О ДВИЖЕНИИ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Шт. И. Георгицэ

(Бухарест, Румыния)

Получены уравнения движения вязко-пластической жидкости в неоднородной среде типа *2* (кусочно-однородных) или *3* (с переменным коэффициентом фильтрации) [1] в предположении, что движение жидкости установившееся. Приводятся решения для параллельного потока и потока с осевой симметрией.

Движение вязко-пластической несжимаемой жидкости в пористой однородной среде рассматривалось в работе [1], где было показано, что расход вязко-пластической жидкости под гидротехническими сооружениями конечен в случае пористой среды бесконечных размеров. В работе [2] были выведены уравнения движения вязко-пластической жидкости в неоднородной среде. Выводы, полученные в [1], были экспериментально подтверждены в [3].

В настоящей работе рассматривается установившееся движение вязко-пластической несжимаемой жидкости в неоднородной среде второго или третьего типа. При этом предполагается, что в области течения нет застойных зон.

Приводятся примеры такого рода движений.

1. Основное уравнение, обобщающее закон Дарси на случай вязко-пластической жидкости, согласно [1] имеет вид

$$\mathbf{v} = -k\left(1 - \frac{K^*}{|\operatorname{grad} H|}\right)\operatorname{grad} H, \qquad H = \frac{p}{\rho g} + z \tag{1.1}$$

Здесь z — вертикальная координата. Будем предполагать, что всюду в пористой среде $|\operatorname{grad} H| > K^*$.

В отличие от движения вязкой жидкости в пористой среде, где неоднородность связана с коэффициентом фильтрации k, в данной работе неоднородность характеризуется также изменением начального градиента K^*. Следовательно, здесь могут существовать более сложные случаи неоднородных сред.

2. Рассмотрим среду типа *2*, т. е. кусочно-однородную среду. В этом случае область D, занятая пористой средой, может быть разделена на n подобластей D_j ($j = 1, \ldots, n$), в каждой из которых параметры k и K^* постоянны.

Приписывая индекс j всем величинам в области D_j, можно написать, что в любой области $\operatorname{div} \mathbf{v}_j = 0$, и тогда, согласно (1.1),

$$\left(1 - \frac{K_j^*}{|\operatorname{grad} H_j|}\right)\Delta H_j + \frac{K_j^* \operatorname{grad} H_j \cdot \operatorname{grad} |\operatorname{grad} H_j|^2}{2\,|\operatorname{grad} H_j|^3} = 0 \text{ в } D_j \tag{2.1}$$

или

$$\Delta H_j = \frac{K_j^*}{|\operatorname{grad} H_j|}\left(\Delta H_j - \frac{\operatorname{grad} H_j \cdot \operatorname{grad} |\operatorname{grad} H_j|^2}{2\,|\operatorname{grad} H_j|^2}\right) \text{в } D_j \tag{2.2}$$

Построенные соотношения совпадают с уравнением (3.10) [1].

Уравнения (2.1) должны быть решены с учетом условий на границе области D и условий сопряжения на границе S_{ij}, общей для области D_i и D_j ($i \neq j$). Первое условие требует, чтобы давление было непрерывным на границе S_{ij}

$$H_i = H_j \qquad \text{на } S_{ij} \tag{2.3}$$

Из второго условия вытекает непрерывность нормальной скорости на S_{ij}

$$k_i\left(1 - \frac{K_i^*}{|\operatorname{grad} H_i|}\right)\frac{\partial H_i}{\partial n} = k_j\left(1 - \frac{K_j^*}{|\operatorname{grad} H_j|}\right)\frac{\partial H_j}{\partial n} \tag{2.4}$$

Условия (2.3) и (2.4) должны быть использованы при применении метода малых возмущений, когда H_j выбирается в форме $H_{j0} + H_j^*$, где H_{j0} соответствует неоднородной среде, начальный градиент которой равен нулю.

