$I_1(u) = |C_{u + b \cos \varphi - u_0 \sin \varphi - b\delta}^{(\varphi, \delta)} \{f(x)\}|^2 = I_0(u + b \cos \varphi - u_0 \sin \varphi - b\delta).$$

Проявленная фотопластинка является двухэкспозиционной спеклограммой и содержит распределение интенсивности

$$I(u) = I_0(u) + I_0(u + b \cos \varphi - u_0 \sin \varphi - b\delta).$$

Преобразование $I(u)$ к пространственной переменной x' выполняется путем

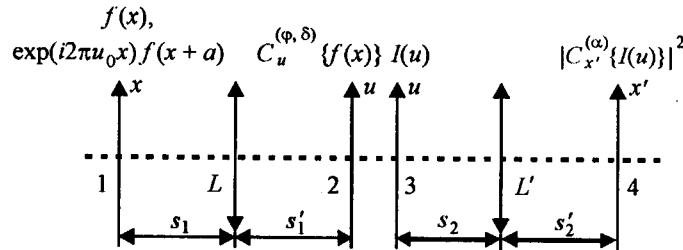


Рис. 2. Структурная схема исследования перемещений

использования преобразования (4) с масштабным параметром $q_\alpha = q'_0 \frac{1}{\sqrt{\sin \alpha}}$, $q'_0 = \sqrt{\lambda f'}$, тогда

$$\widehat{I}(x') = \left| C_{x'}^{(\alpha)} \{ I_0(u) + I_0(u - u_0 \sin \varphi - b\delta + b \cos \varphi) \} \right|^2$$

Обозначая интенсивность отображаемого участка $\widehat{I}_0(x') = \left| C_{x'}^{(\alpha)} \{ I_0(u) \} \right|^2$ и учитывая

$$C_{x'}^{(\alpha)} \{ f(u + d) \} = \exp \left(i 2\pi \frac{dx'}{\sin \alpha} \right) C_{x'}^{(\alpha)} \{ f(u) \},$$

находим распределение интенсивности на интерферограмме:

$$\begin{aligned} \widehat{I}(x') &= \widehat{I}_0(x') \left| 1 + \exp \left[i 2\pi \frac{b \cos \varphi - b\delta - u_0 \sin \varphi}{\sin \alpha} x' \right] \right|^2 = \\ &= 4\widehat{I}_0(x') \cos^2 \left[\pi \frac{b(\cos \varphi - \delta) - u_0 \sin \varphi}{\sin \alpha} x' \right]. \end{aligned}$$

Образуется система интерференционных полос, расстояние между которыми $S = \Delta x' q_\alpha$ зависит от параметров деформации A, γ и от параметров преобразования φ, δ, α :

$$\begin{aligned} S &= \frac{q'_0 \sqrt{\sin \alpha}}{\left| \frac{A}{q} (\cos \varphi - \delta) - \gamma \frac{q}{\lambda} \sin \varphi \right|} = \\ &= \lambda \sqrt{\frac{\sin \alpha}{\sin \varphi}} \left| \frac{A}{\sqrt{f' f}} \frac{\cos \varphi - \delta}{\sqrt{\sin^2 \varphi + \delta \cos \varphi}} - \gamma \sqrt{\frac{f}{f'}} \sqrt{\sin^2 \varphi + \delta \cos \varphi} \right|^{-1}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\delta \geq \cos \varphi - 1$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Чувствительности измерений. Распределение интенсивности на интерферограмме имеет вид

$$I(x) = 4I_0 \cos^2 \Phi(x),$$

где $\Phi(x) = \pi(k_A A + k_\gamma \gamma) \frac{x}{\lambda}$; k_A и k_γ – чувствительности измерений величин A

и γ . Для интерференционной полосы с номером m имеем $\Phi_m(x_m) = \pi m$, $x_m = mS$, где S – расстояние между интерференционными полосами, тогда

$$k_A A + k_\gamma \gamma = \frac{\lambda}{S}. \quad (8)$$

Чем больше чувствительность при неизменной интерференционной картине, тем меньше измеряемая величина. Если чувствительность одной величины равна нулю, то по интерференционной картине определяется вторая величина. Сравнивая (7) и (8), находим

$$k_A = \frac{1}{\sqrt{ff' \sin \alpha}} \frac{|\cos \varphi - \delta|}{\sqrt{\sin \varphi + \delta \cos \varphi / \sin \varphi}}, \quad (9)$$

$$k_\gamma = \sqrt{\frac{f}{f' \sin \alpha}} \sqrt{\sin \varphi (\sin^2 \varphi + \delta \cos \varphi)}.$$

