ПМТФ, № 6, 1972

УДК 533.9

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЛЕНГМЮРОВСКИХ ВОЛН В СЛАБОНЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

Б. В. Лундин

(Москва)

Для слабонеоднородной плазмы получены кинетические уравнения для рассеяния волн одномерного спектра на частицах плазмы. Уравнение эволюции спектра коротких волн ($k^2 > (m_e / m_i) D_e^{-2}$), запертых в неоднородностях плотности плазмы, значительно отличается от кинетического уравнения для волн в однородной плазме. Рассмотрена также задача о локализации спектра ленгмюровских волн в областях вблизи минимумов плотности плазмы. Получено решение кинетического уравнения для волн, описывающее этот процесс.

В ряде работ [1-3] было рассмотрено влияние слабой неоднородности плотности плазмы на эффекты взаимодействия частиц и волн в плазме. Присутствие неоднородности в реальных экспериментах может существенно исказить динамику таких процессов по сравнению с модельными условиями однородной плазмы. Так, в работе [1] указано на существенное изменение спектра ленгмюровских волн, генерируемых электронным пучком, обусловленное существованием слабой неоднородности плотности плазмы в направлении распространения пучка. Метод работы [1] можно применить к рассмотрению нелинейного взаимодействия ленгмюровских волн одномерного спектра.

Следуя работе [1], будем рассматривать одномерную неоднородность плотности плазмы вида

$$n(x) = n_0(x_0) + \Delta n(x) \tag{0.1}$$

где n_0 — среднее значение концентрации, а $\Delta n(x)$ — малое и не зависящее от времени отклонение концентрации от среднего значения. Пространственный масштаб неоднородности a предполагается много большим характерных длин волн рассматриваемого спектра

$$a \gg \lambda \tag{0.2}$$

При этом условии ленгмюровские волны в плазме можно описывать как суперпозицию квазичастиц (волновых пакетов), функция распределения которых удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial k}\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial N}{\partial k} = 2\gamma N \tag{0.3}$$

где $N = N(k, x, t)$ — спектральная функция плотности квазичастиц, $\omega = \omega(k, x)$ — решение дисперсионного уравнения, а $\gamma = \gamma(k, x, t)$ — инкремент нелинейного рассеяния ленгмюровских волн на частицах плазмы, так как при отсутствии в изотермической плазме интенсивных непотенциальных колебаний для ленгмюровских волн одномерного спектра трехплазмонные процессы запрещены законами сохранения (предполагается, что линейное затухание экспоненциально мало).

Вблизи минимума плотности дисперсионное уравнение для ленгмюровских волн выглядит следующим образом:

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2(x_0)\left(1 + \frac{\Delta n}{n_0}\frac{(x-x_0)^2}{a^2}\right) + 3k^2 v_{Te}^2 \tag{0.4}$$

$$v_{Te}^2 = \frac{T_e}{m_e}, \quad \omega_{pe}^2(x_0) = \frac{4\pi e^2}{m_e} n(x_0)$$

Здесь x_0 — координата минимума плотности, Δn — глубина «ямы неоднородности» (в дальнейшем — просто яма), a — ширина ее.

При движении вдоль траектории

$$\omega(k, x) = \omega(k_0, x_0) \tag{0.5}$$

квазичастицы с достаточно малым волновым числом

$$k_0^2 < \frac{1}{3}\frac{\Delta n}{n_0}\frac{1}{D_e^2}, \quad D_e^2 = \frac{v_{Te}^2}{\omega_{pe}^2} \tag{0.6}$$

(здесь и далее индекс 0 относится к величинам, заданным в центре ямы испытывают отражение от стенок ямы в точках, где

$$k(x, k_0) = 0 \tag{0.7}$$

(функция $k(x, k_0)$ находится из уравнения траектории (0.5)).

Такие квазичастицы будем называть в дальнейшем запертыми, траектории их в пространстве являются финитными.

