

УДК 536.46

## МЕХАНИЗМ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ЭРОЗИОННОГО ЭФФЕКТА

К. О. Сабденов, М. Ерзада

Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, 010008 Астана, Казахстан  
sabdenovko@yandex.kz

Предложен механизм возникновения отрицательного эрозионного горения (эффекта) в канале топливного заряда ракетного двигателя. Снижение скорости горения возникает вследствие падения температуры пламени за счет перехода тепла химических реакций в кинетическую энергию газа. Существует критическое значение числа Вилюнова, выше которого стационарное горение топлива невозможно. Стационарное горение возможно до уменьшения скорости горения в  $1/e^{1/2}$  раз от первоначального значения. Дано объяснение слабому проявлению отрицательного эрозионного эффекта при снижении начальной температуры топлива: уменьшение пороговой скорости возникновения положительного эрозионного горения сужает область возникновения отрицательного эрозионного горения.

Ключевые слова: отрицательный эрозионный эффект, критическое число Вилюнова, число Булгакова — Липанова.

### ВВЕДЕНИЕ

Известно [1, 2], что при обдуве твердого ракетного топлива газовыми продуктами горения меняется скорость его горения  $u$  (скорость газификации твердой фазы топлива). Это явление получило название эрозионного эффекта. Такой обдув всегда существует в ракетных двигателях с широко применяемым топливным зарядом канального типа. Кроме того, многие исследователи [1–5] связывают изменение скорости горения топлива при возникновении акустической неустойчивости с эрозионным эффектом: появление тангенциальных колебаний газа в канале топливного заряда сопровождается периодическим движением газа вдоль поверхности газификации твердой фазы топлива.

При относительно малых скоростях обдува на бесконечном удалении от поверхности ( $w_\infty$ ) скорость горения  $u$  сначала немного снижается. Но в дальнейшем с увеличением  $w_\infty$  выше порогового значения  $w_*$  скорость горения начинает расти. Снижение скорости горения получило название отрицательного эрозионного эффекта, повышение — положительного эрозионного эффекта. Последний достаточно хорошо исследован [2, 6, 7]. Он проявляется в случае, когда толщина ламинарного подслоя становится меньше ширины зоны горения

в газовой фазе. Тогда пламя в газовой фазе, изначально ламинарное, становится турбулентным, что влечет за собой рост потока тепла к поверхности газификации топлива и увеличение скорости горения.

О механизме возникновения отрицательного эрозионного эффекта нет общепринятого представления. Существуют только различные предположения. Так, в работах [7, 8] считается, что снижение скорости горения вызвано «растяжением» пламени. Как известно, влияние «растяжения» пламени на скорость горения определяется значением параметра  $K = \alpha g_u / v_n^2$  [9–11], где  $\alpha$  — коэффициент температуропроводности,  $g_u$  — характерный градиент потока газа вдоль поверхности газификации топлива, вызванный какими-либо внешними причинами (гидродинамическое искажение),  $v_n$  — нормальная скорость ламинарного пламени в газе. Заметное влияние «растяжения» пламени на скорость горения проявляется при  $K \approx 1$ , т. е. характерное значение градиента скорости газа должно быть большим:  $g_u \approx 10^4 \text{ с}^{-1}$  и более.

При небольших скоростях обдува поверхности топлива ( $w_\infty \ll w_*$ ), когда наблюдается отрицательная эрозия, зона горения располагается в вязком подслое пограничного слоя [6], где турбулентность сильно подавляется диссипативными процессами. Здесь параметр  $g_u$  может достигать больших значений, если выпол-

няется приближенное равенство  $g_u \approx w_\infty / \Delta_g$  с характерной длиной  $\Delta_g$  вдоль поверхности газификации топлива, причем должно быть  $\Delta_g \approx 10^{-2}$  м. Только в этом случае возможно  $K \approx 1$ . Но такое течение в ракетных двигателях, скорее всего, нереально. Поэтому отрицательный эрозийный эффект нельзя объяснить «растяжением» пламени.

Согласно модели [12] отрицательный эрозийный эффект возникает вследствие неустойчивости: нерегулярные колебания создают в отходящем от поверхности потоке продуктов горения «собственную» турбулентность. Наложение и последующее усиление продольного обтекания поверхности горения разрушает структуру «собственной» турбулентности. При этом снижается поток тепла из газовой фазы к поверхности горения, что и создает эффект отрицательной эрозии.

Модель [12] предсказывает постепенное исчезновение отрицательного эрозийного эффекта при снижении начальной температуры топлива.

Численное моделирование горения при обдуве проведено достаточно полно [2–4, 13–18], но физический механизм возникновения отрицательной эрозии все же остается неясным. Уравнения, описывающие горение в обдуваемом потоке газа, содержат большое число гидродинамических, теплофизических и кинетических параметров. Их вклад в появление отрицательной эрозии различен как по физической природе, так и по величине.

Механизм появления отрицательной эрозии может оказаться простым и универсальным по природе. Горение сопровождается тепловым расширением газа вследствие разложения твердой фазы топлива на газовые компоненты и последующего разогрева. Расширение газа и отток от поверхности газификации происходят с определенной скоростью  $v$ , ее пространственное распределение строго сбалансировано в самом процессе горения.

Пусть теперь под влиянием внешнего воздействия возникает движение газа вдоль твердой поверхности газификации со скоростью  $w$ . Согласно теории гидродинамического пограничного слоя [19], из-за потери импульса вдоль твердой поверхности возникает нормальная к поверхности составляющая вектора скорости газа:  $\Delta w \sim w$ . Тогда к скорости  $v$  добавляется еще  $\Delta w$ . Такое кажущееся увеличение оттока газа

$$v' = v + \Delta w \quad (1)$$

нарушает установившийся до этого тепловой и массовый баланс. Увеличение скорости газа должно унести пламя в газовой фазе от поверхности разложения топлива. При этом тепловой поток из газовой фазы к поверхности топлива должен постепенно снижаться, что в конечном счете приведет к прекращению горения. Но если процесс горения обладает некоторым запасом устойчивости, то согласно принципу Ле Шателье внутренние изменения в системе будут стремиться или полностью вернуть прежнее состояние, или подстроиться к новым условиям, при этом максимально минимизировав внешнее воздействие. Под термином «запас устойчивости» понимается физическая величина, которая существует в исходном процессе горения и сохраняется при наличии обдува в ненулевом интервале скорости  $w$ .

