

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОТКОЛА В УПРУГОЙ ПЛИТЕ

Н. И. Шишкин

(Челябинск)

Рассматривается откол в линейно-упругой плите, подвергаемой действию движущейся нагрузки. Предполагается, что нагрузка «бежит» по одной из сторон плиты с постоянной «сверхзвуковой» скоростью. Такой вид нагружения имеет место, например, при штамповке и сварке взрывом, при косом столкновении двух пластин и т. д.

Под отколом понимается разрушение твердых или жидких тел, которое происходит в результате отражения волн сжатия от свободных поверхностей или от границ тела с другим телом, обладающим меньшей акустической жесткостью.

Многочисленные интересные случаи откола описаны в книге Райнхарта и Пирсона [1]. Там же содержится обширная библиография работ по отколу. В большинстве этих работ дается акустическая интерпретация явления откола преимущественно в условиях одномерной деформации. В. С. Ленским [2] предпринята попытка описать при помощи теории упругости явление откола в плите, подвергаемой действию сосредоточенной силы. К. И. Огурцовым [3] получено точное решение задачи о напряжениях в упругой плите при сосредоточенной нагрузке, но использовать это решение к задаче откола пока не представляется возможным из-за его сложности.

В предложенной постановке задачи легко получается точное и простое выражение для волн напряжений в плите, дающее возможность найти параметры откола.

На основе решения этой задачи можно получить некоторые сведения об отколах в плите при сосредоточенной нагрузке, а также об отколах, полученных при взрыве в упругом полупространстве. Например, можно указать приблизительный вид откольных трещин и образований в эпицентральной зоне.

1. Пусть в системе декартовых координат x, y, z находится упругая плита толщиной h . Нижняя свободная граница плиты совпадает с плоскостью $y = 0$, верхняя — с плоскостью $y = h$. Материал плиты характеризуется плотностью ρ и скоростями a и b распространения упругих волн. По верхней границе плиты движется с постоянной скоростью $D > a$ волна давления, фронт которой параллелен плоскости yz

$$p = p_0 f \left[\frac{1}{t_0} \left(t - \frac{x}{D} \right) \right] \quad (1.1)$$

Здесь p_0 — давление во фронте волны, t_0 — характерное время изменения давления в волне, f — форма волны — по предположению, убывающая функция своего аргумента.

Уравнения теории упругости, описывающие поведение плиты в потенциалах φ и ψ упругих смещений, в рассматриваемом случае имеют вид [4]

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta \varphi, \quad \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Delta \psi, \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (1.2)$$

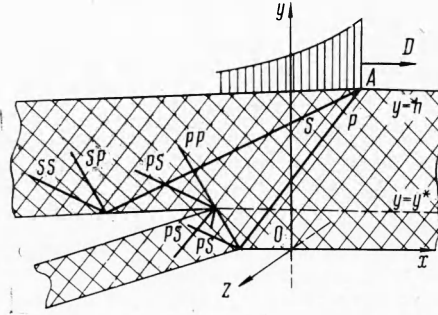
На поверхности плиты $y = h$ компонента σ_{yy} тензора напряжений должна равняться действующему давлению, а компонента σ_{xy} — нулю

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= \rho \left(1 - 2 \frac{b^2}{a^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2\rho b^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) = - p_0 f \left[\frac{1}{t_0} \left(t - \frac{x}{D} \right) \right] \quad (y = h) \\ \sigma_{xy} &= \rho b^2 \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (y = h) \end{aligned} \quad (1.3)$$

На свободной границе плиты

$$\sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0 \quad (y=0) \quad (1.4)$$

Под действием нагрузки (1.1) от края A нагрузки в плиту отходят продольная P - и поперечная S -волны, фронты которых изображены на фиг. 1. Отражаясь от свободной границы плиты $y = 0$, эти волны дают начало новым продольным и поперечным PP -, SP -, SS -, PS -волнам, распространяющимся уже в сторону другой границы плиты, от которой они также отражаются, давая начало новым продольным и поперечным волнам, идущим снова в сторону свободной границы плиты $y = 0$. Процесс отражения многократно повторяется. В области плиты под подошвой нагрузки возникает сеть упругих волн.



