

Рис. 4.

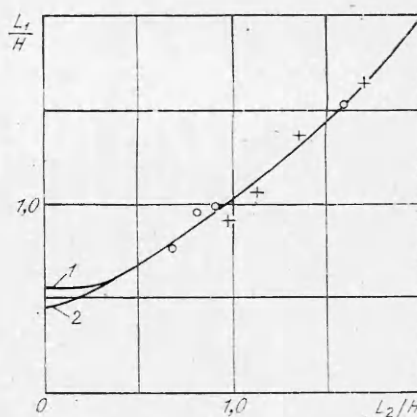


Рис. 5.

Во-вторых, наблюдается хорошее количественное совпадение. На рис. 5 изображены зависимости $L_1/H = f(L_2/H)$. Кривая 1 соответствует ЖМ, а 2 — ТЖМ, +, o — результаты экспериментов для преград соответственно из грунта и пластилина.

Зависимости $L_1/H = f(L_2/H)$, определенные по ЖМ и ТЖМ, начиная с $L_2/H \approx 0,4$, совпадают. Это говорит о том, что, если требуется определить лишь L_1 и L_2 , а не всю границу пробонны, достаточно воспользоваться более простой моделью — ЖМ.

На основании проведенных исследований отметим, что результаты, полученные в рамках ЖМ и ТЖМ, достаточно хорошо согласуются как между собой, так и с экспериментальными данными, причем при надлежащей параметризации имеет место качественное и количественное соответствие.

Автор благодарит Е. Н. Шера и А. В. Поташева за помощь в проведении экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. 2-е изд. М.: Наука, 1977.
2. Власов О. Е. Основы действия взрыва. М.: ВИА, 1957.
3. Лаврентьев М. А. Вариационный метод в краевых задачах для уравнений эллиптического типа. М.: Изд-во АН СССР, 1962.
4. Кузнецов В. М., Поляк Э. Б. Импульсно-гидродинамические схемы расчета взрыва на выброс шнуровых зарядов ВВ.— ФТПРПИ, 1973, № 4.
5. Ivanov V. A. The effect of gravity on crater formation: thickness of ejecta and concentric basins.— In: Proc. Lunar Sci. Conf., 7th. USA, 1976.
6. Кузнецов В. М. О взрыве на поверхности пластины.— ПМТФ, 1962, № 3.
7. Ильинский Н. Б., Салимов Р. Б. К решению одной краевой задачи теории взрыва.— Изв. вузов. Математика, 1975, № 6.
8. Ильинский Н. Б., Поташев А. В., Рубиновский А. В., Фищенко П. А. Решение некоторых задач теории взрыва в импульсно-гидродинамической постановке.— В кн.: Тр. семинара по краевым задачам. Казань: Казанск. ун-т, 1977, вып. 14.
9. Рубиновский А. В. О взаимодействии зарядов на поверхности преграды в струйной гидродинамической модели.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 6.
10. Ильинский П. Б., Поташев А. В., Рубиновский А. В., Фищенко П. А. О двух импульсно-гидродинамических моделях взрыва на выброс. Деп. в ВИНТИ 4 мая 1983, № 2403—83.

Поступила 10/1 1985 г.

УДК 539.4.019

ДИНАМИЧЕСКОЕ РАЗРУШЕНИЕ ОБЪЕКТОВ В ОБЛАСТИ ГЛУБОКИХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

А. Г. ИВАНОВ
(Москва)

Изучение процесса разрушения материалов — одна из насущных задач механики. «Особенно важно изучение таких видов разрушения, как быстрое (динамическое), «вязкое» (со значительными пластическими деформациями...)» [1]. В [2—6] с использованием интегрального энергетического критерия разрушения к объекту в целом и без наложения каких-либо ограничений на кинетику развития дефектов структуры найдены условия разрушения тонкостенных цилиндрических и сферических оболочек

из вязкопластического материала в области глубокой пластичности при скоростях деформации 10^3-10^5 с^{-1} . Экспериментально и расчетно обнаружен динамический пик пластичности, и дано ему физическое обоснование. Формулировка интегрального энергетического критерия стала возможна на основе экспериментальных исследований разрушений геометрически подобных объектов, нагруженных сходственным образом [7-9]. Показано существование сильных масштабных эффектов (МЭ) энергетической природы при разрушении объектов, с учетом которых предложена феноменология двухстадийного подхода к разрушению объектов [7, 8], позволившая также описать откол — разрушения при экстремально высоких скоростях нагружения [7, 10, 11] — и дать объяснение физической природе катастрофических хрупких разрушений магистральных трубопроводов, нагруженных статическим образом [12].

