УДК 533.72

ТЕЧЕНИЕ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА В КАНАЛЕ С ЗЕРКАЛЬНО-ДИФФУЗНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ПРИ ВСЕХ ЧИСЛАХ КНУДСЕНА. СООТНОШЕНИЯ ОНЗАГЕРА

А. В. Латышев, А. А. Юшканов

Московский педагогический университет, 107005 Москва

Впервые аналитически решена задача о течении разреженного газа в канале при всех числах Кнудсена в случае, когда рассеяние молекул газа на стенках канала можно описать зеркально-диффузными граничными условиями. Предполагается, что длина свободного пробега молекул газа постоянна, т. е. частота столкновений пропорциональна молекулярной скорости. Газ движется под действием продольного градиента температуры. Получены точные выражения для потоков тепла и массы, а также для среднемассовой скорости. Показано, что в задаче о тепло- и массопереносе в канале соотношения Онзагера выполняются во всем диапазоне чисел Кнудсена. Проанализирована зависимость потоков тепла и массы от числа Кнудсена (толщины канала). Проводится сравнение с известными результатами.

Введение. Исследованию течения газа при всех числах Кнудсена посвящено большое число работ (см., например, работу [1] и библиографию к ней). Разработаны приближенные методы решения различных задач, в которых число Кнудсена изменяется в широком диапазоне. В последнее время появился ряд работ, в которых движение газа при всех числах Кнудсена анализируется численными методами [2, 3]. Однако следует отметить, что до сих пор не удавалось получить аналитическое решение какой-либо нетривиальной кинетической задачи, справедливое при произвольных числах Кнудсена, в то время как для малых чисел Кнудсена такие решения известны и широко используются, например при оценке точности численных методов. Это связано с большой сложностью описания поведения газа при числах Кнудсена порядка единицы.

В настоящей работе аналитически решается задача о течении газа в канале под действием продольного градиента температуры при всех числах Кнудсена. Рассматривается случай зеркально-диффузных граничных условий на стенках канала с произвольными коэффициентами аккомодации. В работе [4] решалась задача в аналогичной постановке с использованием численных методов, однако исследование было ограничено случаем, когда коэффициенты аккомодации на обеих стенках канала равны. Кроме того, в [4] используется уравнение Больцмана — Крука — Веландера с постоянной частотой столкновений молекул, а в данной работе — то же уравнение с частотой столкновений, пропорциональной скорости молекул. Это соответствует предположению о постоянстве (независимо от скорости) длины свободного пробега молекул, что справедливо для модели, в которой молекулы представляют собой твердые сферы.

Следует отметить, что имеющиеся численные решения задачи о поведении газа в канале описывают только первые моменты функции распределения (массовую скорость газа

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00336).

и поток тепла). В этом смысле решения не являются полными, так как для полного описания поведения газа необходимо знать функцию распределения. Подобную задачу в замкнутом виде можно решить только с использованием аналитических методов, приводящих к точному решению.

Аналитическое решение задачи при всех числах Кнудсена позволяет на качественно новом уровне рассмотреть вопрос о справедливости известных соотношений Онзагера в термодинамике необратимых процессов [5, 6], который привлекает большое внимание исследователей [7, 8]. Для анализа этой проблемы применительно к течению газа в каналах ранее использовались только приближенные и численные методы [9–11]. В то же время аналитическое (точное) доказательство справедливости соотношений Онзагера в широком диапазоне чисел Кнудсена имеет принципиальное значение. В работе [12] такое аналитическое доказательство приведено для случая широкого канала, когда число Кнудсена мало. При этом, несмотря на малость числа Кнудсена, учет потоков в прилегающем к поверхности слое Кнудсена имел важное значение. В настоящей работе впервые с использованием аналитических методов доказывается справедливость соотношений Онзагера в случае течения газа в канале при всех числах Кнудсена.