Фиг. 1

Все волны, фронты которых изображены на фиг. 1, — головные волны, и, следовательно, указанная картина волн наблюдается лишь в точках

плиты, достаточно удаленных от начального местоположения нагрузки.

Если нагрузка (1.1) достаточно интенсивна, то уже при отражении первой продольной P -волны от свободной границы происходит отслоение (откол) части материала от массива плиты. Не исключена возможность откола в отраженной поперечной PS -волне или даже в SP -, SS -волнах. Ниже рассматривается откол в предположении, что он имеет место в первой отраженной от свободной поверхности продольной PP -волне.

В соответствии с вышеизложенной постановкой вопроса об отколе, рассматриваемую задачу (1.2)-(1.4) можно разбить на две более простые части. В первой части нужно найти потенциалы φ_0, ψ_0 волн, генерируемых движущейся нагрузкой (1.1) в упругом полупространстве $y \leq h$, а во второй найти потенциалы φ_1, ψ_1 волн, отраженных от свободной границы полупространства $y \geq 0$.

Сравнивая затем напряжения, возникающие вблизи свободной поверхности в результате суперпозиции волн $\varphi_0, \psi_0, \varphi_1, \psi_1$ с допустимым напряжением, можно найти место образования откольных трещин и параметры возникающих отколов.

Потенциалы φ_0 и ψ_0 должны удовлетворять уравнениям (1.2) и граничным условиям (1.3). Они имеют вид плоских волн

$$\frac{\varphi_0}{a^2 t_0^2} = - \frac{D_0}{2\rho b^2} \bar{W}_p f_2(\tau_p), \quad \frac{\psi_0}{a^2 t_0^2} = - \frac{D_0}{2\rho b^2} \bar{W}_s f_2(\tau_s) \quad (1.5)$$

Здесь

$$\tau_p = \frac{1}{t_0} \left(t - \frac{x}{D} - \frac{h-y}{a} \sqrt{1-m^2} \right), \quad W_p = \left(\frac{1}{2} n^2 - m^2 \right) \frac{1}{\Delta}$$

$$\tau_s = \frac{1}{t_0} \left(t - \frac{x}{D} - \frac{h-y}{a} \sqrt{n^2 - m^2} \right), \quad W_s = m \sqrt{1-m^2} \frac{1}{\Delta}$$

$$\Delta = \left(\frac{1}{2} n^2 - m^2 \right)^2 + m^2 \sqrt{1-m^2} \sqrt{n^2 - m^2}, \quad m = a/D, \quad n = a/b$$

$$f_2(\xi) = \int_0^\xi d\xi_1 \int_0^{\xi_1} f_2(x) dx$$

Потенциалы φ_1 и ψ_1 отраженных волн, удовлетворяющие уравнениям (1.2) и граничным условиям (1.4), записанным для сумм потенциалов $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$, $\psi = \psi_0 + \psi_1$ оказываются следующими:

$$\frac{\varphi_1}{a^2 t_0^2} = -\frac{p_0}{2\rho b^2} [W_p V_{pp} f_2(\tau_{pp}) - W_s V_{sp} f_2(\tau_{sp})] \quad (1.6)$$

$$\frac{\psi_1}{a^2 t_0^2} = -\frac{p_0}{2\rho b^2} [W_s V_{ss} f_2(\tau_{ss}) - W_p V_{ps} f_2(\tau_{ps})] \quad (1.7)$$