Если предположить, что $|H_j^*|$ и $|\operatorname{grad} H_j^*|$ малы по сравнению с $|H_{j0}|$ и $|\operatorname{grad} H_{j0}|$ соответственно, то в условиях сопряжения можно пренебречь членами порядка K_j^{*n} ($n \geqslant 2$)

$$H_i^* = H_j^*, \quad k_i\frac{\partial H_i^*}{\partial n} - k_j\frac{\partial H_j^*}{\partial n} = \left(\frac{K_i^*}{|\operatorname{grad} H_{i0}|} - \frac{K_j^*}{|\operatorname{grad} H_{i0}|}\right)k_i\frac{\partial H_{i0}}{\partial n} \text{ на } S_{ij} \tag{2.5}$$

Функция H_j^* удовлетворяет уравнениям, которые можно легко вывести из (2.1).

Для среды третьего типа, т. е. когда k меняется от точки к точке, из уравнения неразрывности находим

$$\left(1 - \frac{K^*}{|\operatorname{grad} H|}\right)(\operatorname{grad} k \cdot \operatorname{grad} H + k\Delta H) +$$
$$+ k\left(K^* \frac{\operatorname{grad} |\operatorname{grad} H|^2}{2|\operatorname{grad} H|^2} - \operatorname{grad} K^*\right)\frac{\operatorname{grad} H}{|\operatorname{grad} H|} = 0 \qquad (2.6)$$

При $K^* = 0$ отсюда получается уравнение, описывающее движение обычной вязкой жидкости в неоднородной среде типа *3*. Если k и K^* постоянны, получим уравнение (2.2).

В случае, когда в среде есть неоднородность типа *2* для k и неоднородность типа *3* для K^*, такая среда может быть названа неоднородной средой типа *2—3*. Когда в среде есть неоднородность типа *3* для k и типа *2* для K^*, будем иметь среду типа *3—2*.

Рассмотрим примеры движения в горизонтальной плоскости. Третий параграф посвящен параллельному движению и движению с центральной симметрией.

3. Пусть ось x направлена вдоль потока. Будем предполагать, что границы слоя имеют уравнения $x = 0$, $x = L$. Для определенности предположим, что

$$H(0) = H_0 > H(L) = H^\circ$$

а) Среда типа *2*. Пусть $x = l$ $(0 < l < L)$ будет уравнением границы между двумя различными средами, тогда уравнение (1.1) можно записать в виде

$$u_j = -k_j\left(\frac{dH_j}{dx} + K_j^*\right) \qquad (j = 1,\ 0 < x < l;\ j = 2,\ l < x < L) \qquad (3.1)$$

при этом

$$-\frac{dH_j}{dx} > K_j^* \quad (j = 1, 2) \qquad (3.2)$$

Из уравнения неразрывности следует, что $d^2H_j / dx^2 = 0$; отсюда вытекает, что

$$H_j = A_j x + B_j \qquad (3.3)$$

Здесь A_j и B_j — некоторые константы и $-A_j > K_j^*$.

Граничные условия для $x = 0$ и $x = L$ дают

$$H_0 = B_1, \qquad H^\circ = A_2 L + B_2 \qquad (3.4)$$

Из условия сопряжения находим

$$A_1 l + B_1 = A_2 l + B_2, \qquad k_1(A_1 + K_1^*) = k_2(A_2 + K_2^*) \qquad (3.5)$$

Учитывая это, получаем

$$A_1 = -\frac{k_2(H_0 - H^\circ) + (k_1K_1^* - k_2K_2^*)(L - l)}{k_1(L - l) + k_2 l}$$
$$A_2 = -\frac{k_1(H_0 - H^\circ) + (k_2K_2^* - k_1K_1^*)\,l}{k_1(L - l) + k_2 l} \qquad (3.6)$$
$$B_1 = H_0,\quad B_2 = \frac{H^\circ l(k_2 - k_1) + H_0 L k_1 + (k_2K_2^* - k_1K_1^*)\,lL}{k_1(L - l) + k_2 l}$$

Введем обозначение $U^{-1} = k_1(L - l) + k_2 l$, будем иметь

$$H_1 = -[k_2(H_0 - H^\circ) + (k_1K_1^* - k_2K_2^*)(L - l)]U_x + H_0 \qquad (3.7)$$
$$H_2 = [k_1(H^\circ - H_0)(x - l) + (k_1K_1^* - k_2K_2^*)l(x - L) + k_2H^\circ l]U$$

Скорость u определяется выражением

$$u = k_1k_2\frac{H_0 - H^\circ - K_2^*(L - l) - K_1^* l}{k_1(L - l) + k_2 l} \qquad (3.8)$$

В однородной среде распределение давления не зависит от начального градиента и определяется скоростью течения. Отметим, что в рассматриваемом случае K_1^* и K_2^* — результат распределения давления и скорости.