Грубая оценка такой минимизации внешнего воздействия может быть представлена как сохранение прежнего значения скорости оттока газа в левой части равенства (1), а в правой его части при обдуве формируется скорость  $v_w$  вместо  $v$ . Таким образом, получаем  $v = v_w + \Delta w$ . Отсюда следует  $v_w = v - \Delta w$ . Так как  $v$  и  $v_w$  связаны со скоростью пламени в газовой фазе, это выражение указывает на снижение скорости горения по сравнению с первоначальным значением, когда обдува нет. Скорость горения наиболее сильно зависит от температуры, поэтому данное снижение вызвано в первую очередь падением температуры во всей области, где происходит горение.

Изложенные рассуждения в целом составляют способ выяснения физической картины возникновения отрицательного эрозийного эффекта: оно должно быть связано с существованием инвариантной величины, с помощью которой можно найти скорость горения при отрицательной эрозии.

## ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ

Закон сохранения массы в отсутствие обдува для упрощения вычислений возьмем в виде

$$\rho_c u \approx \rho_s v_s = m,$$

а при наличии обдува — в виде

$$\rho_c u_w = \rho_{sw} v_{sw} = m_w.$$

Здесь  $\rho_c, \rho_s$  — плотности топлива и газа вблизи поверхности разложения топлива,  $m$  — массовая скорость горения,  $v_s$  — скорость оттекающего газа с этой поверхности,  $u_w$  — скорость горения при обдуве,  $\rho_{sw}, v_{sw}$  — плотность и скорость газа на поверхности топлива при обдуве. Тогда в случае стационарного горения коэффициент эрозии  $\varepsilon$  можно определить как

$$\varepsilon = \frac{m_w}{m} = \frac{\rho_{sw} v_{sw}}{\rho_s v_s}. \quad (2)$$

Для выяснения механизма возникновения отрицательной эрозии и расчета  $\varepsilon$  наиболее привлекательной инвариантной величиной является полная энергия газа в зоне пламени. В пользу этого свидетельствуют следующие доводы. Отрицательный эрозионный эффект экспериментально наблюдается в ракетных двигателях или специальных камерах, где используются каналные топливные заряды и обдувающий газ выделяется в процессе горения топлива. Предположим, что горение происходит в адиабатических условиях: потери тепла в окружающее пространство пренебрежимо малы по сравнению с полным тепловым эффектом  $Q'$  топлива. Энергия  $Q'$  расходуется на нагрев газа до температуры пламени  $T_b$  и на движение газа, которое возникает за счет теплового расширения. Это движение в зоне горения имеет две составляющие скорости: скорость  $v$  направлена перпендикулярно поверхности топлива, а скорость  $w$  — вдоль оси канала топливного заряда параллельно поверхности газификации топлива. Если всегда  $v \neq 0$ , то скорость  $w$  зависит от условий горения. В зоне пламени все химические реакции завершены и процессы протекают в локально адиабатических условиях. В цилиндрическом канале топлива температура газа меняется вдоль его оси, но термодинамические параметры газа меняются практически равновесно [1, 4]. Поэтому при сгорании топлива в условиях  $w = 0$  реализуется температура пламени  $T_b$ , а при  $w \neq 0$  температура пламени будет  $T_{bw}$ . Это следует из первого закона термодинамики, который для указанных двух случаев можно записать в виде

$$Q' = c_p T_b + v_b^2/2, \quad (3)$$

$$Q' = c_p T_{bw} + v_{bw}^2/2 + w_b^2/2,$$

где  $c_p$  — теплоемкость газа при постоянном давлении,  $v_b, v_{bw}$  — скорости газа в зоне пламени при отсутствии и наличии обдува,  $w_b$  —

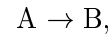
скорость обдувающего потока в зоне пламени. Скорость  $w_b$ , вообще-то, зависит от координаты вдоль нормали к поверхности горения, но для грубого расчета примем  $w_b \approx w_\infty$ . Следовательно, инвариантом, обеспечивающим существование горения, может быть комплекс

$$c_p T_{bw} - c_p T_b + v_{bw}^2/2 - v_b^2/2 + w_\infty^2/2 = 0.$$

Скорости  $v_b, v_{bw}$  меняются очень слабо по сравнению с  $w_\infty$ . Поэтому ими можно пренебречь. Тогда

$$T_{bw} = T_b - w_\infty^2/2c_p.$$

Химические реакции в газовой фазе представим одной брутто-реакцией



где  $A$  — горючая смесь,  $B$  — продукты реакции, с одной эффективной энергией активации  $E$ . Такое представление широко используется при анализе устойчивости и нестационарных режимов горения твердых ракетных топлив [5, 8, 20 и др.]. При больших значениях  $E$  массовую скорость горения  $m_b$  в газовой фазе в отсутствие обдува можно записать в виде [8, 20]

$$m_b \sim \exp \frac{E}{2RT_b}$$

( $R$  — универсальная газовая постоянная). Предполагая неизменность  $E$  при наличии обдува, выразим коэффициент эрозии через массовую скорость горения в газовой фазе при обдуве ( $m_{bw}$ ):

$$\begin{aligned} \varepsilon = \frac{m_{bw}}{m_b} &= \exp \left[ \frac{E}{2R} \left( \frac{1}{T_b} - \frac{1}{T_{bw}} \right) \right] = \\ &= \exp \left[ \frac{E}{2RT_b} \left( 1 - \frac{T_b}{T_{bw}} \right) \right]. \quad (4) \end{aligned}$$

Подставив сюда значение  $T_{bw}$ , находим

$$\varepsilon = \exp \left[ \frac{E}{2RT_b} \left( 1 - \frac{1}{1 - w_\infty^2/2w_0^2} \right) \right],$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{c_p R T_b^2}{E}}.$$

При типичных значениях  $c_p \approx 10^3$  Дж/(кг·К),  $T_b \approx 2500$  К,  $RT_b/E \approx 0.1 \div 0.01$  масштабная скорость  $w_0$  имеет

порядок сотен метров в секунду. По порядку величины она совпадает со скоростью обдува, когда можно наблюдать отрицательный эрозионный эффект. Современные экспериментальные методы [21] позволяют обнаружить снижение скорости горения (примерно на  $3 \div 5 \%$ ) уже при  $w_\infty \approx 10$  м/с. Это дает возможность определить эффективную энергию активации  $E$ .

Из вышеизложенного следует, что возникновение отрицательного эрозионного горения, в сущности, представляет собой газодинамическое явление с масштабной скоростью  $w_0$ .

Численное исследование отрицательного эрозионного горения проведено в работах [16–18]. В этих моделях уравнение энергии для продуктов горения содержит кинетическую энергию движения газа. Полученные результаты указывают на снижение скорости горения при обдуве поверхности горения топлива. Но сами авторы не называют причину этого явления.