Для дробного преобразования Фурье $\delta = 0$, и за счет параметра φ можно получить нулевую чувствительность одной из измеряемых величин. Полагая $\varphi = \pi/2$, из (9) находим

$$k_A = 0, \quad k_\gamma = \sqrt{\frac{f}{f' \sin \alpha}}, \quad (10)$$

и если $\alpha = \varepsilon \ll 1$, то γ измеряется с высокой чувствительностью. При $\delta = 0$, $\varphi = \varepsilon \ll 1$ получаем

$$k_\gamma = \varepsilon^{3/2} \sqrt{\frac{f}{f' \sin \alpha}} \ll 1, \quad k_A = \varepsilon^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{ff' \sin \alpha}}, \quad (11)$$

и если $\alpha = \pi/2$, то A измеряется с высокой чувствительностью. При $\delta = 0$ не удается получить малые чувствительности для измерения больших значений A и γ .

Применяя преобразование Фурье – Френеля, используем δ для обращения в нуль одной из чувствительностей. При $\delta = \cos \varphi$, $s = f(1 - \cos \varphi)$, $s' = f$ получаем

$$k_A = 0, \quad k_\gamma = \sqrt{\frac{f}{f'}} \sqrt{\frac{\sin \varphi}{\sin \alpha}}. \quad (12)$$

Подбор α и φ дает широкий диапазон измерения γ . При $\delta = \frac{\varepsilon^2 - \sin \varphi}{|\operatorname{ctg} \varphi|}$, где $\varepsilon \ll 1$, что соответствует сфокусированному изображению, из (9) находим

$$k_\gamma = \varepsilon \sin \varphi \sqrt{\frac{f}{f' \sin \alpha}}, \quad k_A = \frac{\varepsilon^{-1}}{\cos \varphi} \frac{1}{\sqrt{ff' \sin \alpha}}, \quad (13)$$

и A измеряется с высокой чувствительностью. Сопоставление (10), (12) и (11), (13) показывает, что применение в спекл-интерферометрии преобразования Фурье – Френеля дает более широкий диапазон измерений по срав-

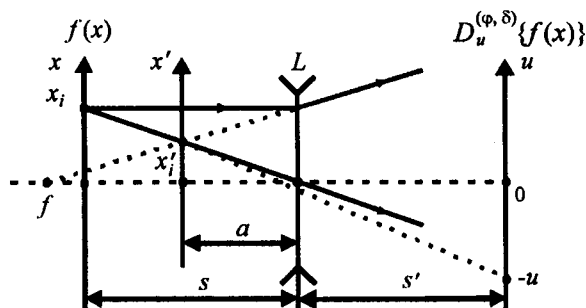


Рис. 3. Преобразование на основе рассеивающей линзы

нению с дробным преобразованием Фурье за счет подбора параметров $\varphi, \delta, \alpha, f, f'$. При $\delta \gg 1, \delta \cos \varphi \gg \sin^2 \varphi$ из (9) находим

$$k_A = \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{ff' \sin \alpha}} \sqrt{\operatorname{tg} \varphi}, \quad k_\gamma = \sqrt{\delta} \sqrt{\frac{f \sin 2\varphi}{2f' \sin \alpha}}.$$

Если $\varphi = \pi/2 - \varepsilon$, где $\varepsilon \ll 1$, то получаем

$$k_A = \frac{\sqrt{\delta/\varepsilon}}{\sqrt{ff' \sin \alpha}}, \quad k_\gamma = \sqrt{\delta \varepsilon} \sqrt{\frac{f}{f' \sin \alpha}}.$$

При $\delta \varepsilon \ll 1, \alpha = \pi/2$ величина A измеряется с высокой чувствительностью.

Преобразование Фурье – Френеля на основе рассеивающей линзы. Просвечиваемый транспарант и плоскость отображения располагаются на расстояниях s и s' от тонкой рассеивающей линзы согласно рис. 3. x_i , излучающий волну с единичной амплитудой, формирует на оси u распределение

$$D_u\{\delta(x - x_i)\} = \frac{a}{s} \frac{1}{a + s'} \exp[i\Phi_i(-u)],$$

где

$$\Phi_i(-u) = \Phi(x_i) + \frac{2\pi}{\lambda} [(a + s')^2 + (x_i' - u)^2]^{1/2} \cong$$

$$\cong \Phi(x_i) + \frac{2\pi}{\lambda} (a + s') \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x_i' - u}{a + s'} \right)^2 \right],$$

$$\Phi(x_i) \cong -\frac{2\pi}{\lambda} (a - s) \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x_i' - x_i}{a - s} \right)^2 \right],$$

$$\Phi_i(-u) = \frac{2\pi(s + s')}{\lambda} + \frac{\pi}{\lambda} \left[\frac{(x_i - x_i')^2}{s - a} + \frac{(x_i' - u)^2}{a + s'} \right].$$