1. Постановка задачи и основные уравнения. Рассматривается классическая задача о движении газа и переносе тепла в канале под действием перепадов температуры и давления [1–5], относительные значения которых считаются малыми. Это условие позволяет линеаризовать задачу. Будем предполагать, что число Кнудсена Kn, равное отношению длины свободного пробега молекул к ширине L канала, может принимать любое значение.

Введем декартову систему координат с центром в середине канала и плоскостью yz, параллельной верхней и нижней стенкам. Предположим, что потоки массы и тепла параллельны оси z и относительные перепады температуры и давления удовлетворяют неравенствам $|\Delta T|/T \ll 1$, $|\Delta p|/p \ll 1$. Здесь $\Delta T = T_2 - T_1$; $\Delta p = p_2 - p_1$; T_1, p_1 и T_2, p_2 — температура и давление газа в начале и конце канала соответственно. Потоки массы J_m газа и тепла J_Q вдоль канала пропорциональны перепадам давления и температуры и могут быть представлены в виде [5]

$$J_m = -2L_{11}(aL)v\Delta p/p - 2L_{12}(aL)\Delta T/T^2, \quad J_Q = -2L_{21}(aL)v\Delta p/p - 2L_{22}(aL)\Delta T/T^2,$$

где $v = 1/\rho = 1/(nm)$ — удельный объем; a — толщина канала; L — ширина канала (вдоль оси y).

Поведение газа будем описывать кинетическим уравнением Больцмана — Крука — Веландера

$$\mu\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\,\psi + \psi(x,\mu,c) = \frac{1}{c}\,g_p + \Big(c - \frac{5}{2c}\Big)g_t = \frac{3}{4}\int\limits_{-1}^{1}(1-\mu'^2)\,d\mu'\int\limits_{0}^{\infty}\exp\,(-c'^2)c'^5\psi(x,\mu',c')\,dc' \quad (1.1)$$

с частотой столкновений молекул, пропорциональной их скорости [1]: $\nu(v) = v\lambda_0^{-1}$. Здесь g_p, g_t — соответственно безразмерные градиенты давления и температуры; λ_0 — величина порядка средней длины свободного пробега молекул. Линеаризованную функцию распределения представим в виде $f = f_0(1 + c_y\psi(x^*,\mu,c))$, где f_0 — абсолютный максвеллиан; $\boldsymbol{c} = \sqrt{\beta}\boldsymbol{v}$, $\mu = c_x/c$, $x^* = x/\lambda_0$ — безразмерные величины (далее звездочка опускается); $\beta = m/(2kT)$; k — постоянная Больцмана.

Зеркально-диффузные граничные условия, записанные для полной функции распределения f, для функции ψ соответствуют следующим условиям:

$$\begin{aligned}\psi(b,\mu,c) &= (1-q_2)\psi(b,-\mu,c), \qquad -1<\mu<0,\\ \psi(-b,\mu,c) &= (1-q_1)\psi(-b,-\mu,c), \qquad 0<\mu<1,\end{aligned} \quad (1.2)$$

где $0 \leqslant q_1 \leqslant 1$, $0 \leqslant q_2 \leqslant 1$ — коэффициенты аккомодации тангенциального импульса молекул на верхней и нижней стенке соответственно; $b = a/\lambda_0 \sim 1/\mathrm{Kn}$.

Выразим потоки массы и тепла через функцию ψ:

$$\sqrt{\beta} J_m = nm\pi^{-3/2} \int dx\, dy \int \exp(-c^2) c_y^2 \psi\, d^3c,$$

$$\sqrt{\beta} J_Q = nkT\pi^{-3/2} \int dx\, dy \int \exp(-c^2) c_y^2 \Big(c^2 - \frac{5}{2}\Big) \psi\, d^3c,$$

$$\int dx\, dy = \int dy \int\limits_{-a}^{a} dx = \frac{L}{\nu\sqrt{\beta}} \int\limits_{-b}^{b} dx', \qquad b = a\sqrt{\beta}\nu \sim \frac{1}{\mathrm{Kn}}.$$