Изложенные выше оценки грубые. Скорость обдувающего потока на самом деле является функцией расстояния  $x$  от поверхности газификации, и, как следствие, существует функциональная зависимость  $T_{bw} = T_{bw}(x)$ . Но эти оценки дают основную физическую картину снижения скорости горения при обдуве поверхности газификации топлива, которая более подробно рассматривается ниже.

### МОДЕЛЬ ГОРЕНИЯ ТВЕРДОГО РАКЕТНОГО ТОПЛИВА ПРИ НАЛИЧИИ ОБДУВА

Для исследования горения твердого ракетного топлива воспользуемся следующим модельным представлением [1, 3–5, 8]: в отсутствие обдува с поверхности газификации  $x_s(t)$ , где  $t$  — время, горючая смесь оттекает со скоростью  $v_s$ . Эта смесь в дальнейшем сгорает на поверхности  $x_f(t)$ , что предполагает бесконечно большую скорость химической реакции или ее бесконечно большую энергию активации. Эта реакция представляется протекающей по брутто-схеме  $A \rightarrow B$  (см. выше). Относительное расположение поверхностей  $x_s$  и  $x_f$  показано на рис. 1.

Топливо имеет переменную температуру  $T_c$ . Его теплоемкость  $c_c$  считается постоянной. Газификация материала топлива происходит в бесконечно узкой зоне с тепловым эффектом  $L$  при температуре  $T_s = T_c(x = x_s)$ . В интервале

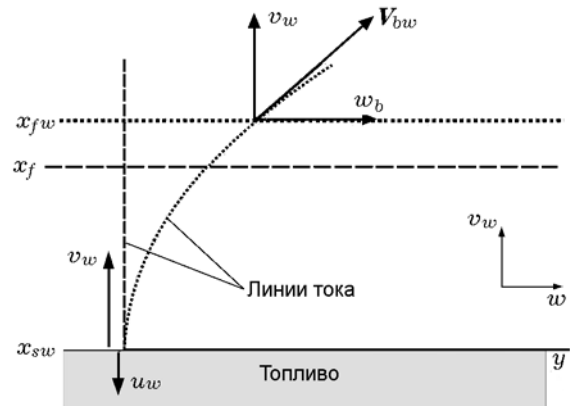


Рис. 1. Структура зоны горения в отсутствие (штриховые линии) и при наличии (пунктирные линии) обдува поверхности горения,  $v_w = v_w(x = x_{sw})$

$x_f - x_s$ , который называется зоной горения, газовая смесь характеризуется температурой  $T$ , плотностью  $\rho$  и теплоемкостью при постоянном давлении  $c_p$ . Область  $x > x_f$  (зона пламени) занята продуктами горения. Здесь температура  $T_b$ , плотность  $\rho_b$ .

Массовая скорость горения в стационарном режиме  $m = \rho_c u$ , причем  $u = dx_s/dt = dx_f/dt$ .

Пусть теперь обдув плоской поверхности топлива со скоростью  $w(x)$  происходит вдоль направления координаты  $y$  (см. рис. 1). Это приводит к появлению пограничного слоя [19]. На достаточно большом удалении  $x \rightarrow \infty$  за пределами пограничного слоя устанавливается постоянное значение этой скорости:  $w = w_\infty = \text{const}$ . Координаты поверхности газификации и сгорания газовой смеси  $x_{fw}$  и  $x_{sw}$  зависят от координаты  $y$ . Причина появления такой зависимости указана в [9]: в газовой фазе поверхность горения стремится повернуться к набегающему потоку так, чтобы направление нормали к поверхности горения было как можно ближе к направлению потока. В результате поверхность горения поворачивается на угол  $\psi$ . Зависимость же  $x_{sw}$  от координаты  $y$  является следствием указанного явления.

Здесь и далее значения параметров при наличии обдува по мере необходимости будем снабжать нижним индексом  $w$ , а значения параметров на поверхности газификации — нижним индексом  $s$ .

Скорость газа до фронта горения определяется по формуле  $\mathbf{V} = i v_w + j w$ , где  $v_w$ ,  $w$  — проекции на оси декартовых координат  $x$ ,  $y$ ;

$i, j$  — единичные векторы. Непосредственно за фронтом горения (в зоне пламени) скорость газа  $V_{bw} = iv_{bw} + jw_b$ .

Ниже мы полагаем, что пограничный слой состоит из двух областей: ламинарного подслоя и зоны развитого турбулентного течения. Структура ламинарного подслоя такова [19], что гидродинамические параметры в нем сильно меняются по направлению координаты  $x$  и слабо — по направлению  $y$ .

Примем следующие предположения:

1) при относительно малых скоростях обдува ширина ламинарного подслоя  $\delta_g$  больше ширины зоны горения  $\delta_b = x_{fw} - x_{sw}$  в газовой фазе;

2) углом  $\psi$  поворота поверхности  $x_{fw}$  относительно положения при отсутствии обдува можно пренебречь;

3) теплоемкости газовой ( $c_p$ ) и твердой ( $c_s$ ) фаз топлива одинаковы.

Приведем основные соотношения для фронта горения. Для этого воспользуемся подходом, принятым в теории пограничного слоя.

В пределах ламинарного подслоя можно полагать скорости  $v_w, w, v_{bw}, w_b$  зависящими только от координаты  $x$  [19, 22]:

$$v_w = v_w(x), \quad w = w(x),$$

$$v_{bw} = v_{bw}(x), \quad w_b = w_b(x).$$

Принятие второго предположения приводит к тому, что температура, плотность и концентрация тоже должны зависеть только от координаты  $x$ .

Найдем относительную ширину зоны горения  $(x_{fw} - x_{sw})/(x_f - x_s)$ . Это отношение можно приближенно рассчитать, если принять, что [23]

$$x_f - x_s = A_1 \alpha / v_b, \quad x_{fw} - x_{sw} = A_2 \alpha / v_{bw}.$$

Коэффициенты  $A_1, A_2$  порядка единицы и слабо зависят от теплофизических и гидродинамических параметров. Будем считать, что  $A_1/A_2 \approx 1$ . Тогда

$$\frac{x_{fw} - x_{sw}}{x_f - x_s} = \frac{v_b}{v_{bw}} = \frac{v_b \rho_b}{v_{bw} \rho_{bw}} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{T_b}{T_{bw}} = \frac{\theta_b}{\varepsilon \theta_{bw}}, \quad (5)$$

где  $\theta_b = T_b/T_s$ ,  $\theta_{bw} = T_{bw}/T_s$ .