Здесь

$$V_{pp} = V_{ss} = \Delta_1 / \Delta, \quad V_{sp} = -2m \sqrt{n^2 - m^2} (1/2 n^2 - m^2) / \Delta$$

$$V_{ps} = 2m \sqrt{1 - m^2} (1/2 n^2 - m^2) / \Delta$$

$$\Delta_1 = -(1/2 n^2 - m^2)^2 + m^2 \sqrt{1 - m^2} \sqrt{n^2 - m^2}$$

$$\tau_{pp} = \frac{1}{t_0} \left(t - \frac{x}{D} - \frac{h+y}{a} \sqrt{1 - m^2} \right)$$

$$\tau_{sp} = \frac{1}{t_0} \left(t - \frac{x}{D} - \frac{h}{a} \sqrt{n^2 - m^2} - \frac{y}{a} \sqrt{1 - m^2} \right)$$

$$\tau_{ss} = \frac{1}{t_0} \left(t - \frac{x}{D} - \frac{h-y}{a} \sqrt{n^2 - m^2} \right),$$

$$\tau_{ps} = \frac{1}{t_0} \left(t - \frac{x}{D} - \frac{h}{a} \sqrt{1 - m^2} - \frac{y}{a} \sqrt{n^2 - m^2} \right)$$

В формулах (1.6) — (1.7) величины V_{ij} ($i, j = p, s$) — коэффициенты отражения волн от свободной границы упругого полупространства. Индексы p и s означают продольную и поперечную волну, первый индекс, указывает вид падающей волны, второй — отраженной.

Напряженное состояние, вблизи свободной поверхности плиты, в области между фронтами отраженных PP - и PS - волн, характеризуется следующими, отличными от нуля, компонентами тензора напряжений:

$$\frac{\sigma_{xx}}{2\rho b^2} = \left(\frac{1}{2} n^2 - 1 \right) \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = -\frac{p_0}{2\rho b^2} W_p \left(\frac{1}{2} n^2 + m^2 - 1 \right) [f^+]$$

$$\frac{\sigma_{yy}}{2\rho b^2} = \left(\frac{1}{2} n^2 - 1 \right) \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = -\frac{p_0}{2\rho b^2} W_p \left(\frac{1}{2} n^2 - m^2 \right) [f^+]$$

$$\frac{\sigma_{zz}}{2\rho b^2} = \left(\frac{1}{2} n^2 - 1 \right) \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{p_0}{2\rho b^2} W_p \left(\frac{1}{2} n^2 - 1 \right) [f^+] \quad (1.8)$$

$$\frac{\sigma_{xy}}{2\rho b^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{p_0}{2\rho b^2} W_p \bar{m} \sqrt{1 - m^2} [f^-]$$

$$[f^+] \equiv f(\tau_p) + V_{pp} f(\tau_{pp}), \quad [f^-] \equiv f(\tau_p) - V_{pp} f(\tau_{pp})$$

2. Для нахождения параметров откола применим критерий разрушения Губера (см., например, [5,6]): если $p \equiv 1/3 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) > 0$, то разрушение материала происходит там, где удельная потенциальная энергия упругой деформации достигает критической величины; если $p < 0$, то разрушение происходит там, где удельная энергия формоизменения достигает критической величины. В качестве критической величины энергии принимается удельная потенциальная энергия деформации на пределе прочности при простом растяжении $1/2 \sigma_*^2 / E$. Получим

$$\frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})^2 + \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 +$$

$$+ (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6\sigma_{xy}^2] = \frac{\sigma_*^2}{2E} \text{ при } p > 0$$

$$\frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6\sigma_{xy}^2] = \frac{\sigma_*^2}{2E}$$

$$\left(\nu = \frac{n^2 - 2}{2(n^2 - 1)} \right) \text{ при } p < 0 \quad (2.1)$$

Здесь σ_* — прочность материала при простом растяжении, при котором полная удельная энергия деформации достигает своего критического значения; ν — коэффициент Пуассона; E — модуль Юнга.