В настоящей работе рассмотрено разрушение тонкостенных цилиндрических оболочек, изготовленных из материала, обладающего не только вязкостью, но и упрочняющегося при деформировании. При отыскании дифференциального уравнения более полно учитывается специфика движения расширяющейся оболочки. Отмечено, что распад струи * из сплошного материала, имеющей градиент скорости (еще один пример разрушения материала в глубокой пластике), также может быть описан дифференциальным уравнением и его решением, найденным для оболочки.

Постановка и решение задачи. Рассмотрим движение тонкого кольца единичной ширины радиусом r_0 и толщиной δ_0 , мысленно вырезанного из цилиндрической оболочки. Для наблюдателя, движущегося радиально от центра с частицей материала со скоростью v , соседняя частица, расположенная вдоль другого радиуса на расстоянии r от центра, удаляется от него со скоростью, пропорциональной расстоянию до нее. Действительно, через dt соседняя частица окажется на расстоянии $(r + vdt)\varphi$ со скоростью $v\varphi$. Так что, с точки зрения наблюдателя, в тангенциальном направлении существует градиент скорости v/r .

Рассмотрим одновременно свободно летящую струю, в направлении движения которой имеется постоянный по координате положительный градиент скорости u/m (u — разность скоростей головы и хвоста струи, m — ее длина). Под действием градиентов v/r и u/m кольцо и струя будут растягиваться и утоняться. Для упрощения рассмотрения задачи примем, что v и u постоянны. Это допущение эквивалентно тому, что энергия, диссипируемая на пластическое течение, считается малой в сравнении со всей кинетической энергией кольца или кинетической энергией движения материала струи относительно центра масс ее **. Для струи скорость центра масс не зависит от изменения u , а у кольца диссипация энергии на пластическое течение замедляет основное радиальное движение. Это отличие в источниках энергии, идущей на диссипацию из-за пластического течения, необходимо учитывать при определении границ применимости конечного решения. Тот факт, что для кольца градиент скорости перпендикулярен радиальному движению, а для струи совпадает с направлением ее движения, не имеет принципиального значения. Главное различие в кинематике рассматриваемых объектов состоит в том, что в кольце все фазы движения и разрушения секторов его протекают синхронно, а в струе — последовательно, начиная с головных ее участков. Однако и это различие при некоторых упрощающих предположениях может быть обойдено. Так как и кольцо (цилиндрическая оболочка) [6], и струя разрушаются на большое число n фрагментов (причем процесс разрушения протекает независимо), то, не нарушая общности рассмотрения, достаточно проследить за эволюцией сектора кольца или участка струи размером $\geq 1/n$ от целого, считая, что в таком участке все процессы идут синхронно и диаметр его зависит только от времени, но не от координаты. Принятие последнего допущения сводит процесс рассмотрения деформации и разрушения кольца и струи к одним и тем же уравнениям.

Решение дифференциального уравнения запишем в виде $f(\epsilon, \dot{\epsilon}) = 0$, где $\epsilon = (r - r_0)/r_0$ или $(m - m_0)/m_0$ — деформация разрушения, а $\dot{\epsilon}$ — логарифмическая скорость деформации. Легко убедиться, что $\dot{\epsilon} = v/r$ или u/m , т. е. совпадает с величиной градиента скорости. Через m_0 обозначена длина участка струи m при $t = 0$. Будем искать функцию f , как и в [2], не делая ограничений относительно напряжения разрушения σ или критического значения деформации ϵ . Следуя [2, 7, 8], определим $f(\epsilon, \dot{\epsilon}) = 0$, полагая в качестве необходимого и достаточного условия к моменту разрушения равенство освободившейся упругой энергии в окрестности сечения разрушения работе по расчленению материала на части:

$$(1) \quad \int_V q dV = \lambda S,$$

где q — удельная упругая энергия на единицу объема; V — объем; λ — удельная на единицу поверхности разрушения работа; S — поверхность разрыва.

* Впервые попытка такого описания предпринята С. В. Сериковым на III Всесоюзной школе-семинаре по физике взрыва (25 — 29 июня 1984 г., Красноярск).