## СКОРОСТЬ ОБДУВАЮЩЕГО ПОТОКА В ВЯЗКОМ ПОДСЛОЕ

В теории пограничного слоя на проницаемой стенке [22] распределение скорости в ламинарном подслое при  $dp/dy = 0$  имеет экспоненциальную форму:

$$w = \frac{C_f \rho_{bw} w_\infty^2}{2 m_w} \left( \exp \frac{m_w (x - x_{sw})}{\mu} - 1 \right). \quad (6)$$

Здесь  $C_f$  — коэффициент сопротивления;  $\mu = \rho \nu \approx \rho_b \nu$ ,  $\nu$  — кинематическая вязкость газа. Слабой зависимостью динамической вязкости газа  $\mu$  от температуры пренебрегаем, так как  $\nu \sim T^n$ ,  $n \approx 0.5 \div 0.75$  [24], а  $\rho \approx 1/T$ .

По всей видимости, формула (6) справедлива только в непосредственной близости к твердой поверхности. Этой формулой пользоваться неудобно, так как она дает чрезмерно заниженную толщину ламинарного подслоя из-за быстрого экспоненциального роста. Действительно, если полагать, что  $w = w_\infty$  на внешней границе вязкого подслоя, то из равенства

$$w_\infty = \frac{C_f \rho_{bw} w_\infty^2}{2 m \varepsilon} \left( \exp \frac{m \varepsilon \delta_g}{\mu} - 1 \right)$$

определяется толщина вязкого подслоя

$$\begin{aligned} \delta_g &= \frac{\mu}{m \varepsilon} \ln \left( 1 + \frac{2 m \varepsilon}{C_f \rho_{bw} w_\infty} \right) = \\ &= \frac{\nu}{v_{sw}} \ln \left( 1 + \frac{2 \rho_s v_{sw}}{C_f \rho_{bw} w_\infty} \right). \end{aligned}$$

Подставив сюда типичные значения  $\nu = 3.5 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с,  $v_{sw} = 7.0$  м/с,  $\rho_{sw}/\rho_{bw} \approx 5$ ,  $C_f = 0.03$ ,  $w_\infty = 10$  м/с, получаем  $\delta_g \approx 0.25 \cdot 10^{-4}$  м.

Более подходящим приближением для скорости  $w$  является формула для непроницаемой поверхности [19]:

$$w = \frac{C_f \rho_{bw} w_\infty^2}{2 \mu} (x - x_{sw}).$$

Толщина ламинарного подслоя, вычисленная по этой формуле, дает более реалистичное значение:  $\delta_g \approx 2\nu/C_f w_\infty \approx 2.3 \cdot 10^{-4}$  м.

Скорость  $w_b$  может быть выражена через число Булгакова — Липанова  $\Theta$ :

$$w_b = \frac{C_f \rho_{bw} w_\infty^2}{6 \mu} (x_{fw} - x_{sw}) =$$

$$= w_{\infty} \frac{x_{fw} - x_{sw}}{\delta_g} = w_{\infty} \Theta,$$

$$\Theta = \frac{x_{fw} - x_{sw}}{\delta_g}, \quad \delta_g = \frac{6\mu}{C_f \rho_{bw} w_{\infty}}.$$

Если  $\Theta > 1$ , то  $w_b = w_{\infty}$ . Превышение значения  $\Theta = 1$  является условием возникновения положительного эрозийного эффекта. Ограничение  $\Theta < 1$  является областью расчета коэффициента отрицательной эрозии.

### ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЕТА КОЭФФИЦИЕНТА ЭРОЗИИ

Скорость обдувающего потока  $w$  по мере удаления от поверхности газификации растет от нулевого значения. На внешней части турбулентного пограничного слоя она принимает постоянное значение:  $w = w_{\infty}$ .

В случае обдува по мере увеличения скорости  $w_{\infty}$  пограничный слой становится турбулентным. Но турбулентность не оказывает существенного влияния на горение, пока  $w_{\infty} < w_*$ .

При  $w_{\infty} < w_*$  толщину ламинарного подслоя можно считать больше ширины зоны горения. По аналогии с (3) запишем закон сохранения энергии для ламинарного подслоя и за фронтом пламени:

$$c_p T_{bw} = Q - L - \frac{w_b^2}{2} - \frac{v_{bw}^2}{2},$$

где  $Q$  — тепловой эффект химических реакций в газовой фазе. В отсутствие продольной составляющей скорости потока газа справедливо равенство

$$c_p T_b = Q - L - \frac{v_b^2}{2}.$$

Из этих двух соотношений получаем

$$c_p (T_{bw} - T_b) = -\frac{w_b^2}{2} + \frac{v_b^2}{2} - \frac{v_{bw}^2}{2}$$

или

$$T_{bw} - T_b = -\frac{w_b^2}{2c_p} + \frac{v_b^2 - v_{bw}^2}{2c_p}.$$

Пренебрегая в правой части равенства вторым слагаемым как малой величиной по сравнению с первой, запишем

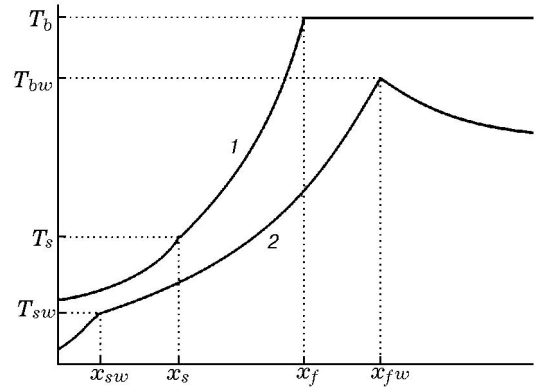


Рис. 2. Распределения температуры в отсутствие (1) и при наличии (2) обдува поверхности горения в приближении бесконечно тонкой зоны химических реакций

$$\frac{T_{bw}}{T_b} = 1 - \frac{w_b^2}{2c_p T_b} \quad \text{или} \quad \frac{\theta_{bw}}{\theta_b} = 1 - \frac{w_b^2}{2c_p T_b}. \quad (7)$$

Формулами (7) в действительности определяется температура в зоне химических реакций, так как именно здесь задана скорость  $w_b$ . Качественная картина пространственного распределения температуры при наличии обдувающего потока и в его отсутствие, а также относительное расположение поверхности газификации и зоны горения в газовой фазе показано на рис. 2.

Профиль температуры при обдуве имеет максимум в зоне химической реакции. Это максимальное значение температуры определено формулой (7). В то же время коэффициент эрозии (4) рассчитывается по температуре пламени, где температура принимает постоянное значение. Существенной ошибки, как будет показано ниже, это не дает.