Подставляя (1.8) в (2.1), получаем условие образования откола в виде

$$A [f^+]^2 + B [f^-]^2 = \frac{4}{W_p^2} \frac{\sigma_*^2}{p_0^2} \quad (p > 0)$$

$$A_1 [f^+]^2 + B_1 [f^-]^2 = \frac{4}{W_p^2} \frac{3}{2(1+\nu)} \frac{\sigma_*^2}{p_0^2} \quad (p < 0)$$

$$A \equiv \frac{3n^2 - 4}{n^2 - 1} [n^2 - 1 + (1 - 2m^2)^2] = \frac{3n^2 - 4}{n^2 - 1} (n^2 - 1 + \cos^2 2\alpha) \quad (2.2)$$

$$B \equiv \frac{3n^2 - 4}{n^2 - 1} 4m^2 (1 - m^2) = \frac{3n^2 - 4}{n^2 - 1} \sin 2\alpha$$

$$A_1 \equiv 1 + 3 \cos^2 2\alpha, \quad B_1 \equiv 12m^2 (1 - m^2) = 3 \sin^2 2\alpha$$

В случае волны нагрузки, давление на фронте которой претерпевает скачок и за фронтом убывает, откол может произойти лишь во фронте какой-либо из отраженных от свободной поверхности волн. Таким образом, момент откола, вызываемого PP -волной, совпадает с моментом прихода фронта PP -волны в рассматриваемую точку среды, т. е.

$$t^* = \frac{x}{D} + \frac{h + y^*}{a} \sqrt{1 - m^2} \quad (\tau_{pp} = 0) \quad (2.3)$$

Исключение t^* из (2.2) с учетом вышеизложенного дает уравнение для нахождения безразмерной координаты откольной трещины $\eta^* = y^* / at_0$

$$f^2(2\eta^* \cos \alpha) - 2C_i f(2\eta^* \cos \alpha) + F_i = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (2.4)$$

где $i = 1$ соответствует $p > 0$, а $i = 2$ соответствует $p < 0$

$$C_1 = \left[-1 - \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} (1 - \cos 4\alpha) \right] V_{pp}(\alpha, \nu) \quad (2.5)$$

$$F_1 = V_{pp}^2(\alpha, \nu) - \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu^2} \frac{\sigma_*^2}{p_0^2 W_p^2(\alpha, \nu)}$$

$$C_2 = -\frac{1 + 3 \cos 4\alpha}{4} V_{pp}(\alpha, \nu), \quad F_2 = V_{pp}^2(\alpha, \nu) - \frac{\sigma_*^2}{2p_0^2 W_p^2(\alpha, \nu)} \frac{3}{1 + \nu} \quad (2.6)$$

$$\eta^* = y^* / at_0, \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - m^2}$$

3. В случае «треугольного» профиля волны нагрузки

$$f(t/t_0) = \begin{cases} 1 - t/t_0 & (0 \leq t \leq t_0) \\ 0 & (t \geq t_0) \end{cases} \quad (3.1)$$

формула (2.4) принимает вид

$$(1 + 2\eta^* \cos \alpha)^2 - 2C_i (1 + 2\eta^* \cos \alpha) + F_i = 0 \quad (i = 1, 2)$$

Для безразмерной толщины откола, таким образом, получается

$$\eta_i^* = \frac{1}{2 \cos \alpha} (1 - C_i \pm \sqrt{C_i^2 - F_i}) \quad (i = 1, 2) \quad (3.2)$$

Формула (3.2) весьма упрощается при $D = \infty$ (одновременный короткий удар по одной из сторон плиты). В этом случае

$$\alpha = 0, \quad p > 0, \quad W_p = 1, \quad V_{pp} = -1, \quad C_1 = 1$$

$$F_1 = 1 - \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu^2} \frac{\sigma_*^2}{p_0^2}, \quad \eta_1^* = \frac{y^*}{at_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - 2\nu}{1 - \nu^2} \right)^{1/2} \left| \frac{\sigma_*}{p_0} \right| \quad (3.3)$$

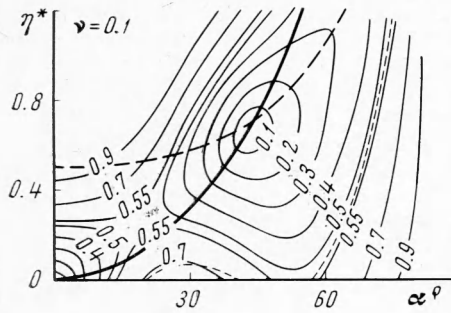
т. е. толщина откола прямо пропорциональна длине отражающейся волны, динамической прочности материала на разрыв, обратно пропорциональна амплитуде волны и зависит от коэффициента Пуассона.