Влияние неоднородности на процесс нелинейного рассеяния будет существенным, если

$$a \ll \frac{1}{\gamma}\left|\frac{\partial\omega}{\partial k}\right| \tag{0.8}$$

в противном случае процесс закончится раньше, чем под влиянием неоднородности успеет существенно исказиться траектория квазичастицы в фазовом k, x-пространстве.

Согласно работе [4] максимальный нелинейный инкремент определяется рассеянием на ионах и равен по порядку величины

$$\gamma_m \approx \omega_{pe} W / nT_e, \qquad W = \omega_{pe}\int N dk \tag{0.9}$$

где W — плотность энергии ленгмюровских волн. Принимая во внимание (0.8), (0.9), можно написать неравенство

$$W / nT_e \ll D_e / a \tag{0.10}$$

которое дает ограничение на плотность энергии ленгмюровских колебаний, на процесс взаимодействия которых с частицами существенное влияние оказывает неоднородность.

Условие применимости нелинейных уравнений

$$N_{De}^{-1} \ll W / nT \ll 1, \qquad N_{De} = {}^4/_3 \pi n D_e^3 \tag{0.11}$$

с учетом (0.10) ограничивает сверху плотность плазмы, для которой последующее рассмотрение справедливо

$$n \ll 3\cdot 10^{-2} a^{-1} (T_e / e^2)^2 \tag{0.12}$$

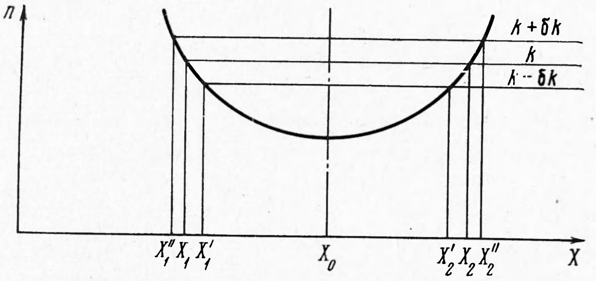
1. Усредненное кинетическое уравнение для волн. Согласно работам [1, 2] кинетическое уравнение для волн, усредненное по неоднородностям имеет вид

$$\partial N/\partial t = 2\langle\gamma\rangle N \tag{1.1}$$

Для запертых квазичастиц это уравнение описывает изменение числа плазмонов в любой точке траектории их движения (например, в минимуме плотности), причем спектры по k и по ω связаны жестко в этой точке с помощью равенства (0.5)

$$\langle\gamma\rangle = \int\limits_{x_1}^{x_2} \gamma \left(\frac{\partial\omega}{\partial k}\right)^{-1} dx \bigg/ \int\limits_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial\omega}{\partial k}\right)^{-1} dx \tag{1.2}$$

Здесь x_1, x_2 — точки поворота плазмона (фиг. 1), определяемые из (0.7), а $\partial\omega(x)/\partial k$ находится из (0.5).



В дополнение к [1, 2] надо применительно к нелинейному рассеянию сделать следующие замечания: так как

$$\gamma(\mathbf{k}) = \int w(\mathbf{k}, \mathbf{k}') N(\mathbf{k}') d\mathbf{k}' \tag{1.3}$$

где $w(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ — матричный элемент рассеяния, причем область пространственного существования в яме для квазичастиц с $|\mathbf{k}_0'| < |\mathbf{k}_0|$ меньше (фиг. 1), чем область существования квазичастицы с волновым числом k_0, то фактически интегралы в (1.2) будут браться в наименьших пределах, где существуют обе взаимодействующие волны.

Из-за изменения при движении по траектории (0.5) фазового объема в k-пространстве удобно перейти в (1.3) к интегрированию по ω с помощью соотношения (0.5). Учитывая неравенство (0.8) и симметричность ямы относительно точки минимума плотности, можно написать

$$\langle\gamma(\mathbf{k})\rangle = \int d\omega' N[\mathbf{k}'(\omega')] \left[\int\limits_{x_0}^{x_2} w(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \left(\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} \frac{\partial\omega'}{\partial\mathbf{k}'}\right)^{-1} dx : \right.$$

$$\left. : \int\limits_{x_0}^{x_2} \left(\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}\right)^{-1} dx\right] \equiv \int d\mathbf{k}' \langle w(\mathbf{k}, \mathbf{k}')\rangle N(\mathbf{k}') \tag{1.4}$$

