

10. Бувевич Ю. А. О равновесии сыпучей среды между вертикальными стенками.— ИФЖ, 1975, т. 28, № 3, с. 455.
11. Бувевич Ю. А., Минаев Г. А. О переходе зернистого слоя в псевдооживленное состояние (теория).— ИФЖ, 1975, т. 28, № 5, с. 773.
12. Baerns M. Effect of interparticle adhesive forces on fluidization of fine particles.— «Ind. Engng Chem. Fund.», 1966, vol. 5, N 4, p. 508.
13. Lewis W. K., Gilliland E., Bauer W. Characteristics of fluidised particles.— «Ind. Engng Chem. Fund.», 1949, vol. 41, N 11, p. 1104.
14. Филиппов М. В. Взвешенный слой ферромагнитных частиц и действие на него магнитного поля.— «Труды Ин-та физ. АН ЛатвССР», 1961, № 12, с. 215.
15. Parker H., Stevens W. Effect of liquid on interparticle forces in gas — fluidized beds.— «AIChE J.», 1959, vol. 5, N 3, p. 314.
16. Benenatti R. F. In: Fluidization. N. Y., 1956. Рус. пер. Псевдооживление. М., Гостоптехиздат, 1958.

УДК 532.542 : 660.095.26

### НЕКОТОРЫЕ ДВУМЕРНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ ТЕЧЕНИИ РЕАГИРУЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ СО СВОЙСТВАМИ, МЕНЯЮЩИМИСЯ С ГЛУБИНОЙ ПРЕВРАЩЕНИЯ

Д. А. Ваганов

(Черноголовка)

В ходе химических превращений механические свойства реагирующей жидкости могут меняться. Так, процессы полимеризации обычно сопровождаются значительным увеличением вязкости. Это приводит к возникновению специфических гидродинамических эффектов. Некоторые из них рассмотрены в данной работе на примере простейшей двумерной задачи.

1. Рассматривается стационарное ламинарное течение реагирующей ньютоновской жидкости в трубе. Вязкость  $\mu$  и плотность  $\rho$  жидкости в ходе химических превращений меняются от исходных значений  $\mu = \mu_0$  и  $\rho = \rho_0$  до значений  $\mu = \mu_1$  и  $\rho = \rho_1$  при полном превращении.

Будем считать, что температура жидкости постоянна и влиянием диффузии можно пренебречь. В этом случае в любой точке глубина превращения и механические свойства жидкости определяются лишь временем  $t$ , за которое жидкость достигает данной точки. Зависимости  $\mu = \mu(t)$  и  $\rho = \rho(t)$  такие же, как и в случае неподвижной жидкости, и поэтому могут считаться известными.

Примем, что изменение свойств жидкости во времени может быть аппроксимировано скачкообразной зависимостью

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \mu &= \mu_0, \quad \rho = \rho_0 \quad \text{при } t < t_0, \\ \mu &= \mu_1, \quad \rho = \rho_1 \quad \text{при } t \geq t_0. \end{aligned}$$

Это допущение сохраняет основные черты рассматриваемого явления и в то же время обеспечивает значительные математические упрощения. Пространственное распределение механических свойств жидкости при этом допущении сводится к существованию двух областей, в каждой из которых эти свойства постоянны. Область, в которой свойства жидкости

не отличаются от исходных, при удалении от начала трубы сужается, причем время, за которое жидкость достигает точек, лежащих на этой границе, равно  $t_0$ . Время  $t_0$  в рамках данной работы можно трактовать как некоторый период индукции, по истечении которого мгновенно происходит полное химическое превращение. Поэтому в дальнейшем элементы жидкости, механические свойства которых совпадают со свойствами жидкости при полном превращении, будем условно называть прореагировавшими (или продуктами реакции), элементы жидкости, свойства которых не отличаются от исходных, — неореагировавшими, а границу раздела между ними — фронтом реакции.