Коэффициенту эрозии, определенному через скорость горения в газовой фазе (4), с учетом введенных безразмерных величин придадим вид

$$\varepsilon = \exp \left[ \frac{1}{2\beta\theta_b} \left( 1 - \frac{\theta_b}{\theta_{bw}} \right) \right], \quad \beta = \frac{RT_s}{E}. \quad (8)$$

Коэффициент эрозии также можно рассчитать через скорость газификации твердой фазы топлива [25, 26]:

$$\varepsilon = \exp \left[ \frac{1}{2\beta_c} \left( 1 - \frac{1}{\theta_{sw}} \right) \right], \quad (9)$$

$$\beta_c = \frac{E_c}{RT_s}, \quad \theta_{sw} = \frac{T_{sw}}{T_s},$$

где  $T_{sw}$  — температура на поверхности топлива при обдуве,  $E_c$  — энергия активации реакции, приводящей к газификации твердой фазы топлива.

В литературе есть указания [27] на отсутствие единой зависимости скорости горения от температуры. Этот факт установлен для низкокалорийных топлив. Тем не менее при больших энергиях активации  $E_c$  и  $E$  формулы (8) и (9) все равно остаются в силе как асимптотически предельные выражения.

Приравняв выражения под экспонентой в (8) и (9), найдем связь между температурой пламени и температурой поверхности газификации:

$$\frac{\theta_{bw}}{\theta_b} = \frac{1}{1 - \theta_b(\beta/\beta_c)(1 - 1/\theta_{sw})}. \quad (10)$$

Вторую формулу в (7) можно записать как

$$\frac{w_b^2}{v_b^2} \frac{v_b^2}{2c_p T_s \theta_b} = 1 - \frac{\theta_{bw}}{\theta_b}.$$

После введения параметра

$$\Sigma = \frac{2c_p T_s}{v_b^2}$$

выделим отношение скоростей:

$$\frac{w_b^2}{v_b^2} = \theta_b \Sigma \left(1 - \frac{\theta_{bw}}{\theta_b}\right). \quad (11)$$

Здесь отношение  $w_b/v_b$  необходимо выразить через интегральные параметры газа и твердой фазы топлива. Введем параметр  $a$ :

$$\begin{aligned} a &= \frac{\rho_b w_b}{\rho_s v_s} = \frac{\rho_b}{\rho_s v_s} \frac{C_f}{2} \frac{\rho_b w_\infty^2}{\mu} (x_{fw} - x_{sw}) = \\ &= \frac{\rho_b}{\rho_s v_s} \frac{C_f}{2} \frac{w_\infty^2}{\nu} \frac{x_{fw} - x_{sw}}{x_f - x_s} (x_f - x_s). \end{aligned}$$

Используя равенство (5), запишем

$$a = \frac{C_f}{2} \frac{\rho_b}{\rho_s v_s} \frac{w_\infty^2}{\nu} \frac{\theta_b}{\varepsilon \theta_{bw}} (x_f - x_s).$$

Расстояние  $x_f - x_s$  в отсутствие обдува по модели горения, используемой в настоящей работе с допущением  $c_c \approx c_p$ , представляется формулой [6]

$$x_f - x_s = \frac{D \rho_s}{u \rho_c} \left[ \theta_b - 1 + (\theta_0 - l) \ln \frac{q}{1 - \theta_0 + l} \right],$$

где  $D$  — коэффициент диффузии горючей смеси  $A$ ;  $\theta_0 = T_0/T_s$ ;  $T_0$  — начальная температура топлива;  $q = Q/c_p T_s$ ;  $l = L/c_s T_s$ . С учетом этого выражения после несложных преобразований параметр  $a$  можно записать в виде

$$a = \frac{J^2}{2\theta_b^2} \frac{32.5 F}{J_* \varepsilon}, \quad J = \sqrt{C_f} \frac{w_\infty}{v_s},$$

$$J_* = \frac{32.5 \text{Sc}}{(\theta_b - q) \ln[q/(1 + l - \theta_0)] + \theta_b - 1},$$

$$F = \frac{\theta_b}{\theta_{bw}},$$

где  $\text{Sc} = \nu/D$  — число Шмидта,  $J$  — число Виллюнова,  $J_*$  — его пороговое значение, определяющее возникновение положительного эрозионного эффекта [6].

Поэтому отношение скоростей принимает вид

$$\frac{w_b}{v_b} = \frac{\rho_s}{\rho_b} a = \frac{T_b}{T_s} a = \theta_b a = 16.25 \frac{J^2}{\theta_b J_* \varepsilon} F.$$

Используя эту формулу в левой части (11), получаем

$$\left(16.25 \frac{J^2 F}{\theta_b J_*}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon^2} = \Sigma \theta_b \left(1 - \frac{\theta_{bw}}{\theta_b}\right).$$

Отсюда находим

$$\varepsilon = 16.25 \frac{J^2}{\theta_b J_*} \frac{F}{\sqrt{\Sigma \theta_b (1 - \theta_{bw}/\theta_b)}}. \quad (12)$$

Формулы (8), (10), (12) представляют собой полную систему алгебраических уравнений с тремя неизвестными величинами  $\varepsilon$ ,  $\theta_{sw}$ ,  $\theta_{bw}$ .

Выше при проведении предварительных оценок было указано, что отрицательное эрозионное горение имеет свой масштаб скорости  $w_0$ . Скорость  $w_0$  неявно содержится в формуле (12). Это становится очевидным, если принять  $F \approx 1$ ,  $1 - \theta_{bw}/\theta_b \approx \beta \theta_b$  и учесть равенство  $v_b = \theta_b v_s$ . Тогда (12) можно переписать в виде

$$\varepsilon = 16.25 \frac{C_f}{\sqrt{2} J_*} \frac{w_\infty^2}{v_s w_0}.$$

### РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТА ЭРОЗИИ

Система уравнений (8), (10), (12) решалась численно следующим образом: для каждого заданного числа  $J$  подыскивалась такая температура  $\theta_{sw}$ , при которой равенства (8) и (12) выполнялись бы с заданной точностью.

Один из результатов расчета приведен на рис. 3. Расчеты выполнены при  $Sc = 0.8$ ,  $\beta = 0.01$ ,  $\beta_c = 0.1$ ,  $\theta_0 = 0.4$ ,  $q = 3.2$ ,  $l = 0.12$ ,  $\Sigma = 10^5$ . Пороговое число Виллюнова  $J_* = 8.97$ .