Самый толстый откол — это вся плита, поэтому $y^* \leq h$. Кроме того, из (3.1) и $0 \leq f \leq 1$ следует:

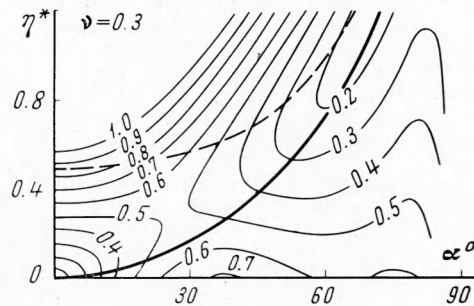
$$0 \leq 1 - 2\eta^* \leq 1, \quad \eta^* \leq 1/2, \quad y^* \leq 1/2 at_0$$

Толщина откола в любом материале, следовательно, не превосходит половины длины волны. Отсюда получается известный результат: для осуществления откола в первой отраженной продольной волне длина волны должна быть короче удвоенной толщины плиты.

Результаты вычисления функции $\eta^*(\alpha, \nu)$ по (3.2) при $\nu = 0.1$ и $\nu = 0.3$ в зависимости от угла падения α изображены на фиг. 2.



Фиг. 2 а



Фиг. 2 б

Линии $\eta^*(\alpha, \nu)$, изображенные на фиг. 2, можно назвать изолиниями параметра $\sigma^0 \equiv |\sigma_*/p_0|$ (на них $\sigma^0(\eta, \alpha) = \text{const}$), или изолиниями величины $1/2 \sigma_*^2/E$ — потенциальной энергии деформации на пределе прочности при простом растяжении.

Штриховой линией на фиг. 2 изображена кривая

$$\eta^* = 1/(2 \cos \alpha) \quad (3.4)$$

выше которой откол невозможен в силу неравенства

$$0 \leq f(2\eta^* \cos \alpha) \leq 1$$

Сплошной жирной линией на фиг. 2 нанесены кривые

$$p = 1/3 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = 0 \quad (3.5)$$

В точках плоскости $\eta^*\alpha$, лежащих выше линий (3.5), материал плиты в момент прихода PP -волны, растянут, ниже ее сжат.

Пунктиром на фиг. 2 нанесены линии (эти линии попадают в область $p < 0$), на которых энергия изменения формы в $P + PP$ -волнах равна энергии изменения формы во фронте падающей P -волны. В области между указанными пунктирными линиями и линией (3.5) разрушение в соответствии с критерием (2.1) нужно признать невозможным, так как, по предположению, не происходит разрушения в P -волне. Области возможных отколов в PP -волне это, во-первых, — область, в которой $p > 0$ и, во-вторых, — те части области $p < 0$, в которых энергия формоизменения больше энергии того же вида во фронте падающей волны. Последние области заключены между пунктирными линиями и осью $\eta^* = 0$ (фиг. 2, а). При коэффициенте Пуассона $\nu \geq 0.26$ такие области отсутствуют. Например, при $\nu = 0.3$ их нет (фиг. 2, б). Это значит, что в момент прихода фронта PP -волны в точки плиты, попадающие в область $p < 0$ плоскости $\eta^*\alpha$, энергия изменения формы в них меньше, чем энергия того же вида во фронте падающей волны. Поэтому при таких ν откол в области $p < 0$ нужно признать невозможным.

Проследим теперь как должна меняться толщина откола в PP -волне с изменением α -угла падения продольной P -волны на свободную поверхность.

При «малых» значениях параметра σ^0 ($\sigma^0 \leq 0.5$) с изменением угла α от нуля до некоторой величины, зависящей от σ^0 , толщина откола уменьшается и стремится к нулю. Кривая $\eta^*(\alpha)$ вогнутостью обращена вниз (см., например, кривые $\sigma^0 = 0.4$ фиг. 2). При таких σ^0 возможен многократный откол, так как выше указанных линий σ^0 критерий разрушения (2.1) и подавно выполняется.