Введем обозначения:  $V$  и  $W$  — соответственно осевая и радиальная составляющие скорости;  $U$  — объемный расход исходной жидкости, отнесенный к единице площади сечения;  $r$  — относительное расстояние от оси трубы;  $z$  — расстояние от начала трубы;  $P$  — разность между давлением на входе в трубу и давлением в данной точке;  $P_0$  — перепад давления между входом и выходом из трубы;  $z_0$  и  $r_0$  — длина и радиус трубы соответственно.

Строго говоря, следовало бы рассматривать течение жидкости не только в самой трубе, но и до входа и по выходе из трубы. Чтобы избежать этого, будем считать, что расстояние  $l_e$ , на котором затухают возникающие на входе в трубу возмущения, существенно меньше расстояния  $l_*$ , на котором становится заметным влияние изменения свойства жидкости ( $l_* \sim Ut_0$ ), и что перепадом давления поперек трубы можно пренебречь.

Кроме того, предположим, что влияние инерционных сил мало, скорость течения в любой точке направлена практически вдоль оси трубы ( $W \ll V$ ) и заметные изменения картины течения происходят на расстояниях, настолько превышающих ширину трубы, что в каждом отдельном сечении можно пренебрегать изменениями величин, происходящими по длине трубы.

Чем больше расход жидкости, тем больше скорость ее движения ( $V \sim U$ ). В то же время перемещение жидкости в радиальном направлении, возникающее в результате изменения механических свойств жидкости, непосредственно не связано с величиной расхода. При прочих равных условиях величина радиальной составляющей скорости определяется шириной трубы и быстротой изменения свойств жидкости ( $W \sim r_0/t_0$ ). Следовательно,

$$(1.2) \quad W/V \sim \varepsilon = r_0/Ut_0.$$

Влияние инерционных сил в данном случае определяется величиной

$$(1.3) \quad \rho W r_0 / \mu \sim \text{Re}_* = r_0(r_0/t_0)/(\mu_0/\rho_0),$$

представляющей собой аналог критерия Рейнольдса для радиального перемещения жидкости, и так как при  $l_e \ll l_*$ , согласно [1],

$$l_e \sim r_0^2 \rho_0 U / \mu_0, \text{ то } l_e/l_* \sim \text{Re}_*.$$

Таким образом, сделанные предположения означают, что рассмотрение ограничивается главным членом асимптотики при

$$(1.4) \quad \varepsilon \rightarrow 0 \text{ и } \text{Re}_* \rightarrow 0.$$

Требуемая здесь практически степень малости величин  $\varepsilon$  и  $\text{Re}_*$  зависит от величины относительного изменения свойств жидкости и может быть установлена из сравнения приближенного и точного решений.

В рассматриваемом приближении течение жидкости в трубе данной длины не будет отличаться от течения жидкости на соответствующем

участке более длинной трубы. Изменение же расхода жидкости приводит, по существу, лишь к соответствующему растяжению или сжатию картины течения. Поэтому при решении задачи естественно не ограничиваться заранее каким-либо определенным значением длины трубы. Формально это сводится к использованию безразмерных переменных, не зависящих от  $z_0$ . Такими переменными являются величины

$$(1.5) \quad v = \frac{V}{U}, w = \bar{w} / \left( \frac{r_0}{z_0} \right), p = P / \left( 8 \frac{\mu_0}{r_0^2} U^2 t_0 \right), \zeta = z / U t_0,$$

представляющие собой соответственно безразмерные осевую и радиальную составляющие скорости, давление и расстояние от начала трубы. Введение здесь численного множителя в определение безразмерного давления приводит выражение закона Пуазейля к наиболее простому виду  $dp/d\zeta = 1$ .