Интегрирование в (1.4) можно выполнить, сделав замену переменных

$$y \equiv \frac{k}{k_0}, \quad dx = -\frac{y\,dy}{(1-y^2)^{1/2} b}, \quad b^2 = \frac{\Delta n}{3n_0} \frac{\omega_{pe}^2(x_0)}{k_0^2 v_{Te}^2} a^{-2}$$

при этом точки x_0 и x_2 перейдут в 1 и 0 соответственно. Если пределы интегрирования определяются k'-траекторией, то верхним пределом будет x_2' — точка отражения k'-волны, которой в новых переменных соответствует точка $[1-(k_0'/k_0)^2]^{1/2}$.

При рассеянии на частицах согласно [4]

$$\gamma_\alpha(\mathbf{k}) = B_\alpha \int d\mathbf{k}' N(\mathbf{k}') \frac{\omega' - \omega}{|\mathbf{k}' - \mathbf{k}|} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega' - \omega}{|\mathbf{k}' - \mathbf{k}| v_{T\alpha}}\right)^2\right]$$

$$v_{T\alpha}^2 = T_\alpha / m_\alpha \qquad (\alpha = i, e) \tag{1.5}$$

$$B_\alpha = (\pi)^{1/2} / 32 D_e^2 n m_e v_{T\alpha} \tag{1.6}$$

Учитывая, что на траектории (0.5) не меняются ни ω, ни ω', и заменяя экспоненту на ϑ-функцию Хэвисайда

$$\exp(-x^2) \approx \vartheta(1 - x^2), \qquad \vartheta(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

можно провести все интегрирования и получить для $\langle \gamma(k) \rangle$ следующее выражение:

$$\langle \gamma_\alpha(\mathbf{k}) \rangle = B_\alpha \int d\mathbf{k}' \mathbf{k}' N(\mathbf{k}') \frac{6 v_{Te}^2}{\omega + \omega'} \vartheta \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\omega' - \omega}{|\mathbf{k}' - \mathbf{k}| v_{T\alpha}}\right)^2\right] \times$$

$$\times \frac{1}{\pi} \begin{cases} -\{\pi - \arcsin[1 - (k_0'/k_0)^2]^{1/2}\}, & (\mathbf{n}\mathbf{n}') = 1 \\ -\arcsin[1 - (k_0'/k_0)^2]^{1/2}, & (\mathbf{n}\mathbf{n}') = -1 \end{cases} \Big\} |\mathbf{k}_0'| < |\mathbf{k}_0|$$
$$\qquad \begin{cases} \pi - \arcsin[1 - (k_0/k_0')^2]^{1/2}, & (\mathbf{n}\mathbf{n}') = 1 \\ \arcsin[1 - (k_0/k_0')^2]^{1/2}, & (\mathbf{n}\mathbf{n}') = -1 \end{cases} \Big\} |\mathbf{k}_0'| > |\mathbf{k}_0| \tag{1.8}$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{k} / |\mathbf{k}|, \qquad \mathbf{n}' = \mathbf{k}' / |\mathbf{k}'|$$

Заметим, что ни один из параметров, характеризующих форму ямы неоднородности плотности, не вошел в окончательный результат.

Изменение усредненного матричного элемента $\langle w(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \rangle$ (1.4) по сравнению с $w(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ в однородной плазме является тривиальным при $|\mathbf{k}'| \ll \ll |\mathbf{k}|$.

В этом случае

$$\langle w(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \rangle = k' k^{-1} w(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$$

так как, в отличие от однородной плазмы, где k-волна взаимодействует на всей длине своего существования с k'-волной, в слабонеоднородной плазме взаимодействие происходит лишь на длине пробега k'-волны, которая в k / k' раз меньше (согласно (0.4) длины пробега в яме относятся как волновые числа в точке минимума плотности).

Усредненное кинетическое уравнение (1.1) с инкрементом вида (1.8) описывает изменение числа квазичастиц на уровне (траектории (0.5)). В отличие от случая однородной плазмы, где описание относится к спектральной плотности в единице объема, здесь соответственно меняется и нормировочное соотношение.

