ПМТФ, № 6, 1961

О НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

В. Д. Клюшников

(Москва)

Проблема о начальной неустановившейся ползучести при сложном напряженном состоянии в некоторых случаях имеет решающее значение при оценке работоспособности конструкций. Однако при использовании соотношений ползучести типа теории течения расчет на неустановившуюся ползучесть, за исключением вопросов устойчивости, крайне сложен. С существующими методами расчета можно ознакомиться по работам [1, 2, 3] (см. также библиографию в статье [1]).

Ниже рассматривается неустановившаяся ползучесть в рамках теории течения. При определенных ограничениях на связь инвариантных характеристик и способ нагружения тела удается свести задачу о начальной ползучести к решению двух задач упругости. Ограничение на связь инвариантных характеристик может быть снято решением ряда последовательных задач упругости, при этом решение можно продолжить на как угодно большие времена.

1. Рассмотрим вначале следующую задачу. При $t = 0$ на несжимаемое тело накладываются и затем остаются неизменными силы F_i°, которые в момент $t = 0$ вызывают упругое напряженно-деформированное состояние σ_{ij}°, ε_{ij}°. Если l_j — вектор нормали к поверхности тела, то

$$\overset{\circ}{\sigma}_{ij} l_j = F_i^\circ \tag{1.1}$$

При $t > 0$ происходит процесс ползучести

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = p s_{ij} + q \dot{s}_{ij} \qquad (q = {}^1/_2 G) \tag{1.2}$$

Здесь G — упругий модуль сдвига, p — функция инвариантов напряженно-деформированного состояния и времени.

Будем искать решение в виде

$$\sigma_{ij} = \alpha \sigma_{ij}' + \sigma_{ij}^\circ \tag{1.3}$$

где $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}'\ (x, y, z)$ — некоторый тензор, α — функция от координат и времени, причем при $t = 0$, $\alpha = 0$. В силу (1.1) краевые условия для тензора σ_{ij}' будут

$$\sigma_{ij}' l_j = 0 \tag{1.4}$$

Внося (1.3) в уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \tag{1.5}$$

в силу выполнения (1.5) для σ_{ij}° получим

$$\alpha \frac{\partial \sigma_{ij}'}{\partial x_j} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} \sigma_{ij}' = 0 \tag{1.6}$$

Тензор σ_{ij}' не зависит от времени, поэтому функция α должна удовлетворять условиям

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_j} = k_j \alpha \tag{1.7}$$

В силу равенства (1.3)

$$s_{ij} = \alpha s_{ij}' + s_{ij}^\circ \tag{1.8}$$

Внося (1.8) в (1.2) и интегрируя по времени, получим

$$\varepsilon_{ij} = \left[q\alpha + \int_0^t p\alpha\, dt \right] s_{ij}' + s_{ij}^\circ \int_0^t p\, dt + \varepsilon_{ij}^\circ \tag{1.9}$$

Для того чтобы решение уравнения совместности для s_{ij}' не зависело от времени, достаточно потребовать, чтобы

$$q\alpha + \int_0^t p\alpha\, dt = m\gamma \tag{1.10}$$

$$\int_0^t p\, dt = n\gamma \tag{1.11}$$

где m, n — функции только координат, γ — функция только времени. Если можно удовлетворить (1.10) и (1.11), то

$$\varepsilon_{ij} = \gamma\,[ms_{ij}' + ns_{ij}^\circ] + \varepsilon_{ij}^\circ \tag{1.12}$$

Из (1.11) вытекает, что

$$p = n\dot{\gamma} \tag{1.13}$$

т. е. p должна быть представима в виде произведения функции только от координат на функцию только от времени. При учете (1.13) и условия $\gamma(0) = \alpha(0) = 0$ уравнение (1.10) дает

$$\alpha = \frac{m}{n}\left[1 - \exp\left(-\frac{n\gamma}{q}\right)\right] \tag{1.14}$$