В этих безразмерных переменных уравнения движения вязкой ньютоновской жидкости [2] принимают вид

$$(1.6) \quad \gamma \operatorname{Re}_* \left\{ v \frac{\partial v}{\partial \zeta} + w \frac{\partial v}{\partial r} \right\} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ 8p + \varepsilon^2 \left( \frac{2}{3} v - v' \right) \left( \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r w \right) \right\} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r v \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \varepsilon^2 \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( v \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r v \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right\};$$

$$(1.7) \quad \varepsilon^2 \gamma \operatorname{Re}_* \left\{ v \frac{\partial w}{\partial \zeta} + w \frac{\partial w}{\partial r} \right\} = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ 8p + \varepsilon^2 \left( \frac{2}{3} v - v' \right) \left( \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r w \right) \right\} + \varepsilon^2 \left\{ \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r v \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \frac{2vw}{r^2} + \frac{\partial}{\partial \zeta} v \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \varepsilon^2 \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) \right\},$$

где  $\gamma = \rho/\rho_0$ ;  $v = \mu/\mu_0$ ;  $v' = \mu'/\mu_0$ ,  $\mu'$  — коэффициент объемной вязкости, а величины  $\varepsilon$  и  $\operatorname{Re}_*$  определены в (1.2), (1.3) соответственно.

Переходя к пределу (1.4), из (1.7) получаем  $\partial p/\partial r = 0$ , так что  $p = p(\zeta)$ , и из (1.6) следует

$$(1.8) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r v \frac{\partial v}{\partial r} \right) + 8dp/d\zeta = 0.$$

Положим, что в сечении  $\zeta = \text{const}$  прореагировавшей жидкости соответствуют  $r \geq R$ , т. е. в этом сечении

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_0, \rho = \rho_0 \text{ при } r < R, \\ \mu &= \mu_1, \rho = \rho_1 \text{ при } r \geq R, R = R(\zeta). \end{aligned}$$

Тогда, интегрируя (1.8) по  $r$  и учитывая, что  $v = 0$  при  $r = 1$  и  $\partial v/\partial r = 0$  при  $r = 0$ , для распределения осевой составляющей скорости будем иметь

$$(1.9) \quad v \frac{1 + \alpha}{2dp/d\zeta} = \begin{cases} 1 - r^2 + \alpha(R^2 - r^2) & \text{при } r < R, \\ 1 - r^2 & \text{при } r \geq R, \end{cases} \alpha = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_0}.$$

Уравнение неразрывности в переменных (1.5) имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \gamma w) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (\gamma v) = 0,$$

и можно ввести безразмерную функцию тока

$$(1.10) \quad \psi(\zeta, r) = \int_r^1 \gamma(\zeta, r') v(\zeta, r') 2r' dr',$$

через которую составляющие скорости выражаются с помощью соотношений

$$(1.11) \quad w = \frac{1}{2\gamma r} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right)_r, \quad v = -\frac{1}{2\gamma r} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_\zeta.$$

Подставляя (1.9) в (1.10), для безразмерной функции тока  $\psi$  получаем

$$(1.12) \quad \psi \frac{1+\alpha}{dp/d\zeta} = \begin{cases} (1-r^2)^2 + \alpha(R^2-r^2)^2 + \beta(1-R^2)^2 & \text{при } r < R, \\ (1+\beta)(1-r^2)^2 & \text{при } r \geq R, \end{cases}$$

$$\beta = \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_0}.$$

Массовый расход жидкости через любое сечение один и тот же, и  $\psi \equiv 1$  при  $r = 0$ . Поэтому для градиента давления из (1.12) следует

$$(1.13) \quad dp/d\zeta = (1+\alpha)/[1+\alpha R^4 + \beta(1-R^2)^2].$$

Приведенные выражения позволяют полностью определить характеристики течения по зависимости  $R = R(\zeta)$ . Тем самым решение задачи в рассматриваемом приближении сводится к нахождению положения фронта реакции.

2. При нахождении положения фронта реакции удобно ввести в рассмотрение долю  $\sigma = \sigma(\zeta)$ , которую составляет прореагировавшая жидкость в полном массовом расходе жидкости через данное сечение,

$$(2.1) \quad \sigma(\zeta) = \int_{R^2(\zeta)}^1 \gamma(\zeta, r) v(\zeta, r) dr^2 \equiv \psi(\zeta, R(\zeta)).$$

Из (2.1) с учетом (1.12), (1.13) имеем

$$(2.2) \quad \sigma = (1+\beta)(1-R^2)^2/[1+\alpha R^4 + \beta(1-R^2)^2],$$

и поскольку величины  $\sigma$  и  $R$  однозначно связаны между собой, нахождение зависимости  $\sigma = \sigma(\zeta)$  эквивалентно нахождению зависимости  $R = R(\zeta)$ .