б) Среда типа *3*. Уравнение движения имеет вид

$$u = -k\left(\frac{dH}{dx} + K^*\right) \qquad (0 < x < L)$$

и выражение (2.6) записывается в форме

$$k\left(\frac{d^2H}{dx^2}+\frac{dK^*}{dx}\right)+\left(\frac{dH}{dx}+K^*\right)\frac{dk}{dx}=0$$

Так как $k\neq 0$, то получим дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами

$$\frac{d^2H}{dx^2}+\frac{d\ln k}{dx}\frac{dH}{dx}+K^*\frac{d\ln k}{dx}+\frac{dK^*}{dx}=0 \tag{3.9}$$

В простейшем случае, когда $k=k_0e^{Cx}$, $K^*=\text{const}$, уравнение (3.9) принимает вид

$$\frac{d^2H}{dx^2}+C\frac{dH}{dx}+CK^*=0 \tag{3.10}$$

Общее решение этого уравнения запишется в форме

$$H=Ae^{-Cx}-K^*x+B$$

Используя граничные условия, получим

$$H=[(H_0-H^\circ-K^*L)e^{-Cx}+H^\circ-H_0e^{-CL}+K^*L]\,(1-e^{-CL})^{-1}-K^*x \tag{3.11}$$

Скорость в этом случае должна иметь вид

$$u=k_0C\left(\frac{H_0-H^\circ}{L}-K^*\right)(1-e^{-CL})^{-1} \tag{3.12}$$

Это выражение, как легко видеть, должно быть всегда положительным.

Заметим, что распределение давлений и скоростей зависит от K^*. В том случае, когда параметры среды могут быть представлены линейными функциями

$$k=a+bx,\qquad K^*=A^*+B^*x \tag{3.13}$$

уравнение (3.9) будет иметь вид

$$\frac{d^2H}{dx^2}+\frac{1}{\alpha+x}\frac{dH}{dx}+\frac{A+Bx}{\alpha+x}=0 \tag{3.14}$$

где

$$\alpha=ab^{-1},\quad A=A^*+\alpha B^*,\quad B=2B^* \tag{3.15}$$

Решение этого уравнения запишется в форме

$$H=M\ln(\alpha+x)+N-A\,[x-\alpha\ln(\alpha+x)]+ + {}^1/_2B\,[{}^1/_2(2\alpha x-x^2)-\alpha^2\ln(\alpha+x)] \tag{3.16}$$

Используя граничные условия, найдем величины постоянных M и N в виде

$$M=\frac{2\,(H^\circ-H_0)+2A\,[L-\alpha\ln(1+L/\alpha)]+B\,[\alpha^2\ln(1+L/\alpha)-\alpha L-{}^1/_2L^2]}{2\ln(1+L/\alpha)}$$

$$N=H_0+\frac{\ln\alpha}{\ln(1+L/\alpha)}\left[H^\circ-H_0-AL+BL\frac{2\alpha-L}{4}\right] \tag{3.17}$$

Скорость в пористой среде определяется выражением

$$u=-(aA^*+bM) \tag{3.18}$$

Отсюда при $B^*\to 0$ и $b\to 0$ можно получить решение в соответствующей однородной среде.

4. В случае движения с центральной симметрией обозначим через $r=r_0$ и $r=r^\circ$ границы пористой среды, на которых H принимает значения H_0 и H° соответственно. Предположим для определенности, что $H_0>H^\circ$. Обозначим через q величину расхода на единицу толщины пористой среды.

а) Среда второго типа. Пусть $r=R$ $(r_0<R<r^\circ)$ — уравнение общей границы двух различных сред, имеющих коэффициенты фильтрации k_1 и k_2. Тогда скорость u_j можно записать в следующем виде:

$$u_j=-k_j\left(\frac{dH_j}{dr}+K^*{}_j\right)\qquad\begin{pmatrix} j=1, & r_0<r<R\\ j=2, & R<r<r^\circ\end{pmatrix} \tag{4.1}$$

Уравнение неразрывности запишется в форме

$$2\pi ru_j=q \tag{4.2}$$

где r и j имеют те же значения, что и в выражении (4.1).