Решение имеет два корня, один из которых отвечает низким скоростям горения. Корень с меньшим значением соответствует неустойчивому режиму горения.

Кроме того, существует такое значение числа Виллюнова  $J = J_{cr}$ , при превышении которого стационарное решение не существует. На рис. 3 критическое число Виллюнова  $J_{cr} = 11.05$ . Это указывает на возможность возникновения неустойчивости горения ракетного топлива с каналным топливным зарядом, где могут быть высокие скорости обдува. Такая неустойчивость в литературе не упоминается. Возможно, она возникла в силу ряда упрощающих допущений, принятых в настоящей работе. Поэтому представляет интерес численное решение полных систем уравнений газовой динамики горения.

Найдем формулу для критического числа Виллюнова. Для этого рассмотрим кривые, построенные по формулам (8) и (12) (рис. 4). Здесь точки пересечения являются корнями си-

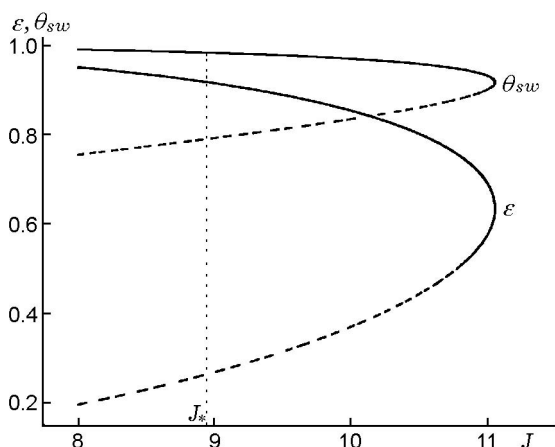


Рис. 3. Коэффициент эрозии  $\varepsilon$  и температура поверхности газификации  $\theta_{sw}$  как функции числа  $J$ :

нижние штриховые линии соответствуют неустойчивым решениям

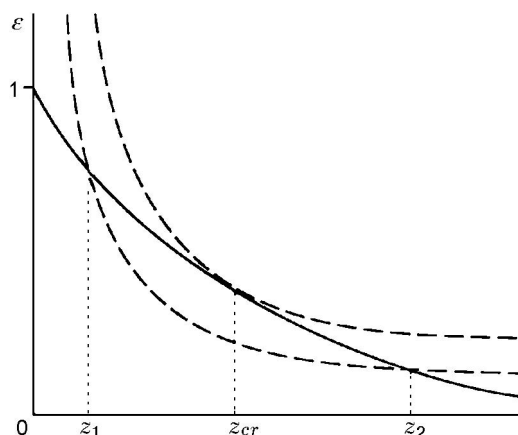


Рис. 4. Слияние корней  $z_1$  и  $z_2$  в критической точке  $z_{cr}$

стемы уравнений (8), (10) и (12). При небольших значениях  $J$  имеются две точки пересечения —  $z_1$  и  $z_2$ . С увеличением  $J$  эти точки сходятся вместе в точку  $z_{cr}$ , которая соответствует  $J_{cr}$ .

Введем переменную  $z = \theta_b/\theta_{bw} - 1$ , тогда (8) и (12) можно записать как

$$\varepsilon = \exp\left(-\frac{Az}{2}\right), \quad A = \frac{1}{\beta\theta_b}, \quad (13)$$

$$\varepsilon = B\sqrt{1 + \frac{1}{z}}, \quad B = 16.25 \frac{J^2}{\theta_b J_*} \frac{F}{\sqrt{\Sigma\theta_b}}. \quad (14)$$

Функция  $F$  меняется очень слабо, поэтому ее можно считать постоянной. В точке касания  $z = z_{cr}$  равны как сами значения  $\varepsilon$ , вычисленные по (13) и (14), так и их производные

$$\frac{d\varepsilon}{dz} = -\frac{A}{2}\varepsilon, \quad \frac{d\varepsilon}{dz} = \frac{\varepsilon}{2} \frac{z^2 - 1}{z(z+1)}.$$

Условие их равенства приводит к квадратному уравнению

$$z_{cr}^2(1 + \beta\theta_b) + z_{cr} - \beta\theta_b = 0.$$

Отсюда находим ( $\beta \ll 1$ )

$$z_{cr} = \frac{\sqrt{1 + 4\beta\theta_b(1 + \beta\theta_b)} - 1}{2(1 + \beta\theta_b)} \approx \beta\theta_b.$$

Этому критическому числу  $z_{cr}$  соответствует минимальный коэффициент эрозии  $\varepsilon_{\min} \approx 1/\sqrt{e}$ ,  $e = 2.72 \dots$ . Тогда из формулы (10) находим



$$J_{cr}^2 \approx 0.037 \frac{J_* \theta_b^2}{F} \sqrt{\frac{\beta \Sigma}{1 + \beta \theta_b}}. \quad (15)$$

Примечательно, что критическое значение числа Вилюнова практически полностью определяется параметрами процессов в газовой фазе, и в наибольшей степени — температурой пламени и пороговым значением числа Вилюнова.

Из проведенного анализа видно, что снижение скорости горения при отрицательном эрозионном эффекте аналогично снижению скорости пламени при его распространении в узких трубках [23]. Отличие только в механизме потери тепла из зоны химической реакции. Но если при горении газа в узких трубках происходит гашение пламени, то в нашем случае погасания нет. Причина тому — в пространственной протяженности фронта горения вдоль оси канала топливного заряда, и, как следствие, погасание может наступить в ограниченной области, причем ниже по направлению обдувающего потока. И если где-то создаются условия  $J > J_{cr}$ , то горячие газы, поступающие из области, лежащие выше по потоку, создают условия для продолжения горения. Поэтому там, где  $J > J_{cr}$ , должно возникнуть осциллирующее горение. Частота таких осцилляций будет порядка обратной величины времени релаксации газовой фазы. То есть могут возникнуть акустические волны [5, 13–15]. И тогда топливо будет генерировать акустические ко-

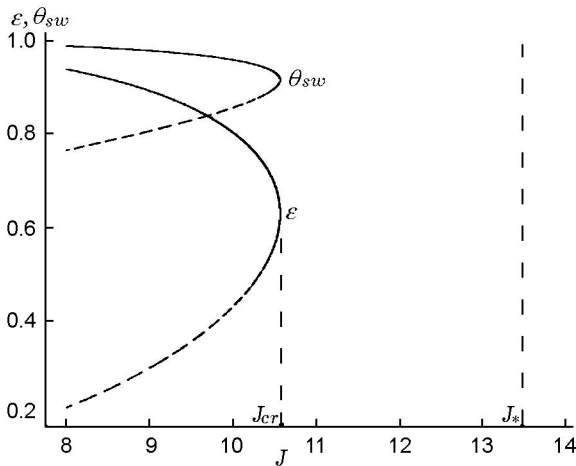


Рис. 5. Возможность неустойчивого горения, вызванная обдувом поверхности топлива в случае  $J_{cr} < J_*$ :

$Sc = 0.8$ ,  $\beta = 0.01$ ,  $\beta_c = 0.1$ ,  $\theta_0 = 0.35$ ,  $q = 2.5$ ,  $l = 0.2$ ,  $\Sigma = 10^5$ ,  $J_* = 13.49$

лебания.