Согласно (1.1), положение фронта реакции определяется условием, что время, за которое элементы жидкости достигают фронта, равно  $t_0$ . Так как время  $dt$ , за которое элемент жидкости, движущийся вдоль линии тока  $\psi = \text{const}$ , проходит расстояние между сечениями, соответствующими значениям  $\sigma$  и  $\sigma + d\sigma$ , удовлетворяет соотношению

$$d\sigma = (d\sigma/d\zeta) v(\sigma, \psi) dt/t_0,$$

то для нахождения  $d\sigma/d\zeta$  вытекает интегральное уравнение

$$(2.3) \quad \int_0^\psi \left( \frac{d\zeta}{d\sigma} \right) \frac{d\sigma}{v(\sigma, \psi)} = 1, \quad 0 \leq \psi \leq 1.$$

Здесь через  $v(\sigma, \psi)$  обозначено значение осевой составляющей скорости в точке, соответствующей данным значениям  $\sigma$  и  $\psi$ . Подставляя в (1.9) найденное из (1.12) расстояние от оси трубы до данной линии тока,

в результате с учетом (1.13), (2.2) для этого значения осевой составляющей скорости получаем

$$(2.4) \quad v \frac{1+\beta}{2} \frac{1-R^2}{\sqrt{\sigma}} = \begin{cases} \sqrt{\psi} & \text{при } \psi < \sigma, \\ \sqrt{(1+\delta)\psi - \delta\sigma} & \text{при } \psi \geq \sigma, \delta = \alpha + \alpha\beta + \beta. \end{cases}$$

Используя (2.4), интегральное уравнение (2.3) можно представить в виде

$$(2.5) \quad (1+\beta) \int_0^{\sqrt{\psi}} \left[ (1-R^2) \frac{d\xi}{d\sigma} \right] \frac{d\sqrt{\sigma}}{\sqrt{(1+\delta)\psi - \delta\sigma}} = 1.$$

откуда видно, что если выражение, стоящее в (2.5) в квадратных скобках, положить равным константе, то, так как

$$\int_0^{\sqrt{\psi}} \frac{d\sqrt{\sigma}}{\sqrt{(1+\delta)\psi - \delta\sigma}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+\delta) - \delta x^2}} = \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{\delta})}{\sqrt{\delta}},$$

левая часть интегрального уравнения не будет зависеть от значения  $\psi$ . Следовательно, решение интегрального уравнения (2.3) есть

$$\frac{d\sigma}{d\xi} = (1+\beta) \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{\delta})}{\sqrt{\delta}} (1-R^2),$$

и, возвращаясь от переменной  $\sigma$  к переменной  $R$ , для нахождения положения фронта реакции имеем

$$(2.6) \quad \frac{dR^2}{d\xi} = - \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{\delta})}{2\sqrt{\delta}} \cdot \frac{[1 + \alpha R^4 + \beta(1-R^2)^2]^2}{1 + \alpha R^2}.$$

Интегрируя (2.6), находим координаты фронта реакции, а из (1.13), (2.6) определяем изменение давления по длине трубы.

Полагая  $x = (1-R^2)/(1+\alpha R^2)$ , координаты фронта реакции можно параметрически представить в виде

$$(2.7) \quad \xi = \frac{\operatorname{arctg}(x\sqrt{\delta})}{\operatorname{arctg}(\sqrt{\delta})} + \frac{1+\alpha x}{1+\delta x^2} \frac{x\sqrt{\delta}}{\operatorname{arctg}(\sqrt{\delta})}, \quad R = \sqrt{\frac{1-x}{1+\alpha x}},$$

и при  $\xi \leq \xi_*$ , где

$$(2.8) \quad \xi_* = 1 + \frac{1}{1+\beta} \frac{\sqrt{\delta}}{\operatorname{arctg}(\sqrt{\delta})}$$