** Допущение, принятое в [2] для кольца, не является слишком сильным и для струи, например кумулятивной, если принять во внимание снижение предела текучести материала вследствие его начального разогрева на несколько сот градусов, так как материал такой струи в процессе ее образования ударно сжимается и затем изэнтропически разрушается.

Предположим, что с началом движения ($t = 0$) в среднем сечении рассматриваемого сектора кольца или участка струны начинается разрушение — развитие дефекта, образовавшегося с началом пластической деформации. Если в ближайшей окрестности рассматриваемого сечения разрушения окажется более дефектное сечение, то оно должно быть принято за сечение разрушения. В противном случае предполагается, что оно не сможет существенным образом повлиять на развитие разрушения в первоначально избранном сечении. Не претендуя на описание кинетики явления и не вдаваясь в детали развития процесса разрушения, проведем оценочные расчеты. От сечения разрушения по материалу кольца или струны в обе стороны побегут волны разгрузки. Освобождающаяся упругая энергия будет расходоваться на развитие области разрушения. При отыскании V , охваченного разгрузкой, учтем, что волны разгрузки распространяются по движущемуся материалу из-за наличия v/r или u/m (в [2—4, 6] этот эффект не учитывался). Рассмотрим сечение струны (или сечение вдоль образующей кольца), расположенное на расстоянии x от сечения разрушения. За время dt волна разгрузки пройдет путь

$$dx = (c + w)dt,$$

где $w = \dot{\epsilon}x$ — скорость смещения материала относительно сечения разрушения; c — скорость звука. Так как $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_0(1 + \dot{\epsilon}_0 t)^{-1}$,

$$\text{то } w = \dot{\epsilon}_0 x (1 + \dot{\epsilon}_0 t)^{-1},$$

где $\dot{\epsilon}_0 = \dot{\epsilon}$ при $t = t_0$, отсюда

$$(2) \quad dx = \dot{\epsilon}_0 [c/\dot{\epsilon}_0 + x/(1 + \dot{\epsilon}_0 t)] dt.$$

Решая (2) при $x = 0$, $t = 0$, находим

$$(3) \quad x = (c/\dot{\epsilon}_0)(1 + \dot{\epsilon}_0 t) \ln(1 + \dot{\epsilon}_0 t);$$

$$(4) \quad dx/dt = c[1 + \ln(1 + \epsilon)],$$

так как m/m_0 или $r/r_0 = 1 + \epsilon$.

Вернемся к уравнению (1). Из условия несжимаемости материала при его деформировании $S = S_0/(1 + \epsilon)$ и $dV = S_0 dx/(1 + \epsilon)$. Принимая во внимание, что волны разгрузки распространяются в обе стороны, перепишем (1):

$$(5) \quad 2 \int_0^x q \frac{dx}{(1 + \epsilon)} = \frac{\lambda}{(1 + \epsilon)}.$$

Подставляя (4) в (5) с учетом $dt = d\epsilon/\dot{\epsilon}_0$, получим

$$(6) \quad \int_0^\epsilon q [1 + \ln(1 + \epsilon)] \frac{d\epsilon}{(1 + \epsilon)} = \frac{\lambda \dot{\epsilon}_0}{(1 + \epsilon) 2c}.$$

Здесь $q = \gamma \sigma^2/2E$ ($\gamma = 3/4$ для кольца [2] и $\gamma = 1$ для струны). Уравнение пластического деформирования материала возьмем в более общем виде, чем в [2]:

$$(7) \quad \sigma = \sigma_0 + k\epsilon + \eta\dot{\epsilon} = \sigma_0 [1 + \xi \ln(1 + \epsilon) + \mu\dot{\epsilon}],$$

где $\xi = k/\sigma_0$; $\mu = \eta/\sigma_0$; k — модуль упрочнения материала. Поэтому

$$(8) \quad q = \gamma \frac{\sigma_0^2}{2E} [1 + \xi \ln(1 + \epsilon) + \mu\dot{\epsilon}]^2.$$

Подставляя (8) в (6), находим

$$(9) \quad \int_0^\epsilon [1 + \xi \ln(1 + \epsilon) + \mu\dot{\epsilon}]^2 [1 + \ln(1 + \epsilon)] \frac{d\epsilon}{(1 + \epsilon)} = \alpha \dot{\epsilon}, \quad \alpha = \lambda E / (\gamma c \sigma_0^2).$$