Из формулы линзы находим $x'_i = x_i \frac{a}{s}$, где $a = \frac{s}{f+s} f$. Определяя

$$\frac{a}{s} = \cos \varphi, \quad s' = s + \delta f, \quad p^2 = \lambda f \left(\operatorname{tg} \varphi + \frac{\delta}{\sin \varphi} \right), \quad (14)$$

находим $s = f \frac{1 - \cos \varphi}{\cos \varphi}$, $a + s = f \operatorname{tg} \varphi \cdot \sin \varphi$, $a + s' = \frac{p^2}{\lambda} \sin \varphi$. Из условия $s' \geq 0$ получаем $\delta \geq 1 - \frac{1}{\cos \varphi}$, где $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$. В результате

$$\Phi_i(-u) = \frac{2\pi(s + s')}{\lambda} + \frac{\pi}{p^2} \left(\frac{u^2 + x_i^2 \Upsilon}{\sin \varphi} - \frac{2x_i u}{\operatorname{tg} \varphi} \right),$$

где $\Upsilon = 1 + \delta \cos \varphi$, тогда отображение

$$D_u^{(\varphi, \delta)} \{f(x)\} = \frac{\lambda \exp [i2\pi(2s + \delta f)/\lambda]}{p^2 \operatorname{tg} \varphi} \int f(x) \exp \left[\frac{i\pi}{p^2} \left(\frac{u^2 + x^2 \Upsilon}{\sin \varphi} - \frac{2xu}{\operatorname{tg} \varphi} \right) \right] dx.$$

Переходя к безразмерным переменным $x = x' p$, $u = u' p$, получаем преобразование Фурье – Френеля для рассеивающей линзы:

$$D_u^{(\varphi, \delta)} \{f(x)\} = \frac{e^{i\varphi/2}}{\sqrt{it\operatorname{tg} \varphi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp \left\{ i\pi \left[\frac{u^2 + x^2 (1 + \delta \cos \varphi)}{\sin \varphi} - \frac{2xu}{\operatorname{tg} \varphi} \right] \right\} dx. \quad (15)$$

Из (15) следуют преобразования функции с линейным фазовым множителем и сдвинутым аргументом:

$$D_u^{(\varphi, \delta)} \{e^{i2\pi u_0 x} f(x + b)\} = e^{i\pi\theta} D_{u - u_0 \operatorname{tg} \varphi + b(\delta + 1/\cos \varphi)}^{(\varphi, \delta)} \{f(x)\}, \quad (16)$$

где

$$\theta = \frac{2u_0 u}{\cos \varphi} - u_0^2 \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi} - b \left[2u + b \left(\frac{1}{\cos \varphi} + \delta \right) \right] \left(\operatorname{tg} \varphi + \frac{\delta}{\sin \varphi} \right) + 2bu_0 \operatorname{tg} \varphi \left(\operatorname{tg} \varphi + \frac{\delta}{\sin \varphi} \right).$$

Частный случай преобразования (15) для $\delta = \delta_\varphi \equiv 1 - \frac{1}{\cos \varphi}$ ($s' = 0$, $s = -\delta f$, $p^2 = \lambda f \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi}$) имеет вид

$$D_u^{(\varphi)} \{f(x)\} = \frac{e^{i\varphi/2}}{\sqrt{it\operatorname{tg} \varphi}} \exp \left(i\pi \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} u^2 \right) \int_{-\infty}^{\infty} f(x + u) \exp \left(\frac{i\pi}{\operatorname{tg} \varphi} x^2 \right) dx.$$

Исследование деформации поверхности при помощи рассеивающей линзы. В частотной плоскости u рассеивающей линзы регистрируется интенсивность исходного образа исследуемого участка $I_0(u) = |D_u^{(\varphi, \delta)} \{f(x)\}|^2$.