— максимальная протяженность фронта реакции по длине трубы, для разности давлений на входе в трубу и в данной точке будем иметь

$$(2.9) \quad p = \frac{5+2\alpha x+3\delta x^2}{4} \left( \frac{1+\alpha x}{1+\delta x^2} \right)^2 \frac{x\sqrt{\delta}}{\operatorname{arctg}(\sqrt{\delta})} + \left. + \frac{3}{4} \frac{\operatorname{arctg}(x\sqrt{\delta})}{\operatorname{arctg}(\sqrt{\delta})} \left[ 1 + \frac{\alpha^2}{\delta} \left[ 1 - \frac{x\sqrt{\delta}}{\operatorname{arctg}(x\sqrt{\delta})} \right] \right] \right\}.$$

Параметр  $x$  — отношение значения осевой составляющей скорости во фронте реакции к скорости течения жидкости в центре трубы

$$\frac{1}{2} v \frac{1+\delta x^2}{1+\alpha x} = \begin{cases} x + (1-x) \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) & \text{при } r < R, \\ x \frac{1-r^2}{1-R^2} & \text{при } r \geq R. \end{cases}$$

В начале трубы фронт реакции примыкает к стенкам, параметр  $x$  равен нулю. С удалением от начала трубы значение  $x$  возрастает и при  $\zeta = \zeta_*$ , когда фронт реакции достигает центра трубы, становится равным единице.

Доля сечения, занятая прореагировавшей жидкостью  $(1 - R^2)$ , и доли  $\sigma$  и  $\sigma'$ , которые составляет прореагировавшая жидкость соответственно в полном массовом и объемном расходах жидкости через данное сечение, связаны с параметром  $x$  соотношениями

$$(2.10) \quad \sigma = \frac{1 + \delta}{1 + \delta x^2} x^2, \quad \sigma' = \frac{1 + \alpha}{1 + \alpha x^2} x^2, \quad 1 - R^2 = \frac{1 + \alpha}{1 + \alpha x} x,$$

а для распределения радиальной составляющей скорости из (1.11) следует

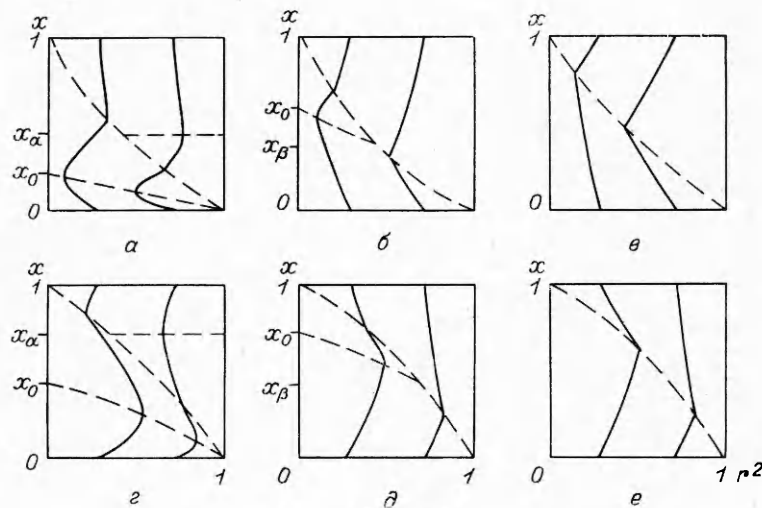
$$(2.11) \quad r w \frac{2 \sqrt{\delta}}{\operatorname{arctg}(\sqrt{\delta})} = \begin{cases} \frac{(1 + \alpha) x^2 (\alpha - \delta x) \left(\frac{1 - r^2}{1 - R^2}\right)^2}{(1 + \alpha x)^2} & \text{при } r > R, \\ \frac{r^2 (1 - x)}{R^2 (1 + \alpha x)^2} \left[ (1 + \alpha)(\beta + \delta x) x - \right. \\ \left. - (1 - x)(\alpha - \delta x) \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \right] & \text{при } r < R. \end{cases}$$