Так как

$$L(k) \equiv \alpha k \qquad \left(\alpha = \left(\frac{3 n_0}{\Delta n} a D_e\right)^{1/2}\right)$$

где $L(k)$ — длина траектории квазичастицы в яме, то число волн на траектории

$$P(\mathbf{k}) = L(k) N(\mathbf{k})$$

и уравнение (1.1) можно записать в виде

$$\frac{\partial P(\mathbf{k})}{\partial t} = P(\mathbf{k}) \int d\mathbf{k}' P(\mathbf{k}') \varphi(\mathbf{k}, \mathbf{k}'), \qquad \varphi(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = -\varphi(\mathbf{k}', \mathbf{k})$$

Здесь $\varphi(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ уже зависит от формы ямы и вид ее легко может быть найден из сравнения (1.1) и (1.8).

2. Нелинейное рассеяние на ионах. Согласно [4] в области спектра

$$k > (m_e/m_i)^{1/2} D_e^{-1} \equiv k^* \tag{2.1}$$

преимущественным эффектом взаимодействия ленгмюровских волн с ионами является рассеяние на π с малым изменением модуля волнового вектора. При этом из-за разных, хотя и мало отличающихся, длин пробега в яме в кинетическом уравнении для волн, учитывающем преимущественное взаимодействие волн с близкими волновыми числами, появляется дополнительный член.

Пусть

$$\mathbf{k}' = -\mathbf{k} + \delta\mathbf{k}, \qquad (\mathbf{k}\cdot\delta\mathbf{k}) / |\mathbf{k}|\,|\delta\mathbf{k}| = 1$$

Тогда

$$\frac{\partial N(\mathbf{k})}{\partial t} = \beta_i N(\mathbf{k}) \int d\mathbf{k}' N(\mathbf{k}') (\mathbf{k}' - \mathbf{k}) = -\beta_i N(\mathbf{k}) \int_0^{k^*} d(\delta k) \times$$
$$\times [N(-\mathbf{k} + \delta\mathbf{k}) - N(-\mathbf{k} - \delta\mathbf{k})]\, \delta k \tag{2.2}$$

но

$$N(-\mathbf{k} + \delta\mathbf{k}) - N(-\mathbf{k} - \delta\mathbf{k}) = N^+(-\mathbf{k}) - N^-(-\mathbf{k}) + 2 \frac{\partial N(k)}{\partial \mathbf{k}}\Big|_{-\mathbf{k}} \delta\mathbf{k} \tag{2.3}$$

где

$$N^+(-\mathbf{k}) = N(-\mathbf{k} + \delta\mathbf{k}) - \frac{\partial N}{\partial \mathbf{k}}\Big|_{-\mathbf{k}} \delta\mathbf{k}, \quad N^-(-\mathbf{k}) = N(-\mathbf{k} - \delta\mathbf{k}) + \frac{\partial N}{\partial \mathbf{k}}\Big|_{-\mathbf{k}} \delta\mathbf{k}$$

В однородной плазме уравнение (2.2) принимает вид

$$\frac{\partial N(\mathbf{k})}{\partial t} = -\frac{2}{3} \beta_i (k^*)^3 \frac{\partial N}{\partial \mathbf{k}}\Big|_{-\mathbf{k}}, \qquad \beta_i = \frac{3(\pi)^{1/2}\omega_{pe}}{64 n m_e v_{Ti}} \tag{2.4}$$

В случае неоднородной плазмы разложение (2.3) не сводится лишь к дифференциальному члену, так как пространственные области существования квазичастиц, характеризующихся числами волн $N^+(-\mathbf{k})$ и $\bar{N}(-\mathbf{k})$, отличаются на величину $\sim k^* a / k_0$, из-за этого разностный член становится порядка дифференциального. Кроме того, вблизи точек поворота на пространственном интервале $\sim k^* a / k_0$ нарушается соотношение (2.1), и необходимо учитывать рассеяние без изменения направления волнового вектора.