Вносся это значение α в условия (1.7), получим

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{m}{n} - k_j\frac{m}{n}\right]\left[1 - \exp\left(-\frac{n\gamma}{q}\right)\right] + \frac{m}{n^2}\frac{\partial n}{\partial x_j}\frac{\gamma n}{q}\exp\left(-\frac{n\gamma}{q}\right) = 0 \tag{1.15}$$

Величины m, n и k_j не зависят от времени, поэтому нужно, чтобы

$$1 - \exp\left(-\frac{n\gamma}{q}\right) = \varkappa\frac{\gamma n}{q}\exp\left(-\frac{n\gamma}{q}\right) \tag{1.16}$$

где коэффициент $\varkappa$ не зависит от времени, т. е. требуется, чтобы

$$\exp\frac{n\gamma}{q} = 1 + \varkappa\frac{\gamma n}{q} \tag{1.17}$$

Это условие будет удовлетворяться приближенно в случае $\varkappa = 1$ при условии

$$\left(\frac{n\gamma}{q}\right)^2 \ll 1 \tag{1.18}$$

Пользуясь произволом в выборе m, положим $m = n$, тогда при выполнении равенства (1.17) ($\varkappa = 1$) формулы (1.14) и (1.15) дают

$$\alpha = \frac{n\gamma}{q + n\gamma}, \qquad k_j = \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial x_j} \tag{1.19}$$

а уравнение равновесия (1.6) и соотношение (1.12) приводятся к виду

$$\frac{\partial(\sigma_{ij}' n)}{\partial x_j} = 0, \qquad \varepsilon_{ij} = \gamma n\,(s_{ij}' + s_{ij}^\circ) + \varepsilon_{ij}^\circ \tag{1.20}$$

В силу (1.19)

$$\varepsilon_{ij}^p = \varepsilon_{ij} - qs_{ij} = (\gamma n - q\alpha)\,s_{ij}' + \gamma n s_{ij}^\circ = \gamma n\,(\alpha s_{ij}' + s_{ij}^\circ) \tag{1.21}$$

Следовательно

$$\frac{\varepsilon_{ij}^p}{q\varepsilon_{ij}} = \frac{\varepsilon_{ij}^p}{\varepsilon_{ij}^y} = \frac{n\gamma}{q} \tag{1.22}$$

Таким образом, условие (1.18) означает, что пластические деформации должны быть достаточно малы по сравнению с упругими.

Введем новые тензоры

$$\sigma_{ij}^* = \frac{n}{q}(\sigma_{ij}' + \sigma_{ij}^\circ), \quad \varepsilon_{ij}^* = n(s_{ij}' + s_{ij}^\circ) \tag{1.23}$$

связанные соотношением упругости для несжимаемого материала $s_{ij}^* = \varepsilon_{ij}^* / q$. На основании формул (1.3) и (1.20) напряжения и деформации представятся через эти тензоры следующим образом:

$$\sigma_{ij} = \frac{\alpha q}{n}\sigma_{ij}^* + (1 - \alpha)\sigma_{ij}^\circ \tag{1.24}$$

$$\varepsilon_{ij} = \gamma\varepsilon_{ij}^* + \varepsilon_{ij}^\circ \tag{1.25}$$

и при учете обстоятельства, что σ_{ij}° и ε_{ij}° удовлетворяют уравнениям равновесия и совместности для σ_{ij}^*, ε_{ij}^*, имеем задачу упругости при поверхностных силах

$$F_i^* = \frac{n}{q}F_i^\circ \tag{1.26}$$

и массовых силах

$$X_i^* = -\frac{1}{q}\frac{\partial n}{\partial x_j}\sigma_{ij}^\circ \tag{1.27}$$