Решение уравнения (9) приводит к искомой зависимости:

$$(10) \quad \frac{\mu^2 \dot{\epsilon}^2}{2} \left\{ \frac{3}{2} \epsilon^2 + 3\epsilon - \ln(1 + \epsilon) \right\} + \epsilon \{ 2\mu\epsilon(2 + 3\xi) - 2\mu(1 + 3\xi) \ln(1 + \epsilon) - 2\mu\xi [\ln(1 + \epsilon)]^2 - \alpha \} + \left\{ \ln(1 + \epsilon) + \left(\frac{1}{2} + \xi \right) [\ln(1 + \epsilon)]^2 + \frac{\xi}{3} (\xi + 2) [\ln(1 + \epsilon)]^3 + \frac{\xi^2}{4} [\ln(1 + \epsilon)]^4 \right\} = 0.$$

Сравнение с экспериментом. В [2] приведены результаты экспериментов по динамической пластичности тонких оболочек из мягкой стали. Полагая в найденном решении (10) $\xi = 0$, приходим к уравнению, аналогичному (4) из [2], но с учетом тангенциального течения материала:

$$\frac{\mu^2 e^2}{2} \left\{ \frac{3}{2} \varepsilon^2 + 3\varepsilon - \ln(1 + \varepsilon) \right\} + e \{ 4\mu\varepsilon - 2\mu \ln(1 + \varepsilon) - \alpha \} + \left\{ \ln(1 + \varepsilon) + \frac{1}{2} [\ln(1 + \varepsilon)]^2 \right\} = 0. \quad (11)$$

При $\varepsilon \ll 1$ (11) совпадает с (5) из [2], что указывает на преимущество полученного решения.

На рисунке нанесены экспериментальные данные $\varepsilon(\lg \dot{e})$ (они хорошо описывались уравнением (4) из [2]) при $\alpha = 1,67 \cdot 10^{-4}$ с и $\mu = 0,85 \cdot 10^{-4}$ с (линия 4). Уравнению (11) при тех же значениях α и μ отвечает линия 5, а линии 6 и 3 проведены для значений $\alpha = 1,5 \cdot 10^{-4}$ с и $2,0 \cdot 10^{-4}$ с ($\mu = 0,85 \cdot 10^{-4}$ с). Как и следовало ожидать, более точное решение задачи не изменило вид зависимостей $\varepsilon(\lg \dot{e})$, но для описания экспериментов α должна быть увеличена до $\sim 1,9 \cdot 10^{-4}$ с при том же значении μ .

Анализ решения. Рассмотрим полное решение — уравнение (10). Учет возможного упрочнения материала в процессе его деформации приводит к деформации кривой $\varepsilon(\lg \dot{e})$, однако пик пластичности, найденный в [4], сохраняется. График функции (10) при $\xi = 8$ ($k = 0,01E$), $\alpha = 1,67 \cdot 10^{-4}$ с и $\mu = 0,85 \cdot 10^{-4}$ с показан на рисунке линией 2. С увеличением ξ асимметрия линии 2 относительно вертикали, проходящей через максимум функции, и максимальные значения ε и \dot{e} возрастают. При отсутствии вязкого члена ($\mu = 0$) в (8) уравнение (10) упрощается:

$$(12) \quad \dot{e}\alpha = \left(1 + \frac{\xi^2}{3} \right) \ln(1 + \varepsilon) + \left(\frac{1}{2} + \xi \right) [\ln(1 + \varepsilon)]^2 + \frac{2}{3} \xi [\ln(1 + \varepsilon)]^3 + \frac{\xi^2}{4} [\ln(1 + \varepsilon)]^4.$$

Если же и упрочнение отсутствует ($\mu = 0$ и $\xi = 0$), так что напряжение пластического течения постоянно и $\sigma = \sigma_0$, зависимость $f(\varepsilon, \dot{e})$ имеет вид

$$(13) \quad \dot{e}\alpha = \ln(1 + \varepsilon) \left[1 + \frac{1}{2} \ln(1 + \varepsilon) \right].$$

Графики функции (12) при $\alpha = 1,67 \cdot 10^{-4}$ с и $\xi = 8$ и функции (13) при $\alpha = 1,67 \cdot 10^{-4}$ с приведены на рисунке (линии 8 и 1).