Интегрирование разностного члена по интервалу вблизи точек поворота с точностью до членов $\sim (k^* / k_0)^2$ приводит к выражению

$$N(-\mathbf{k}) \int_{x_2'}^{x_2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}\right)^{-1} dx \left[\int_0^{k^*} d(\delta k)\, \delta k - \int_0^{k(x)} d(\delta k)\, \delta k\right] \Big/ \int_{x_0}^{x_2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}\right)^{-1} dx \approx$$
$$\approx \frac{2}{3\pi} \frac{(k^*)^3}{k_0} N(-\mathbf{k})$$

где (см. фиг. 1) точка x_2' — точка поворота квазичастицы с волновым вектором $\mathbf{k}' = -\mathbf{k} + \delta\mathbf{k}$ при $|\delta\mathbf{k}| = k^*$, x_2 — точка отражения k-волны.

Вычисление дифференциального члена с той же точностью дает

$$\int_{x_0}^{x_2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}\right)^{-1} dx \int_0^{k^*} \frac{\partial N}{\partial \mathbf{k}}\Big|_{-\mathbf{k}} 2(\delta k)^2 d(\delta k) \Big/ \int_{x_0}^{x_2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}\right)^{-1} dx \approx \frac{4}{3\pi} \frac{(k^*)^3}{k_0} \frac{\partial N}{\partial \mathbf{k}}\Big|_{-\mathbf{k}} k_0$$

Аналогичными вычислениями можно показать, что вклад в кинетическое уравнение для волн от рассеяния без изменения направления волнового вектора равен

$$\frac{2}{\pi}\frac{(k^*)^3}{k_0}N(\mathbf{k})$$

Принимая во внимание (0.9) имеем

$$N(\mathbf{k}) \approx N(-\mathbf{k}), \qquad \left.\frac{\partial N}{\partial \mathbf{k}}\right|_{\mathbf{k}} = -\left.\frac{\partial N}{\partial \mathbf{k}}\right|_{-\mathbf{k}}$$

Тогда уравнение, описывающее рассеяние на ионах в области вблизи минимума плотности примет вид

$$\frac{\partial N(k)}{\partial t} = \frac{4}{3\pi}\beta_i (k^*)^3\left(2\frac{N(k)}{k} + \frac{\partial N}{\partial k}\right) \tag{2.5}$$

Приведенное кинетическое уравнение допускает стационарный спектр

$$N(k) \sim k^{-2}$$

который значительно отличается от равнораспределения, следующего из уравнения (2.4). (В трехмерном случае равнораспределению соответствует спектр $N \sim k^{-2}$ [5, 6].)

3. Динамика локализации спектра. В области $k < k^*$ можно положить для любых k, k'

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega' - \omega}{|\mathbf{k}' - \mathbf{k}|\, v_{T\alpha}}\right)^2\right] \approx 1$$

Тогда с учетом

$$N(\mathbf{k}) \approx N(-\mathbf{k})$$

уравнение эволюции спектра принимает вид

$$\frac{\partial N(k)}{\partial t} = BN(k)\left(\int_k^{k^*} k' N(k')\, dk' - \int_0^k k' N(k')\, dk'\right) \tag{3.1}$$

$$\int_0^{k^*} L(k') N(k')\, dk' = \text{const} \equiv \eta, \qquad B = 3v_{Te}D_eB_i$$

где $L(k)$ — длина траектории k-волны

$$L(k) \equiv \alpha k = k\left(\frac{3n_0}{\Delta n}aD_e\right)^{1/2}$$

Введем обозначение

$$\Pi(k, t) = \int_0^k L(k') N(k', t)\, dk'$$

$\Pi(k, t)$ — полное число волн в яме с волновыми числами, меньшими k

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = \frac{B}{\alpha}\eta\Pi - \frac{B}{\alpha}\Pi^2 \tag{3.2}$$

Решение уравнения (3.2) выглядит следующим образом:

$$\Pi(k, t) = \eta\frac{\Pi(k, 0)\exp(t/\tau)}{\eta + \Pi(k, 0)[\exp(t/\tau) - 1]}, \qquad \tau = \alpha B^{-1}\eta^{-1}$$