Из (4.2) следует, что H_j удовлетворяет уравнению

$$\frac{dH_j}{dr} = -\frac{q}{2\pi k_j r} - K_j^* \qquad (4.3)$$

Отсюда

$$H_j = -\frac{q}{2\pi k_j}\ln r - K_j^* r + M_j$$

Когда H_0 и H° даны, нужно определить три константы: M_1, M_2 и q. Они могут быть получены из граничных условий на $r = r_0$ и $r = r^\circ$ и условия (2.3); здесь условие (2.4) автоматически удовлетворяется. Уравнения для определения констант будут иметь вид

$$H_0 = -\frac{q}{2\pi k_1}\ln r_0 - K_1^* r_0 - M_1, \qquad H^\circ = -\frac{q}{2\pi k_2}\ln r^\circ - K_2^* r^\circ + M_2$$

$$-\frac{q}{2\pi k_1}\ln R - K_1^* R + M_1 = -\frac{q}{2\pi k_2}\ln R - K_2^* R + M_2$$

Величина расхода определится выражением

$$q = 2\pi\,\frac{H_0 - H^\circ - K_1^*(R - r_0) - K_2^*(r^\circ - R)}{K_2^{-1}\ln(r^\circ / R) - K_1^{-1}\ln(r_0 / R)} \qquad (4.4)$$

Это выражение всегда положительно. Для H_1 и H_2 получим

$$H_1 = H_0 - \frac{q}{2\pi k_1}\ln\frac{r}{r_0} - K_1^*(r - r_0) \qquad (r_0 < r < R)$$

$$H_2 = H_\alpha - \frac{q}{2\pi k_2}\ln\frac{r}{r^\circ} + K_2^*(r^\circ - r) \qquad (R < r < r^\circ) \qquad (4.5)$$

где q определяется выражением (4.4)

б) Среда третьего типа. В этом случае H будет удовлетворять уравнению

$$\frac{dH}{dr} = -\frac{q}{2\pi k r} - K^*$$

В случае, когда $k = k(r)$ и $K^* = K^*(r)$ — линейные функции

$$k = a + br, \quad K^* = A + Br \qquad (4.6)$$

функция H будет иметь вид

$$H = -\frac{q}{2\pi a}\ln\frac{r}{r + ab^{-1}} - \left(Ar + B\frac{r^2}{2}\right) + M$$

Используя граничные условия, получим для расхода выражение вида

$$q = \pi a\,\frac{2(H_0 - H^\circ) - 2A(r^\circ - r_0) - B(r^{\circ 2} - r_0^2)}{\ln[r^\circ(a + br_0)] - \ln[r_0(a + br^\circ)]} \qquad (4.7)$$

Для функции H будем иметь

$$H = H^\circ - \frac{q}{2\pi a}\ln\frac{r(a + br^\circ)}{r^\circ(a + br)} - A(r - r^\circ) - \frac{B}{2}(r^2 - r^{\circ 2}) \qquad (4.8)$$

Формулы (3.7), (3.8), (3.16), (3.18), (4.4), (4.5), (4.7), (4.8) обобщают соответствующие выражения подземной гидродинамики для простой вязкой жидкости на случай движения вязко-пластической среды.

При плоском одноразмерном движении или движении с центральной симметрией могут быть рассмотрены более сложные неоднородные среды, которые можно назвать «смешанными». Например, среды типа *2—3*, *3—2*, или различные комбинации этих сред.

Поступила 9 IV 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Gheorghitza St. I. Motions with initial gradient, Quart J. of Mech, Appl. Math., vol. XII, part 3, p. 280, 1959.
2. Gheorghitză St. I. Depremiscările neliniare cu gradient initial, Analele Univ. C. I. Parhon, Seria st. Naturii. No. 22, p. 39, 1959.
3. Султанов Б. И. О фильтрации вязко-пластичных жидкостей в пористой среде. Изв. АН. АзербССР, Серия физ.-мат. и техн. наук, 1960, № 5, стр. 125.