Безразмерные потоки массы и тепла выражаются равенствами

$$J'_m = \nu J_m/(4aLnkT), \qquad J'_Q = m\nu J_Q/(4aLnk^2T^2)$$

или в терминах L_{ij}

$$J'_m = -\frac{v\nu}{2} L_{11} \frac{\Delta p}{p} - \frac{\nu}{2Tp} L_{12} \frac{\Delta T}{T}, \qquad J'_Q = -\frac{\nu}{2pT} L_{21} \frac{\Delta p}{p} - \frac{p\nu}{2\rho^2 T} \frac{\Delta T}{T}.$$

Перепишем эти равенства с использованием безразмерных коэффициентов Онзагера L'_{ij}:

$$J'_m = -L'_{11} \frac{\Delta p}{p} - L'_{12} \frac{\Delta T}{T}, \quad J'_Q = -L'_{21} \frac{\Delta p}{p} - L'_{22} \frac{\Delta T}{T}, \quad L'_{12} = \frac{\nu}{2Tp} L_{12}, \quad L'_{21} = \frac{\nu}{2Tp} L_{21},$$

а также в терминах функции ψ:

$$J'_m = \pi^{-3/2} \int\limits_{-b}^{b} dx' \int \exp(-c^2) c_y^2 \psi\, d^3c, \quad J'_Q = \pi^{-3/2} \int\limits_{-b}^{b} dx' \int \exp(-c^2) c_z \Big(c^2 - \frac{5}{2}\Big) \psi\, d^3c.$$

Тогда

$$J'_m = -S_{11}k_p - S_{12}k_t, \quad J'_Q = -S_{21}k_p - S_{22}k_t,$$

$$k_p = \frac{\partial \ln p}{\partial z'}, \quad k_t = \frac{\partial \ln T}{\partial z'}, \quad \frac{\Delta p}{p} = z'_0 k_p, \quad \frac{\Delta T}{T} = z'_0 k_t, \quad z'_0 = \frac{z_0}{\lambda_0}, \quad S_{ij} = L'_{ij} z'_0.$$

Здесь z'_0, z_0 — безразмерная и размерная длина канала.

Разложим функцию ψ на два слагаемых, пропорциональных соответственно k_p и k_t: $\psi = \psi_p k_p + \psi_t k_t$. Тогда потоки массы и тепла выражаются равенствами

$$-S_{12} = \pi^{-3/2} \int\limits_{-b}^{b} dx' \int \exp(-c^2) c_y^2 \psi_t\, d^3c; \tag{1.3}$$

$$-S_{21} = \pi^{-3/2} \int\limits_{-b}^{b} dx' \int \exp(-c^2) c_y^2 \Big(c^2 - \frac{5}{2}\Big) \psi_p\, d^3c. \tag{1.4}$$

Требуется доказать, что $S_{12} = S_{21}$.

2. Аналитическое решение задач скольжения при всех числах Кнудсена. За счет разбиения функции распределения на два слагаемых задача (1.1), (1.2) также разбивается на две задачи.

1. Задача о потоке массы:

$$\mu\,\frac{\partial\psi_t}{\partial x}+\psi_t(x,\mu,c)+c-\frac{5}{2c}=\frac{3}{4}\int\limits_{-1}^{1}(1-{\mu'}^2)\,d\mu'\int\limits_{0}^{\infty}\exp{(-{c'}^2)}{c'}^5\psi_t(x,\mu',c')\,dc',$$

$$\psi_t(b,\mu,c)=(1-q_2)\psi_t(b,-\mu,c),\qquad -1<\mu<0,$$

$$\psi_t(-b,\mu,c)=(1-q_1)\psi_t(-b,-\mu,c),\qquad 0<\mu<1,$$

Решение этой задачи ищем в виде $\psi_t=(c-5/(2c))h(x,\mu)$, где $h=\xi^+(x,\mu)\theta_+(\mu)+\xi^-(x,\mu)\theta_-(\mu)-1$; $\theta_+(\mu)=1$ при $0<\mu<1$, $\theta_+(\mu)=0$ при $-1<\mu<0$, $\theta_-(\mu)=1$ при $-1<\mu<0$, $\theta_-(\mu)=0$ при $0<\mu<1$; $\xi^\pm(x,\mu)$ — неизвестные функции, удовлетворяющие однородному уравнению