Для возникновения указанных осцилляций необходимо, чтобы  $J_* > J_{cr}$ . Это неравенство, как выясняется, вполне может выполняться (рис. 5). В этом случае положительный эрозионный эффект еще не будет проявляться и возможно нестационарное горение. Из формулы (15) следует условие возникновения осцилляций:

$$J_* > 0.037 \frac{\theta_b^2}{F} \sqrt{\frac{\beta \Sigma}{1 + \beta \theta_b}},$$

а из него вытекает, что при  $\beta \rightarrow 0$  осцилляции должны возникать всегда. Однако это может оказаться неверным результатом. В указанном пределе температура пламени и плотность газа остаются строго постоянными величинами:  $T_b = T_{bw}$ ,  $\rho_b = \rho_{bw}$ . Тогда из закона сохранения энергии (3) следует

$$v_{bw}^2 = v_b^2 - w_b^2.$$

Отсюда

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{w_b}{v_b}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon^2} \left(16.25 \frac{J^2}{\theta_b J_*}\right)^2}.$$

Далее несложный расчет дает

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 - 4 \left(16.25 \frac{J^2}{\theta_b J_*}\right)^2} \right].$$

Критическое значение параметра Вилюнова

$$J_{cr} = \sqrt{\frac{\theta_b J_*}{32.5}}.$$

Достигаемое при этом минимальное значение эрозионного коэффициента равно  $\varepsilon_{\min} = 1/\sqrt{2}$ . Условие возникновения неустойчивости имеет вид

$$\frac{J_{cr}}{J_*} = \sqrt{\frac{\theta_b}{32.5 J_*}} < 1,$$

и если еще учесть, что  $\theta_b$  совпадает с коэффициентом теплового расширения газа  $n = \rho_s/\rho_b = T_b/T_s$ , то приходим к неравенству

$$J_* > \frac{n}{32.5}.$$

Как видно, здесь обнаруживается некоторая аналогия с известной гидродинамической неустойчивостью пламени Ландау — Дарье [28], условие возникновения которой зависит только от коэффициента  $n$ .

### ЭРОЗИОННЫЙ ЭФФЕКТ ПРИ СНИЖЕНИИ НАЧАЛЬНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ

Как известно [29], снижение начальной температуры  $T_0$  топлива ведет к исчезновению отрицательного эрозионного эффекта. Этот экспериментальный факт наиболее важен при разработке теории отрицательной эрозии. Покажем, как ведет себя эрозионное горение в теоретических расчетах [6] и в настоящей работе. Снижение начальной температуры приводит к уменьшению скорости горения  $u$  и к росту  $J_{cr} \sim 1/\sqrt{u}$ : зависимость  $J_{cr}$  от  $T_0$  определяется в основном скоростью горения и параметром  $\Sigma \sim 1/u^2$ . При этом пороговое число  $J_*$  относительно слабо зависит от начальной температуры. Поэтому с ее уменьшением влияние факторов, ответственных за возникновение положительной эрозии, будет все более определяющим. На рис. 6 показано результирующее действие отрицательного (кривые  $1'$  и  $2'$ ) и положительного (кривые  $1$  и  $2$ ) эрозионных эффектов при различных начальных температурах  $T_{01}$  и  $T_{02}$ ,  $T_{01} > T_{02}$ .

Таким образом, опережающее  $J_*$  изменение критического числа  $J_{cr}$  в зависимости от начальной температуры приводит к тому, что при низких значениях  $T_0$  рост скорости горения за счет положительного эрозионного эффекта проявляется раньше, чем успевает развиваться отрицательный эрозионный эффект. Это ведет к росту минимального значения  $\varepsilon$  и к сужению

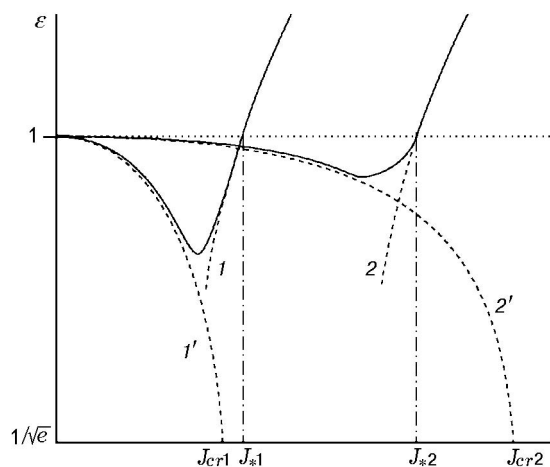


Рис. 6. Изменение коэффициента эрозии при двух различных начальных температурах  $T_{01}$  и  $T_{02}$ :

кривые  $1'$  и  $2'$  — отрицательная эрозия,  $1$  и  $2$  — положительная эрозия

области возникновения отрицательного эрозионного эффекта.

Указанное выше исчезновение отрицательного эрозионного эффекта при низких начальных температурах также легко понять, если воспользоваться формулой для пороговой скорости обдува  $w_*$ , выше которой возникает положительный эрозионный эффект [6]:

$$w_* = \frac{u\rho_c J_*}{\rho_s \sqrt{C_f}}.$$

Здесь из всех параметров скорость горения  $u$  наиболее сильно зависит от начальной температуры и при уменьшении  $T_0$  пороговая скорость уменьшается. В пределе  $T_0 \rightarrow 0$  пороговая скорость тоже стремится к нулю, что приводит к невозможности проявления отрицательного эрозионного эффекта.