При  $\zeta > \zeta_*$  имеет место обычное пуазейлевское течение прореагировавшей жидкости и

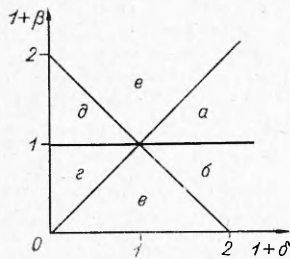
$$p = p_* + [(1 + \alpha)/(1 + \beta)](\zeta - \zeta_*), \quad p_* = p(\zeta_*).$$

В зависимости от того, уменьшается или увеличивается плотность жидкости в ходе химических превращений, скорость течения при  $\zeta \geq \zeta_*$  будет больше или меньше, чем в начале трубы. Но расстояние от оси трубы до любой линии тока при  $\zeta \geq \zeta_*$  такое же, как и вначале.

Поведение линий тока при  $\zeta < \zeta_*$ , согласно (2.11), может быть различным. Эти различия показаны на фиг. 1, где линиям тока соответствуют сплошные линии, а штриховой линией изображено положение фронта реакции и геометрическое место точек, в которых радиальная составляющая скорости равна нулю. Значения величин  $\delta$  и  $\beta$ , при которых реализуется тот или иной случай, указаны на фиг. 2, где точки, находящиеся ниже прямой  $\beta = \delta$ , соответствуют увеличению вязкости с глубиной прев-



Ф и г. 1



Ф и г. 2

ращения. Так как расход жидкости постоянен, то увеличение вязкости приводит к тому, что скорость течения непрореагировавшей жидкости увеличивается и линии тока стягиваются к оси трубы. Если же вязкость уменьшается, то скорости течения непрореагировавшей жидкости выравниваются, а линии тока расходятся к стенкам.

Выделенными на фиг. 1 значениями параметра  $x$  являются  $x_\alpha = \alpha/\delta$ ,  $x_\beta = -\beta/\delta$  и значение  $x_0$ , удовлетворяющее уравнению  $\alpha\delta x^2 + 2\delta x - \alpha = 0$ . Подставляя эти значения в (2.7), можно показать, что в случаях  $a$  и  $z$   $\zeta(x_0) = (1/2) \times$

$\times \zeta(x_\alpha)$ , а в случаях  $b$  и  $\partial$   $\zeta(x_0) = (1/2)[\zeta(x_\beta) + \zeta_*]$ . В сечении, соответствующем  $x = x_0$ , скорость течения в центре трубы равна  $v = \alpha/\sigma x_0$ . Когда  $\alpha > 0$ , это значение скорости является максимальным, а при  $\alpha < 0$  — минимальным.

Если свойства жидкости не меняются ( $\alpha = \beta = 0$ ), то  $w \equiv 0$ ,  $\sigma = (1/4)\zeta^2$ ,  $1 - R^2 = x = (1/2)\zeta$ ,  $\zeta_* = 2$ .

При  $\mu_1 \ll \mu_0$  прореагировавшая жидкость играет роль смазки. В результате на большей части фронта реакции непрореагировавшая жидкость движется с практически постоянной скоростью  $v \simeq 1$ , значение  $\zeta_*$  стремится к единице.

Когда вязкость прореагировавшей жидкости существенно больше исходной ( $\alpha \gg 1$ ), из (2.8) для протяженности фронта реакции следует

$$\zeta_* \approx (2/\pi) \sqrt{I}, \quad I = (1 + \alpha)/(1 + \beta) = (\mu_1/\rho_1)/(\mu_0/\rho_0).$$