Если участок смещается вдоль оси x на расстояние A и наклоняется на угол γ , то регистрируется сигнал

$$I_1(u) = |D_u^{(\varphi, \delta)} \{e^{i2\pi u_0 x} f(x+b)\}|^2,$$

$$\text{где } b = \frac{A}{p}, \quad u_0 = \gamma \frac{p}{\lambda}, \quad p = q_0 \sqrt{\operatorname{tg} \varphi + \frac{\delta}{\sin \varphi}}, \quad q_0 = \sqrt{\lambda f}.$$

Из (16) получаем

$$I_1(u) = |D_{u + (b/\cos \varphi) - u_0 \operatorname{tg} \varphi + b\delta}^{(\varphi, \delta)} \{f(x)\}|^2 = I_0\left(u - u_0 \operatorname{tg} \varphi + \frac{b}{\cos \varphi} + b\delta\right).$$

Двухэкспозиционная спеклограмма имеет интенсивность

$$I(u) = I_0(u) + I_0\left(u - u_0 \operatorname{tg} \varphi + \frac{b}{\cos \varphi} + b\delta\right).$$

Возвращаясь к пространственной переменной x' , с помощью преобразования (4) с масштабным параметром $q_\alpha = q'_0 \frac{1}{\sqrt{\sin \alpha}}$, где $q'_0 = \sqrt{\lambda f'}$, получаем

$$\check{I}(x') = \left| C_{x'}^{(\alpha)} \left\{ I_0(u) + I_0\left(u - u_0 \operatorname{tg} \varphi + \frac{b}{\cos \varphi} + b\delta\right) \right\} \right|^2,$$

и если $\check{I}_0(x') = |C_{x'}^{(\alpha)} \{I_0(u)\}|^2$, то

$$\check{I}(x') = 4\check{I}_0(x') \cos^2 \left[\pi \frac{u_0 \operatorname{tg} \varphi - (b/\cos \varphi) - b\delta}{\sin \alpha} x' \right].$$

Расстояние между интерференционными полосами $S = \Delta x' q_\alpha$ зависит от параметров деформации b и u_0 и от параметров преобразования $\varphi, \delta, \alpha, f, f'$ согласно

$$S = \frac{q'_0 \sqrt{\sin \alpha}}{\left| \frac{A}{p \cos \varphi} (1 + \delta \cos \varphi) - \gamma \frac{p}{\lambda} \operatorname{tg} \varphi \right|} =$$

$$= \lambda \sqrt{\sin \alpha} \left| A \frac{\sqrt{\operatorname{tg} \varphi}}{\sqrt{f' f}} \frac{1 + \delta \cos \varphi}{\sqrt{\sin^2 \varphi + \delta \cos \varphi}} - \gamma \sqrt{\frac{f}{f'}} \frac{\sqrt{\operatorname{tg} \varphi}}{\cos \varphi} \sqrt{\sin^2 \varphi + \delta \cos \varphi} \right|^{-1}, \quad (17)$$

где $\delta \geq 1 - 1/\cos\varphi$, $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$. Сравнивая (17) и (8), получаем чувствительности измерений

$$k_A = \frac{1}{\sqrt{ff' \sin \alpha}} \frac{\delta + 1/\cos \varphi}{\sqrt{\sin \varphi + \delta \cos \varphi / \sin \varphi}}, \quad (18)$$

$$k_\gamma = \sqrt{\frac{f}{f' \sin \alpha} \frac{\sqrt{\sin \varphi (\sin^2 \varphi + \delta \cos \varphi)}}{\cos^{3/2} \varphi}}.$$

При $\delta = 0$, $\varphi = \varepsilon \ll 1$ получаем $k_\gamma \ll 1$ и k_A , совпадающее с (11). Подбором δ и φ не удастся получить $k_A \ll 1$. Следовательно, для измерения смещения и наклона с помощью преобразования Фурье – Френеля с рассеивающей линзой необходимо выполнить два двухэкспозиционных измерения с отличающимися наборами параметров $\varphi_1, \delta_1, \alpha_1$ и $\varphi_2, \delta_2, \alpha_2$ и решить систему алгебраических уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ozaktas H. M., Mendlovic D. Fractional Fourier optics // JOSA. 1995. A12, N 4. P. 743.
2. Sheridan J. T., Patten R. Holographic interferometry and the fractional Fourier transformation // Opt. Lett. 2000. 25. P. 448.
3. Patten R., Sheridan J. T., Larkin A. Speckle photography and the fractional Fourier transform // Opt. Eng. 2001. 40, N 8. P. 1438.
4. Pellat-Finet P., Bonnet G. Fractional order Fourier transform and Fourier optics // Opt. Commun. 1994. 110. P. 517.
5. Jutamulia S., Asakura T. Optical Fourier-transform theory based on geometrical optics // Opt. Eng. 2002. 41, N 1. P. 13.
6. Абжандадзе З. Л., Осипов В. Ф. Преобразование Фурье – Френеля и некоторые его приложения. С.-Пб., 2000.
7. James D. F. V., Agarwal G. S. The generalized Fresnel transform and its applications to optics // Opt. Commun. 1996. 126. P. 207.

E-mail: ekrasnopevtsev@mail.ru

Поступила в редакцию
14 мая 2003 г.