Нетрудно убедиться, что из формул (1.24) и (1.25) с учетом первой из формул (1.19) следует

$$\varepsilon_{ij} = (q + n\gamma)s_{ij} \tag{1.28}$$

Итак, при условии, что функция p может быть представлена в виде произведения функции от времени на функцию от координат, решение задачи о начальной ползучести по теории течения (1.2) совпадает с решением по теории старения (1.28). Это положение напоминает теорему о простом нагружении [4]; однако в рассматриваемом случае направляющие тензоры в точке тела не остаются постоянными, а с течением времени определенным образом изменяются. В случае обычной теории течения [1]

$$p = \frac{3}{2}B(t)\sigma_i^{m-1} \tag{1.29}$$

где σ_i — интенсивность напряжений. При таком выборе функции нельзя удовлетворить условию (1.13). В простейшем случае этому условию можно удовлетворить, принимая

$$p = \frac{3}{2}B(t)\sigma_{i0}^{m-1} \tag{1.30}$$

т. е. полагая

$$n = \sigma_{i0}^{m-1}, \qquad \gamma = \frac{3}{2}\int_0^t B(t)\,dt \tag{1.31}$$

Очевидно, что зависимость (1.30) не может быть использована при любых условиях нагружения. Однако можно надеяться, что в условиях поставленной задачи при выполнении условия (1.18), которое в случае (1.31) означает

$$\left(E\sigma_{i0}^{m-1}\int_0^t B(t)\,dt\right)^2 \ll 1 \tag{1.32}$$

замена соотношения (1.29) соотношением (1.30) не приведет к большой ошибке. Если же в какой-то конкретной задаче даже при условии (1.32) интенсивность σ_i будет значительно отличаться от σ_{i0}, то можно воспользоваться способом, указанным в § 2.

О возможности замены соотношений (1.29) на (1.30) при условии (1.32) говорит еще и то обстоятельство, что при одинаковых m и B в этих уравнениях как чистая ползучесть, так и релаксация по обоим соотношениям происходят одинаково.

Действительно, в случае простого растяжения теория течения (1.2) при функции p, определяемой по уравнениям (1.29) и (1.30), дает

$$\dot{\varepsilon} = B(t)\,\sigma^m + \frac{\dot{\sigma}}{E}, \qquad \dot{\varepsilon} = B(t)\,\sigma_0^{m-1}\sigma + \frac{\dot{\sigma}}{E} \tag{1.33}$$

соответственно. При чистой ползучести надо положить $\sigma = \sigma_0$ и оба выражения совпадают. В условиях релаксации от первоначального напряжения σ_0 имеем по первому и второму уравнениям

$$\frac{\sigma^\circ}{\sigma} = [1 + (m-1)\,k]^{\frac{1}{m-1}}, \qquad \frac{\sigma^\circ}{\sigma} = e^k \tag{1.34}$$

соответственно. Здесь обозначено

$$k = E\sigma_0{}^{m-1}\int_0^t B(t)\,dt \tag{1.35}$$

Следовательно, при условии (1.32) уравнения (1.34) также совпадают.

Итак, при использовании соотношения (1.30) задача начальной ползучести на основании формул (1.24) — (1.27) и (1.31) сводится к решению двух задач упругости: одна для тензоров σ_{ij}°, ε_{ij}°, другая для тензоров σ_{ij}^* и ε_{ij}^*.

2. Если в некоторый момент $t = t_1$ при выполнении условия (1.32) аппроксимация скалярных свойств соотношением (1.30) станет признана неудовлетворительной, то для $t > t_1$ можно строить решение так же, как и в § 1, но от момента $t = t_1$, и от начального напряженно-деформированного состояния $\sigma_{ij}{}^1$, $\varepsilon_{ij}{}^1$ уже при

$$n = \sigma_{i1}{}^{m-1}, \qquad \gamma = \frac{3}{2}\int_{t_1}^t B(t)\,dt \tag{2.1}$$

Используя метод, изложенный в § 1, легко получить, что вообще если известно решение $\sigma_{ij}{}^k$, $\varepsilon_{ij}{}^k$ для момента $t = t_k$, то решение для момента $t = t_{k+1} > t_k$ при

$$n_k = \sigma_{ik}{}^{m-1}, \qquad \gamma_k = \frac{3}{2}\int_{t_k}^{t_{k+1}} B(t)\,dt \tag{2.2}$$

и при условии, что

$$\left(\frac{n_k\gamma_k}{q}\right)^2 = \left(E\sigma_{ik}{}^{m-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} B(t)\,dt\right)^2 \ll 1 \tag{2.3}$$