$$\mu\,\frac{\partial\xi^\pm}{\partial x}+\xi^\pm(x,\mu)=0 \tag{2.1}$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned}\xi_-(b,\mu)&=q_2+(1-q_2)\xi_+(b,-\mu),\qquad -1<\mu<0,\\ \xi_+(-b,\mu)&=q_1+(1-q_1)\xi_-(-b,-\mu),\qquad 0<\mu<1.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Из уравнения (2.1) получаем

$$\xi^+(x,\mu)=\xi^+(-b,\mu)\exp{(-(x+b)/\mu)},\qquad 0<\mu<1; \tag{2.3}$$

$$\xi^-(x,\mu)=\xi^-(b,\mu)\exp{(-(x-b)/\mu)},\qquad -1<\mu<0. \tag{2.4}$$

Здесь $\xi^+(-b,\mu)$, $\xi^-(b,\mu)$ — неизвестные функции. Найдем сначала $\xi^+(-b,\mu)$. Подставляя (2.3) в первое условие (2.2), находим функцию $\xi^-(b,\mu)$. Подставив ее в (2.4), получим

$$\xi^-(x,\mu)=[q_2+(1-q_2)\xi^+(-b,\mu)\exp{(2b/\mu)}]\exp{(-(x-b)/\mu)}. \tag{2.5}$$

В левую часть первого равенства в (2.2) подставим (2.3), а в правую — (2.5). Получим

$$\xi^+(-b,\mu)=\frac{q_1+q_2(1-q_1)\exp{(-2b/\mu)}}{1-(1-q_1)(1-q_2)\exp{(-4b/\mu)}}.$$

Следовательно, функция $\xi^+(x,\mu)$ построена:

$$\xi^+(x,\mu)=\frac{q_1+q_2(1-q_1)\exp{(-2b/\mu)}}{1-(1-q_1)(1-q_2)\exp{(-4b/\mu)}}\exp\Big(-\frac{x+b}{\mu}\Big).$$

Аналогично получаем функцию $\xi^-(b,\mu)$:

$$\xi^-(b,\mu)=\frac{q_2+q_1(1-q_2)\exp{(2b/\mu)}}{1-(1-q_1)(1-q_2)\exp{(4b/\mu)}}$$

и решение (2.4)

$$\xi^-(x,\mu)=\frac{q_2+q_1(1-q_2)\exp{(2b/\mu)}}{1-(1-q_1)(1-q_2)\exp{(4b/\mu)}}\,\exp\Big(-\frac{x-b}{\mu}\Big).$$

Итак, полностью построена функция $h(x,\mu)$, а следовательно, и решение задачи о потоке массы. Согласно (1.3) поток массы выразим через функцию h:

$$-S_{12}=-\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int\limits_{-b}^{b}dx'\int\limits_{-1}^{1}(1-\mu^2)h(x',\mu)\,d\mu. \tag{2.6}$$

2. Задача о потоке тепла:

$$\mu\,\frac{\partial\psi_p}{\partial x}+\psi_p(x,\mu,c)+\frac{1}{c}=\frac{3}{4}\int\limits_{-1}^{1}(1-\mu'^2)\,d\mu'\int\limits_{0}^{\infty}\exp{(-c'^2)}c'^5\psi_p(x,\mu',c')\,dc',$$

$$\psi_p(b,\mu,c)=(1-q_2)\psi_p(b,-\mu,c),\qquad -1<\mu<0,$$

$$\psi_p(-b,\mu,c)=(1-q_1)\psi_p(-b,-\mu,c),\qquad 0<\mu<1.$$

Функцию ψ_p будем искать в виде $\psi_p=f(x,\mu)+(1/c-2\alpha)h(x,\mu)$, где $\alpha=(3/16)\sqrt{\pi}$; функция h введена ранее. В результате получаем две задачи.