Можно представить материал, не подверженный вязкому упрочнению ($\eta = 0$) и при малых деформациях не имеющий прочности ($\sigma_0 = 0$), но в процессе деформации упрочняющийся ($k \neq 0$). Для такого материала $f(\xi, \dot{e})$ находится из формулы (12):

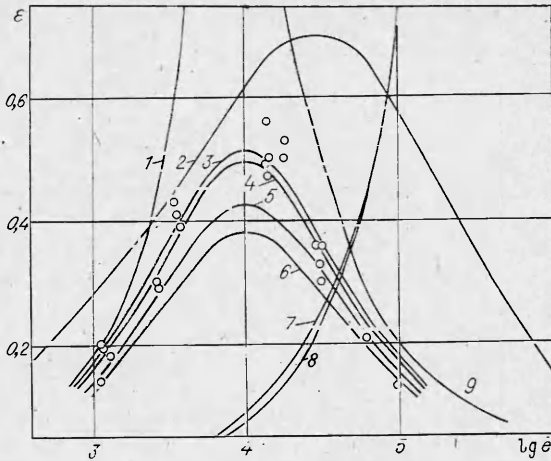
$$(14) \quad \dot{e} = \kappa \ln(1 + \varepsilon) \left\{ \frac{4}{3} + \frac{1}{2} [\ln(1 + \varepsilon)]^3 \right\},$$

где $\kappa = \xi^2/\alpha = k^2 \gamma c/(E\lambda)$. Линия 7 на рисунке соответствует значению $\kappa = 38,3 \cdot 10^4$ с⁻¹ ($\xi = 8$ и $\alpha = 1,67 \cdot 10^{-4}$ с).

Из функций (12)–(14) вытекает, что пик пластичности отсутствует, если нет вязкого члена. Для материалов, нечувствительных к изменению скорости деформации, таких как алюминий и некоторые его сплавы, пик пластичности отсутствует.

С ростом \dot{e} величина ε монотонно увеличивается.

Представляет также интерес частный случай, когда в уравнении (7) $\sigma_0 = 0$ и $k = 0$, а $\eta \neq 0$. Эта ситуация отвечает поведению жидкостей при динамическом воздействии, средам, прочность которых в статике близка к нулю, а при больших скоростях деформаций возникает сопротивление формоизменению — вязкая составляющая



щая прочности *. Уравнение (10) при этом упрощается до выражения

$$(15) \quad 2\beta = [(3/2)\epsilon^2 + 3\epsilon - \ln(1 + \epsilon)]e,$$

где $\beta = \alpha/\mu^2 = \lambda E/(\gamma c \eta^2)$. Линия 9 на рисунке отвечает уравнению (15) при $\beta = 2,31 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$ ($\alpha = 1,67 \cdot 10^{-4} \text{ с}$ и $\mu = 0,85 \cdot 10^{-4} \text{ с}$). Вид функции (15) делает понятным поведение жидкостей — быстрый распад жидких струй, способность жидкостей к дроблению до мелкодисперсных фракций при их ударном нагружении. Интересно отметить и такой факт: выдувание мыльных пузырей возможно только при медленном поддуве — малом значении e .

Из уравнения (10) может быть рассмотрен и случай, когда $\sigma_0 = 0$, а $k \neq 0$ и $\eta \neq 0$. Функция $f(\epsilon, e)$ оказывается квадратичной, поэтому, как и для уравнений (10) и (11), кривая $\epsilon(e)$ будет иметь максимум.

Заключение. Результаты проведенного исследования динамической зависимости ϵ разрушения от e в области глубокой пластичности, выполненного для некоторого гипотетического уравнения состояния материала вида (7) и при постоянных значениях σ_0 , η , k , а также величин v и u , конечно, не могут претендовать на адекватное описание разрушения материалов при уравнениях состояния, далеких от зависимости (7). Для более корректного описания должны быть учтены и такие факторы, как разогрев материала за счет пластического деформирования его, а следовательно, и изменение его характеристик σ_0 , λ и др., что особенно важно для деформаций $\epsilon \sim 0,5$ и более. Необходимо учитывать рост внутреннего трения с увеличением ϵ и, как следствие, уменьшение протяженности области в окрестности развивающейся трещины, с которой может быть снята упругая энергия на разрушение.