В этом случае поток непрореагировавшей жидкости сжимается в узкую струю, прорывающуюся через малоподвижный слой прореагировавшей жидкости. На участке образования струи движение продуктов реакции практически отсутствует, а налипание их на стенки приводит к тому, что исходная жидкость движется как бы в трубе переменного сечения. В соответствии с этим из (1.13) следует  $dp/d\zeta \approx \tilde{R}^{-2}$ , а переходя в (2.7), (2.9) и (2.10) к пределу  $\alpha \rightarrow \infty$  при фиксированном значении  $\eta = \alpha x$ , для этого участка получаем

$$R^2 \approx 1/(1 + \eta), \quad \sigma \approx \eta^2/I, \quad \zeta \approx (2/\pi \sqrt{I})\eta(\eta + 2),$$

$$p \approx [\eta^2(\eta + 2)^2 + 2\eta(\eta + 2)]/\pi \sqrt{I}.$$

Соответствующие предельные переходы показывают, что при  $I^{-1/2} \ll \zeta \leq \zeta_*$  сопротивление, оказываемое движению, связано с течением прореагировавшей жидкости, на которое в каждом отдельном сечении практически не влияет наличие в центре трубы узкой струи непрореагировавшей жидкости,

$$v \approx [2\sigma/(1 + \beta)](1 - r^2) \text{ при } r \geq R \simeq 0, \quad dp/d\zeta \approx I\sigma.$$

Количество прореагировавшей жидкости, образующееся на единице длины трубы, не зависит от расхода и постоянно по длине трубы

$$t_0 d(\sigma U)/dz \equiv d\sigma/d\zeta \approx \pi/2 \sqrt{I},$$

в результате на большей части протяженности фронта реакции

$$\sigma \approx \zeta/\zeta_*, \quad p \approx p_*(\zeta/\zeta_*)^2, \quad p_* \approx (1/\pi)I^{3/2}.$$

Для нахождения зависимости между перепадом давления и расходом жидкости следует перейти от переменных (1.5) к переменным

$$(2.12) \quad \kappa = p_0 \left/ \left( 8 \frac{\mu_0}{r_0^2} \frac{z_0}{t_n} z_0 \right) \right., \quad \omega = U \left/ \left( \frac{z_0}{t_n} \right) \right.,$$

$$\theta = \left( \frac{z_0}{U} \right) / t_0 \equiv \omega^{-1},$$

масштабные значения которых связаны не с величиной расхода, а с длиной трубы. Здесь  $\kappa$  — безразмерный перепад давления по длине трубы;  $\omega$  — безразмерный расход жидкости, и если плотность жидкости не меняется, то  $\theta = \omega^{-1}$  — безразмерное среднее время пребывания жидкости в трубе.

Сравнение (2.12) и (1.5) показывает, что

$$(2.13) \quad \kappa = \omega^2 p(\theta), \quad p(\theta) \equiv p(\zeta) \text{ при } \zeta = \theta.$$

Соотношение (2.13) устанавливает связь между рассмотренным выше изменением характеристик течения по длине трубы и зависимостью их от расхода и перепада давления.

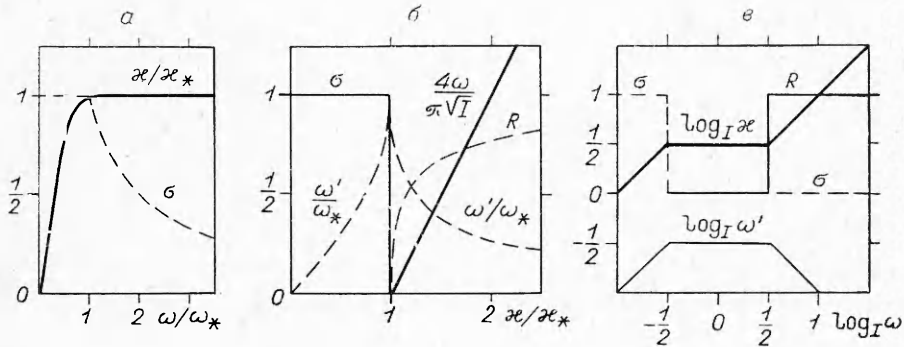
Наибольший интерес представляет поведение системы в случае, когда вязкость прореагировавшей жидкости существенно больше исходной (фиг. 3). Различие в скоростях движения прореагировавшей и непрореагировавшей жидкости в этом случае настолько велико, что для достижения полного превращения среднее время пребывания жидкости в трубе должно значительно превышать период индукции  $t_0$ . Максимальные расход и перепад давления, при которых на выходе из трубы еще имеет место полное превращение, равны

$$\omega_* \equiv \zeta_*^{-1} \approx \frac{\pi}{2\sqrt{I}}, \quad \kappa_* \equiv \zeta_*^{-2} p_* \approx \frac{\pi}{4} \sqrt{I}.$$