Задача 1:

$$\mu\,\frac{\partial f}{\partial x}+f(x,\mu)=\frac{3}{4}\int\limits_{-1}^{1}(1-\mu'^2)f(x,\mu')\,d\mu',$$

$$f(b,\mu)=(1-q_2)f(b,-\mu),\quad -1<\mu<0,\qquad f(-b,\mu)=(1-q_1)f(-b,-\mu),\quad 0<\mu<1.$$

Задача 2 не приводится, так как она совпадает с рассмотренной выше задачей (2.1), (2.2). Заметим, что решать задачу 1 не требуется, так как после подстановки ψ_p в выражение для S_{21} функция f исчезает после интегрирования по c. В результате получим

$$-S_{21}=-\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int\limits_{-b}^{b}dx'\int\limits_{-1}^{1}(1-\mu^2)h(x,\mu)\,d\mu. \tag{2.7}$$

3. Потоки массы и тепла. Соотношения Онзагера. Правые части выражений (2.6), (2.7) одинаковы. Следовательно, $S_{12}=S_{21}$, т. е. соотношение Онзагера выполняется. Значение $S_{12}=S_{21}$ обозначим через $S=S(b,q_1,q_2)$. Подставив функцию h в (2.6) (или (2.7)), получим

$$S(b,q_1,q_2)=-\frac{2b}{3\sqrt{\pi}}+\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{1}\mu(1-\mu^2)\Big(1-\exp\Big(-\frac{2b}{\mu}\Big)\Big)\times$$

$$\times\frac{q_1+q_2+(q_1+q_2-2q_1q_2)\exp{(-2b/\mu)}}{1-(1-q_1)(1-q_2)\exp{(-4b/\mu)}}\,d\mu. \tag{3.1}$$

Рассмотрим частные случаи формулы (3.1). При $q_1=q_2=q$ имеем

$$S(b,q)=-\frac{2b}{3\sqrt{\pi}}+\frac{q}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{1}\frac{\mu(1-\mu^2)(1-\exp{(-2b/\mu)})}{1-(1-q)^2\exp{(-2b/\mu)}}\,d\mu. \tag{3.2}$$

Из формулы (3.1) следует, что в середине канала ($b=0$) потоки равны нулю. В случае полной аккомодации ($q_1=q_2=1$) имеем

$$S(b)=-\frac{2b}{3\sqrt{\pi}}+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{1}\mu(1-\mu^2)\Big(1-\exp\Big(-\frac{2b}{\mu}\Big)\Big)\,d\mu.$$

Из формулы (3.1) следует также, что в случае полной аккомодации на одной из границ канала ($q_2 = 1$, $q_1 = q$ или $q_1 = 1$, $q_2 = q$) выражение для потоков одно и то же:

$$S(b,q) = -\frac{2b}{3\sqrt{\pi}} + \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int\limits_0^1 \mu(1-\mu^2)\Big(1-\exp\Big(-\frac{2b}{\mu}\Big)\Big)\Big[1+q+(1-q)\exp\Big(-\frac{2b}{\mu}\Big)\Big]\,d\mu. \quad (3.3)$$

4. Профиль среднемассовой скорости в канале. Профиль среднемассовой скорости в канале может быть построен по формуле

$$U(x) = \pi^{-3/2}\int \exp(-c^2)c_y^2\psi_t(x,\mu,c)\,d^3c.$$

Выполнив два внутренних интегрирования, получим

$$U(x) = -\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int\limits_{-1}^1 (1-\mu^2)[-1+\xi^+(x,\mu)\theta_+(\mu)+\xi^-(x,\mu)\theta_-(\mu)]\,d\mu.$$