Но и при наличии такого количества оговорок получение в замкнутом аналитическом виде зависимости $f(\epsilon, e)$, возможность исследования этого решения применительно к некоторым частным видам уравнения состояния материала, успешное описание в [2] и здесь пока пластичности у мягкой стали, описание разрушения урановых оболочек, проведенное в [3], а также других материалов в [4], нахождение определяющих параметров α , μ , β , γ процесса высокоскоростного разрушения в пластической области дают право считать, что использование физически обоснованного интегрального энергетического критерия — правильный путь для описания этого вида разрушений. К такому выводу приводит и сравнение различных критериев разрушения оболочек, включая критерии [14, 15], основанные на подходе Тейлора [3, 4].

Принимая во внимание, что интегральный энергетический критерий, кроме динамического разрушения в области глубокой пластичности, рассмотренного выше, позволяет описать разрушение в упругой области при экстремально высоких скоростях нагружения материала (откол [7, 10]) и разрушение при статических нагрузках в упругой области деформации (магистральные трубопроводы [12]), отметим, что предложенный на его базе в [7] двухстадийный энергетический подход может явиться основой для создания общей теории разрушения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Мир механики — мир движения. — Правда, 1976, 22 мая.
2. Иванов А. Г. Особенности взрывной деформации и разрушения труб. — Пробл. прочности, 1976, № 11.
3. Olive F., Nicand A. et al. Rupture behaviour of metals in explosive expansion. — In: Mech. Prop. High Rates Strain: Proc. 2nd Conf., Oxford, 1979. Bristol — London, 1980.
4. Stelly M., Legrand J., Dorneval R. Some metallurgical aspects of the dynamic expansion of shells. — In: Shock Waves and High-Strain-Rate Phenomena. Metals: Conc. and Appl. Proc. Int. Conf. Metallurg. Eff. High-Strain-Rate Deform. and Fabr. Albuquerque, N. M., 1980. N. Y. — L., 1981.
5. Сериков С. В. Двуосная неустановившаяся деформация прямолинейной полосы в схеме сжимаемой вязкопластической среды. — ПМТФ, 1982, № 6.
6. Иванов А. Г., Кочкин Л. И. и др. Высокоскоростное разрушение тонкостенных труб из мягкой стали. — ПМТФ, 1983, № 1.
7. Иванов А. Г., Минеев В. Н. О масштабном критерии при хрупком разрушении конструкций. — ДАН СССР, 1975, т. 220, № 3.
8. Иванов А. Г., Минеев В. Н. О масштабных эффектах при разрушении. Обзор. — ФГВ, 1979, № 5.
9. Иванов А. Г., Учайев А. А. и др. Импульсное разрушение геометрически подобных объектов. — ДАН СССР, 1981, т. 261, № 4.
10. Иванов А. Г. Откол в квазиакустическом приближении. — ФГВ, 1975, № 3.
11. Канель Г. И. О работе откольного разрушения. — ФГВ, 1982, № 4.

* Значение λ для ряда жидкостей, как это следует из [13], не слишком сильно отличается от твердых тел, и по этой причине их поведение при разрушении определяется величиной σ и ее изменением со скоростью деформации.

12. Иванов А. Г. Феноменология разрушения и откол.— В кн.: Доклад на I Всесоюз. симпозиум по макрокинетике и химической газодинамике. Тез. докл. Т. 2, ч. 2, № 549. Черногловка, 1984; ФГВ, 1985, № 2.
13. Иванов М. А. Температурная зависимость прочности глицерина при отколе.— ПМТФ, 1981, № 1.
14. Hoggatt C. B., Reeh V. F. Fracture behaviour of tubular bombs.— J. Appl. Phys., 1968, v. 39, p. 1856.
15. Al-Hassani S. T. S., Johnson W. The dynamics of the fragmentation process for spherical shells containing explosives.— Int. J. Mech. Sci., 1969, v. 11, p. 811.

Поступила 11/II 1985 г.

УДК 539.376

УСТОЙЧИВОСТЬ РАСТУЩИХ ВЯЗКОУПРУГИХ ОБОЛОЧЕК, ПОДВЕРЖЕННЫХ СТАРЕНИЮ

Н. Х. АРУТЮНЯН, М. Н. МИХАЙЛОВ, В. Д. ПОТАПОВ

(Москва)

В [1, 2] рассмотрена задача об устойчивости на конечном и бесконечном промежутках времени сжатых растущих неоднородно стареющих вязкоупругих стержней. Устойчивость понималась в смысле устойчивости движения динамических систем по Чадаеву и Ляпунову. Показано, что механизм роста стержня, а также характеристики роста оказывают существенное влияние на показатели деформированного состояния стержня и на значения критического времени.