при этом спектральная плотность ленгмюровских волн имеет вид

$$N(k,t)=\eta^2 N(k,0)\exp(t/\tau)\left\{\eta+\int_0^k L(k')N(k',0)\,dk'\left[\exp(t/\tau)-1\right]\right\}^{-2}$$

и для любого k, начиная с некоторого момента времени $t(k)$, плотность шумов будет экспоненциально падать

$$N(k,t)\approx\eta^2\left(\int_0^k L(k')N(k',0)\,dk'\right)^2 N(k,0)\exp(-t/\tau)\qquad (t\gg t(k))$$

где $t(k)$ определяется из условия

$$\exp[t(k)/\tau]\int_0^k L(k')N(k',0)\,dk'=\eta$$

Уравнение (3.1) не описывает эволюцию слабого надтеплового фона шумов, движение границы которого, вслед за стягивающимся в область малых волновых чисел спектром ленгмюровских волн, можно определить из уравнения

$$\Pi(\varkappa(t),t)+N^*\alpha\varkappa^2(t)/2\approx\eta$$

где N^* — плотность шумов фона.

В пределе $t\gg\tau$ это уравнение сводится к следующему:

$$\eta=N^*\alpha\frac{\varkappa^2(t)}{2}\left[1+\frac{\Pi(\varkappa(t),0)}{\eta}\exp(t/\tau)\right]$$

Для каждого заданного вида начального спектра $\Pi(k,0)$ его нетрудно разрешить относительно $\varkappa(t)$.

Центр тяжести спектра, сосредоточенного в яме, эволюционирует по закону

$$\langle k\rangle=\alpha\eta\int_0^{k^*}(k')^2 N(k',0)\exp(t/\tau)\left\{\eta+\int_0^{k'}L(k')N(k',0)\,dk'\left[\exp(t/\tau)-1\right]\right\}^{-2}dk'$$

Средняя длина пробега волн в яме падает при этом пропорционально $\langle k\rangle$

$$\langle L\rangle=\alpha\langle k\rangle$$

Характерное время процесса локализации спектра τ может быть выражено через параметры плазмы

$$\tau^{-1}\approx 0.14\omega_{pe}(nT_e)^{-1}\int_0^{k^*}N(k)\,\omega_{pe}\left(\frac{k}{k^*}\right)dk$$

Новыми результатами, полученными в работе, являются выражения для усредненных матричных элементов рассеяния ленгмюровских волн на границах в плазме с одномерной неоднородностью плотности, уравнение (2.5), описывающее рассеяние на ионах в области $k\gg k^*$, и решением уравнения (3.1), описывающего локализацию спектра волн в областях минимумов плотности плазмы.

Рассеяние волн локализованного в яме спектра описывается в терминах числа волн на траектории. Необходимость изменения уравнения (2.4), соответствующего однородной плазме, станет очевидной, если учесть, что в неоднородной плазме в процессах рассеяния число волн в единице объема не сохраняется.

В заключение автор выражает благодарность А. С. Кингсепу за постановку задачи и руководство работой.

Поступила 17 III 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Рютов Д. Д. Квазилинейная релаксация электронного пучка в неоднородной плазме. ЖЭТФ, 1969, т. 57, вып. 1.
2. Кадомцев Б. Б. Турбулентность плазмы. В сб. «Вопросы теории плазмы», М., Атомиздат, 1964, вып. 4.
3. Кингсеп А. С. Влияние нелинейных эффектов на неустойчивость тока в плазме. ЖЭТФ, 1969, т. 56, вып. 4.
4. Цытович В. Н. Нелинейные эффекты в плазме. М. «Наука», 1967.
5. Липеровский В. А., Цытович В. Н. О спектрах ленгмюровской турбулентности плазмы. ЖЭТФ, 1969, т. 57, вып. 4.
6. Пикельнер С. Б., Цытович В. Н. Спектры высокочастотной турбулентности плазмы и ускорение субкосмических лучей. ЖЭТФ, 1968, т. 55, вып. 3.