Подставив в это выражение найденные выше функции $\xi^\pm(x,\mu)$, получим

$$U(x) = \frac{1}{3\sqrt{\pi}} - \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int\limits_0^1 (1-\mu^2)[\xi^+(x,\mu)+\xi^-(x,-\mu)]\,d\mu$$

или в явном виде

$$U(x) = \frac{1}{3\sqrt{\pi}} - \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int\limits_0^1 \frac{(1-\mu^2)Q(x,\mu)}{1-(1-q_1)(1-q_2)\exp(-4b/\mu)}d\mu, \quad (4.1)$$

где $Q(x,\mu) = q_1\exp(-(b+x)/\mu) + q_2\exp(-(b-x)/\mu) + q_2(1-q_1)\exp(-(3b+x)/\mu) + q_1(1-q_2)\exp(-(3b-x)/\mu)$. Следует отметить, что первое слагаемое в (4.1) есть коэффициент теплового скольжения (см. [13, 14]) газа вдоль плоской поверхности.

Длину свободного пробега будем определять согласно [1]: $l = (\mu/p)\sqrt{\pi kT/(2m)} = 8\lambda_0/15$ (μ — динамическая вязкость газа).

На рис. 1 представлена зависимость потока массы от безразмерной толщины канала $d = 2a/l$ (сплошные кривые построены по формуле (3.2), штриховые — по данным, приведенным в работе [4]), на рис. 2 — зависимость потока массы от толщины канала d, построенная по формуле (3.3). На рис. 3 приведен профиль среднемассовой скорости в канале, построенный по формуле (4.1) при $q_1 = q_2 = q$ (сплошные кривые) и по данным

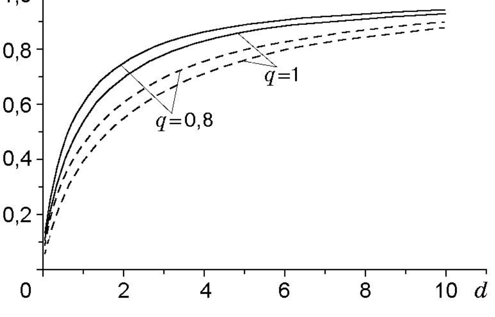

Рис. 1

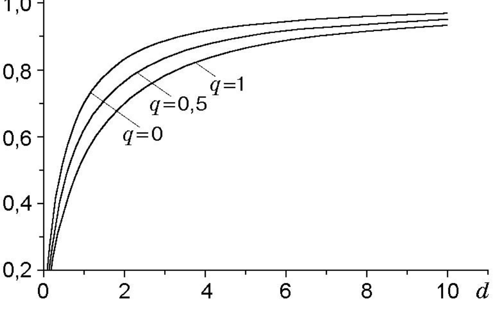

Рис. 2

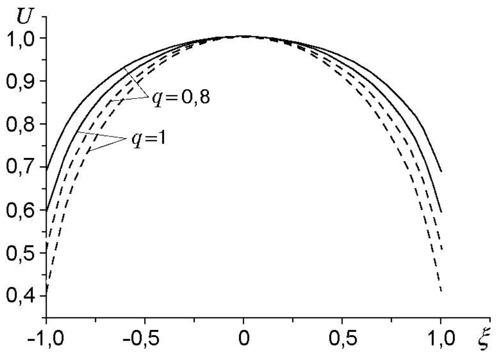

Рис. 3

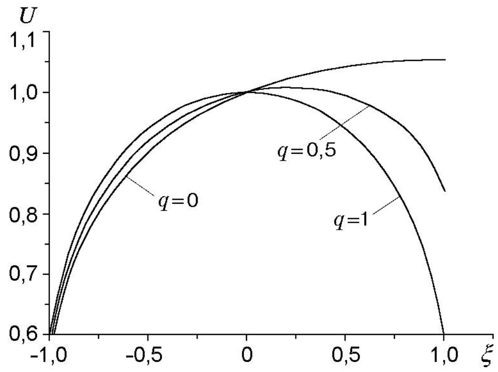

Рис. 4

работы [4] (штриховые кривые), на рис. 4 — профиль среднемассовой скорости, построенный согласно (4.1) при $q_1 = 1$. На рис. 3, 4 $\xi = x/b$.