Цель данной работы — исследование устойчивости сжатых растущих тонкостенных оболочек, вязкоупругий материал которых обладает свойством старения. Уравнения состояния материала описываются уравнениями теории вязкоупругости неоднородно стареющих тел [3]. Оболочка находится под действием собственного веса и внешних нагрузок, меняющихся во времени.

1. Модель растущей оболочки. Рассмотрим тонкостенную оболочку, геометрические параметры которой вследствие наращивания материала меняются во времени. Выберем в оболочке поверхность S , которая может быть срединной поверхностью или эквидистантной ей. Положение точек оболочки будем определять координатами α_i, z ($i = 1, 2$), причем криволинейные координаты α_i отсчитываются вдоль линий главных кривизн поверхности S , а z — вдоль нормали к этой поверхности, направленной в сторону центров положительной кривизны координатной поверхности (со стороны вогнутости поверхности S , если она эллиптическая).

Предположим, что материальные точки с координатами α_i впервые зарождаются на поверхности S , после чего образуются стенки оболочки. Будем считать, что в каждый момент времени оболочка ограничена краевым контуром Γ , состоящим из отдельных частей Γ_i , где $\alpha_i = \text{const}$ ($i = 1, 2$). Если поверхность S — внутренняя (внешняя) поверхность оболочки, то рост ее стенки происходит в сторону внешней (внутренней) нормали. Если же поверхность S занимает промежуточное положение, то рост стенки происходит в направлении и внутренней, и внешней нормалей.

Предложенный механизм роста не исключает тот случай, когда часть толщины стенки оболочки зарождается одновременно с соответствующей частью поверхности S , а дальнейший рост происходит в сторону внешней или внутренней, или внутренней и внешней нормалей одновременно. Последний вариант наращивания толщины стенки имеет смысл, например, при усилении (реконструкции) оболочек.

2. Уравнения движения растущей вязкоупругой оболочки. Рассмотрим точку оболочки с координатами α_i, z , которая зародилась в момент времени $t = \tau^*(\rho)$, где $\rho = \{\alpha_i, z\}$. При $\tau^*(\rho)$ перемещения в точке координатной поверхности с координатами α_i равны $u_i^* = u_i(\tau^*(\rho), \rho^0)$, $w^* = w(\tau^*(\rho), \rho^0)$. Здесь $\rho^0 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, u_i — перемещение по направлению i -й координатной оси, w — дополнительный прогиб оболочки (перемещение вдоль нормали к координатной поверхности). Если $t > \tau^*(\rho)$, перемещения той же точки координатной поверхности равны $u_i = u_i(t, \rho^0)$, $w = w(t, \rho^0)$. Если материальная частица с координатами ρ в момент зарождения $\tau^*(\rho)$ ненапряженная, деформации в ней при $t \geq \tau^*(\rho)$ могут быть найдены с помощью модифицированной гипотезы Кирхгофа — Лява

$$(2.1) \quad \varepsilon_{ij} = \Delta e_{ij} - z \Delta \chi_{ij},$$

где $\Delta e_{ij} = e_{ij}(t, \rho^0) - e_{ij}(\tau^*(\rho), \rho^0)$; $\Delta \chi_{ij} = \chi_{ij}(t, \rho^0) - \chi_{ij}(\tau^*(\rho), \rho^0)$.

Деформации e_{ij} , кривизны и кручение χ_{ij} координатной поверхности S определяются выражениями, известными в теории оболочек (см., например, [4]). Приращения Δe_{ij} , $\Delta \chi_{ij}$ должны удовлетворять уравнениям неразрывности деформаций поверхности S , которые в случае малых прогибов оболочки имеют вид

$$(A_2 \Delta \chi_{22})_{,1} - (A_1 \Delta \chi_{12})_{,2} - A_{2,1} \Delta \chi_{11} - A_{1,2} \Delta \chi_{12} + \frac{1}{R_1} \left[2 (A_1 \Delta e_{12})_{,2} - \right.$$