дается формулами

$$\sigma_{ij}{}^{k+1} = \frac{\alpha_k q}{n_k}\,\sigma_{ij}{}^{*k} + (1-\alpha_k)\,\sigma_{ij}{}^k \tag{2.4}$$

$$\varepsilon_{ij}{}^{k+1} = \gamma_k\varepsilon_{ij}{}^{*k} + \varepsilon_{ij}{}^k, \qquad \alpha_k = \frac{n_k\gamma_k}{q + n_k\gamma_k} \tag{2.5}$$

где $\sigma_{ij}{}^{*k}$, $\varepsilon_{ij}{}^{*k}$ определяются решением задачи упругости для данного тела с поверхностными и массовыми силами

$$F_i{}^k = \frac{n_k}{q}\,F_i{}^\circ, \qquad X_i{}^k = -\frac{\sigma_{ij}{}^k}{q}\,\frac{\partial n_k}{\partial x_j} \tag{2.6}$$

Так как при проведении последовательных решений по формулам (2.2) — (2.6) требуется, в соответствии с условием (2.3), лишь малость накопленных за один этап (t_k, t_{k+1}) пластических деформаций по сравнению с общей упругой деформацией, такой расчет может быть продолжен для как угодно больших времен.

3. Пусть в момент $t=0$ в теле создано силами F_i^0 упругое напряженное состояние σ_{ij}°, ε_{ij}° и при $t>0$ внешние силы изменяются пропорционально одному параметру

$$F_i = \lambda F_i^\circ \tag{3.1}$$

Для несжимаемого тела, следующего закону течения (1.2), будем искать решение начальной нолзучести в виде

$$\sigma_{ij} = \alpha\sigma_{ij}' + \lambda\sigma_{ij}^\circ \tag{3.2}$$

где

$$\alpha = \alpha(x, y, z, t), \quad \lambda = \lambda(t), \quad \alpha = 0, \quad \lambda = 1 \qquad \text{при } t = 0$$

Повторяя рассуждение § 1, получим, что представление (3.1) возможно, если

$$p = \frac{n\dot{\gamma}}{\lambda}, \qquad \rho^2 = \left(\frac{n}{q}\int_0^t \frac{\dot{\gamma}\,dt}{\lambda}\right)^2 \ll 1 \tag{3.3}$$

при этом напряжения и деформации выражаются формулами

$$\sigma_{ij} = \frac{\alpha q}{n}\sigma_{ij}^* + (\lambda - \alpha)\sigma_{ij}^\circ, \qquad \varepsilon_{ij} = \gamma\varepsilon_{ij}^* + \lambda\varepsilon_{ij}^\circ \qquad \left(\alpha = \frac{\rho}{1+\rho}\right) \tag{3.4}$$

Тензоры σ_{ij}^* и ε_{ij}^* определяются решением задачи упругости для данного тела при действии внешних и внутренних сил, задаваемых формулами (1.26) и (1.27). В качестве p можно взять

$$p = \frac{3}{2}B(t)\,\sigma_{(01)}^{m-1} \tag{3.5}$$

Здесь $\sigma_{(01)}$ — интенсивность, которая была бы в данный момент, если бы тело деформировалось упруго. Так как

$$\sigma_{(01)} = \lambda\sigma_{(0)} \tag{3.6}$$

то при задании (3.5)

$$n = \sigma_{(0)}^{m-1}, \qquad \gamma = \frac{3}{2}\int_0^t B(t)\,\lambda^m\,dt \tag{3.7}$$

и при этом решение для σ_{ij}^*, ε_{ij}^* будет таким же, как и в задаче с постоянными нагрузками. Из соотношений (3.4) снова следует соотношение теории старения. Способ продолжения решения на большие времена ничем по существу не отличается от случая постоянных внешних сил.

Поступила 29 VII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. Теория ползучести. Физматгиз, 1960.
2. Работнов Ю. Н. О некоторых возможностях описания неустановившейся ползучести с приложением к исследованию ползучести роторов. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 5.
3. Куратов П. С. и Розенблюм В. И. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 1.
4. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехиздат, 1948.