При выводе всех приведенных выше уравнений и формул не делалось каких-либо предположений относительно разновидностей ракетных топлив. Поэтому, согласно предлагаемому здесь объяснению, причины появления отрицательного эрозионного эффекта имеют место для всех видов ракетных топлив. И если этот эффект не проявляется, то только потому, что подавляется факторами, обеспечивающими существование положительной эрозии.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе проведено исследование механизма возникновения отрицательного эрозионного горения в канале топливного заряда ракетного двигателя, суть которого заключается в следующем: снижение скорости горения возникает за счет потери тепла из зоны химических реакций. Часть тепла химических реакций переходит в кинетическую энергию движения потока обтекающего газа. В результате температура пламени падает, что ведет к такому же поведению скорости горения. Это трактуется как наступление отрицательного эрозионного горения. Здесь просматривается аналогия с горением газа в узких трубках. Увеличение скорости обдувающего газа не может неограниченно плавно снижать скорость горения: существует ее критическое значение, при превышении которого стационарное горение становится невозможным, т. е. возникает неустойчивость. Однако полного погасания, как в случае распространения пламени в узкой трубе, не происходит, а может возникнуть

только нестационарное горение. При этом пороговое значение числа Виллюнова, устанавливающее границу области существования положительной эрозии, должно быть больше критического числа Виллюнова.

Ведущая роль в возникновении указанной неустойчивости принадлежит, очевидно, газовой фазе. Поэтому возникающие с потерей устойчивости осцилляции должны быть высокочастотными.

В пределе бесконечно большой энергии активации химических реакций в газовой фазе критическое число Виллюнова  $J_{cr}$  зависит только от порогового числа  $J_*$  и коэффициента теплового расширения газа  $n$ . А условие возникновения неустойчивости определяется только коэффициентом  $n$ .

Как показывает анализ, уменьшение начальной температуры топлива приводит к снижению пороговой (критической) скорости, при которой наступает положительная эрозия. Вследствие этого сужается область возникновения отрицательной эрозии. Таким образом, отрицательный эрозионный эффект подавляется. Так можно объяснить экспериментальный факт снижения действия отрицательного эрозионного эффекта с уменьшением начальной температуры.

Отрицательное эрозионное горение характеризуется масштабом скорости такого же порядка величины, что и пороговая скорость, которая служит границей проявления положительного эрозионного горения.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Орлов Б. В., Мазинг Г. Ю. Термодинамика и баллистические основы проектирования ракетных двигателей на твердом топливе. — М.: Машиностроение, 1968.
- Булгаков В. К., Липанов А. М. Теория эрозионного горения твердых ракетных топлив. — М.: Наука, 2001.
- Булгаков В. К., Липанов А. М. К теории горения конденсированного вещества при обдуве // Физика горения и взрыва. — 1983. — Т. 19, № 3. — С. 32–41.
- Алемасов В. Е., Дрегаллин А. Ф., Тишин А. П. Теория ракетных двигателей. — М.: Машиностроение, 1969.
- Сабденов К. О. Теория нестационарного горения твердых ракетных топлив. — Томск: Изд-во ТПУ, 2006.
- Сабденов К. О. К вопросу о пороговом характере эрозионного горения // Физика горения и взрыва. — 2008. — Т. 44, № 3. — С. 61–71.
- Булгаков В. К., Липанов А. М., Камелатдинов А. Ш. Численные исследования эрозионного горения конденсированных веществ // Физика горения и взрыва. — 1986. — Т. 22, № 6. — С. 83–88.
- Новожилов Б. В. Нестационарное горение твердых ракетных топлив. — М.: Наука, 1973.
- Климов А. М. Распространение пламени при сильной турбулентности // Докл. АН СССР. — 1975. — Т. 221, № 1. — С. 56–59.
- Щетинков Е. С. Физика горения газов. — М.: Наука, 1965.
- Кузнецов В. Р., Сабельников В. А. Турбулентность и горение. — М.: Наука, 1986.
- Гусаченко Л. К., Зарко В. Е. Эрозионное горение. Проблемы моделирования // Физика горения и взрыва. — 2007. — Т. 43, № 3. — С. 47–58.
- Roh T.-S., Tseng I.-S., Yang V. Effect of acoustic oscillation on flame dynamics of homogeneous propellants in rocket motors // J. Propulsion and Power. — 1995. — V. 11, N 4. — P. 640–650.
- Apte S., Yang V. Unsteady flow evolution and combustion dynamics of homogeneous solid propellant in rocket motors // Combust. Flame. — 2002. — V. 131. — P. 110–131.
- Cai W., Ma F., Yang V. Two-phase vortico-acoustic flow interactions in solid-propellant rocket motors // J. Propulsion and Power. — 2003. — V. 19, N 3. — P. 385–396.
- Srinivasan K., Narayanan S., Sharma O. P. Numerical studies on erosive burning in cylindrical solid propellant grain // Heat Mass Transfer. — 2008. — V. 44. — P. 579–585.
- Greatrix D. R. Scale effects on quasi-steady solid rocket internal ballistic behavior // Energies. — 2011. — N 3. — P. 1790–1804.
- Greatrix D. R. Model for prediction of negative and positive erosive burning // Can. Aeronaut. and Space J. — 2007. — V. 53, N 1. — P. 13–21.
- Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1987.
- Zarko V. E., Simonenko V. N., Kiskin A. B. Study of solid propellant combustion under external radiation // Defence Sci. J. — 1992. — V. 42, N 3. — P. 183–189.
- Хасегава К., Хори К. Новый метод измерения скорости горения твердого топлива с помощью ультразвука // Физика горения и взрыва. — 2010. — Т. 46, № 2. — С. 79–87.
- Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И. Тепло-массообмен и трение в турбулентном пограничном слое. — М.: Энергоатомиздат, 1985.
- Зельдович Я. Б., Либрович В. Б., Баренблатт Г. И., Махвиладзе Г. М. Математическая теория горения и взрыва. — М.: Наука, 1980.
- Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей: пер. с англ. — М.: Изд-во иностр. лит., 1961.

25. **Мержанов А. Г., Дубовицкий Ф. И.** К теории стационарного горения пороха // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 129. — С. 153–156.
26. **Вилюнов В. Н., Дворяшин А. А.** О закономерностях горения пороха Н в потоке газа // Физика горения и взрыва. — 1971. — Т. 7, № 1. — С. 45–51.
27. **Денисюк А. П., Е Зо Тве.** Особенности профиля температуры в волне горения низкокалорийных порохов // Физика горения и взрыва. — 2011. — Т. 47, № 2. — С. 66–73.
28. **Нестационарное** распространение пламени / под ред. Дж. Г. Маркштейна. — М.: Мир, 1968.
29. **Вилюнов В. Н., Дворяшин А. А.** О влиянии начальной температуры конденсированного вещества на величину отрицательной эрозии // Физика горения и взрыва. — 1973. — Т. 9, № 4. — С. 602.

*Поступила в редакцию 13/І 2012 г.,  
в окончательном варианте — 7/VI 2012 г.*

---