Из рис. 1–4 следует, что при использовании кинетического уравнения с частотой столкновений, пропорциональной скорости молекул, потоки массы быстрее выходят на асимптотику ($d \to \infty$), чем при использовании кинетического уравнения с постоянной частотой столкновений. В случае неравных коэффициентов аккомодации профили скорости становятся несимметричными относительно середины канала.

5. Выводы. Впервые точно решена задача о тепло- и массопереносе в канале, заполненном разреженным газом с частотой столкновений, пропорциональной молекулярной скорости, при произвольных коэффициентах аккомодации на стенках канала. Проведено сравнение полученных аналитических результатов с результатами численных расчетов [4].

Показано, что для рассмотренной задачи соотношения Онзагера строго выполняются во всем диапазоне чисел Кнудсена.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Черчиньяни К.** О методах решения уравнения Больцмана // Неравновесные явления: Уравнение Больцмана. М.: Мир, 1986. С. 132–204.
2. **Tanaka S., Sone Y.** Flow induced around a sphere with a non-uniform surface temperature in a rarefied gas, with application to the drag and thermal force problems of a spherical particle with arbitrary thermal conductivity // Europ. J. Mech. B. 1995. V. 14, N 3. P. 487–518.
3. **Loyalka S. K., Storvick T. S., Pork H. S.** Poiseuille flow and thermal creep flow in long, rectangular channel in the molecular and transition flow regime // J. Vac. Sci. Technol. 1976. V. 13, N 6. P. 1188–1192.
4. **Loyalka S. K., Petrellis N., Storvick T. S.** Some exact numerical results for the BGK model: Couette — Poiseuille and thermal creep flow between parallel plates // Z. angew. Math. Phys. 1979. Bd 30, N 3. S. 514–521.
5. **Де Гроот С., Мазур П.** Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964.
6. **Базаров И. П., Геворкян Э. В., Николаев П. Н.** Неравновесная термодинамика и физическая кинетика. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.
7. **Vestner H., Waldmann I.** Generalized hydrodynamics of thermal transpiration, thermal force and friction force // Physica A. 1977. V. 86, N 2. P. 303–336.
8. **Жданов В. М., Ролдугин В. И.** О неравновесной термодинамике слаборазреженной газовой смеси // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1996. Т. 109, № 4. С. 1267–1287.

9. **Яламов Ю. И., Гайдуков М. Н.** Два метода построения теории термофореза крупных аэрозольных частиц // Коллоид. журн. 1976. Т. 38, № 6. С. 1149–1155.
10. **Яламов Ю. И., Гайдуков М. Н., Голиков А. М.** Два метода построения теории диффузиофореза крупных аэрозольных частиц // Коллоид. журн. 1977. Т. 39, № 6. С. 1132–1138.
11. **Баканов С. П., Дерягин Б. В., Ролдугин В. И.** Термофорез в газах // Успехи физ. наук. 1979. Т. 129, № 2. С. 255–278.
12. **Латышев А. В., Юшканов А. А.** Анализ соотношений Онзагера аналитическими методами в кинетической теории газов // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2001. № 1. С. 173–181.
13. **Латышев А. В., Юшканов А. А.** Аналитическое решение задачи о скольжении газа с использованием модельного уравнения Больцмана с частотой, пропорциональной скорости молекул // Поверхность. Физика, химия, механика. 1997. № 1 С. 92–99.
14. **Латышев А. В., Юшканов А. А.** Тепловое скольжение для газа с частотой столкновений, пропорциональной скорости молекул // Инж.-физ. журн. 1998. Т. 71, № 2. С. 353–359.

Поступила в редакцию 30/I 2002 г.