При расходе, большем  $\omega_*$ , струя непрореагировавшей жидкости прорывается через всю трубу, и доля прореагировавшей жидкости падает. Но пока  $\theta \gg I^{-1/2}$ , т. е. вплоть до значений среднего времени пребывания, значительно меньших периода индукции, поступающее из трубы количество прореагировавшей жидкости и перепад давления практически не меняются

$$\omega' \equiv \sigma \omega \approx \omega_*, \quad \kappa/\kappa_* \approx 1.$$

Если движение жидкости происходит при заданном перепаде давления, то с увеличением  $\kappa$  при переходе через  $\kappa/\kappa_* = 1$  расход жидкости резко



Ф и г. 3



возрастает и среднее время пребывания становится настолько меньше периода индукции, что движение прореагировавшей жидкости практически прекращается. Перепад давления при  $\kappa/\kappa_* > 1$  связан с расходом и характеристиками течения на выходе из трубы соотношениями

$$\kappa \approx \kappa_* + \omega, \frac{\kappa_*}{\kappa} \approx \frac{1-R^4}{1+R^4}, \frac{\kappa}{\kappa_*} \approx \frac{1}{2} \left[ \frac{\omega'}{\omega_*} + \frac{\omega_*}{\omega'} \right], \omega' < \omega_*,$$

а при  $\kappa/\kappa_* < 1$

$$\frac{\kappa}{\kappa_*} \approx 2 \frac{\omega}{\omega_*} - \frac{\omega^2}{\omega_*^2}.$$

Предположения, сделанные при решении гидродинамической задачи, не позволяют рассмотреть в данной работе критические явления, связанные с неоднозначным характером зависимости расхода жидкости от перепада давления [3].

Автор выражает благодарность В. Г. Абрамову, А. М. Столину и Н. Г. Самойленко за ценные советы и обсуждения.

Поступила 20 I 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Современное состояние гидродинамики вязкой жидкости. Т. 1. Издательство, 1948.
2. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1970.
3. Ваганов Д. А. Критические явления, вызванные изменением вязкости с глубиной превращения.— ПМТФ, 1975, № 2, с. 168.

УДК 532.517.2 + 536.24

### ВЯЗКОСТНО-ГРАВИТАЦИОННОЕ ТЕЧЕНИЕ В ТРУБАХ ПРИ МАЛОМ ВЛИЯНИИ ТЕРМОГРАВИТАЦИИ

А. Ф. Поляков

(Москва)

Имеется довольно много работ, посвященных исследованию вязкостно-гравитационного течения в трубах. Однако все имеющиеся в этих работах расчетные рекомендации относятся к случаю стабилизированного течения. В то же время практически во всех реальных объектах развитие процесса происходит в начальном участке, так как для наступления стабилизации требуются большие длины труб.

В данной работе проведено аналитическое исследование границ и характера начала влияния термогравитационных сил на поля скорости, температуры, сопротивление трения и теплоотдачу в любом сечении по длине произвольно расположенных в пространстве круглых труб при постоянной плотности теплового потока на стенке ( $q_w = \text{const}$ ).

Воспользуемся уравнением движения, записанным для вихря,

$$(1) \quad d\omega/d\tau = (\omega \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{v} \Delta \omega + \text{rot} \mathbf{p} \mathbf{g},$$

где  $\omega = \text{rot} \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u} = v \mathbf{e}_r + w \mathbf{e}_\varphi + u \mathbf{e}_x$ ;  $\mathbf{g}$  — ускорение силы тяжести;  $\mathbf{v}$  — кинематический коэффициент вязкости.