ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЙ АДИАБАТИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ СРЕДЫ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

М. Т. Жумартбаев

(Алма-Ата)

Произведена групповая классификация и найден полный набор инвариантных решений уравнений адиабатического движения среды в релятивистской гидродинамике.

1. В работах [1-3] изучены групповые свойства дифференциальных уравнений гидродинамики, в частности, произведена групповая классификация и уравнений адиабатического течения среды в нерелятивистском случае. Представляет интерес применение развитого аппарата к уравнениям релятивистской гидродинамики, поскольку ввиду их ковариантности групповые свойства последних должны быть иными, чем в нерелятивистском случае. В данной работе исследуются групповые свойства уравнений адиабатического движения среды, так как их решения, насколько нам известно, до сих пор не найдены.

В общем случае уравнения адиабатического движения среды в релятивистской гидродинамике имеют вид

$$
(S)\qquad
\begin{aligned}
&u_i u_k \frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + W u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = 0 \qquad (W = p + \varepsilon)\\
&\frac{\partial (n u_k)}{\partial x_k} = 0\\
&n u_k \frac{\partial p}{\partial x_k} - A u_k \frac{\partial n}{\partial x_k} = 0 \qquad \left(A(p,\ n) = -n\frac{\partial\sigma/\partial n}{\partial\sigma/\partial p}\right)
\end{aligned}
\qquad (1.1)
$$

Здесь W — тепловая функция на единицу объема среды, p — давление, $\varepsilon = \varepsilon(p, n)$ — плотность внутренней энергии, n — плотность числа частиц на единицу объема, σ — энтропия, приходящаяся на одну частицу. Основная система (S) состоит соответственно из уравнения движения, сохранения числа частиц и энтропии.

2. Изучим групповые свойства системы (1.1). Согласно общим правилам [1-3] необходимо найти систему определяющих уравнений алгебры Ли основной группы G системы, задаваемой (S).

Система определяющих уравнений находится из условия инвариантности системы (S) относительно оператора

$$
X = \xi_x^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_x^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \xi_u^1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \xi_u^2 \frac{\partial}{\partial p} + \xi_u^3 \frac{\partial}{\partial n}
$$

Здесь рассмотрен случай одномерного движения, и для симметрии записи уравнений положено $t = x_2\ (c = 1)$.

В упрощенном виде система определяющих уравнений имеет вид

$$
\begin{gathered}
\frac{A}{n}\frac{\partial \xi_u^3}{\partial p} + \frac{\partial \xi_u^3}{\partial n} - \frac{1}{n}\xi_u^3 = 0\\
\left(1 + \frac{\partial\varepsilon}{\partial p}\right)\xi_u^2 + \frac{\partial\varepsilon}{\partial n}\xi_u^3 - W\frac{\partial \xi_u^2}{\partial p} = 0\\
\frac{\partial \ln A}{\partial p}\xi_u^2 + \frac{\partial \ln A}{\partial n}\xi_u^3 - \frac{\partial \xi_u^2}{\partial p} = 0, \qquad \xi_u^1 = \sqrt{u_1^2 + 1}\,\frac{\partial \xi_x^1}{\partial x_2}\\
\frac{\partial \xi_x^{(1,2)}}{\partial u_1} = \frac{\partial \xi_x^{(1,2)}}{\partial p} = \frac{\partial \xi_x^{(1,2)}}{\partial n} = 0, \qquad \frac{\partial \xi_u^{(2,3)}}{\partial u_1} = \frac{\partial \xi_u^1}{\partial p} = \frac{\partial \xi_u^1}{\partial n} = \frac{\partial \xi_u^2}{\partial n} = 0 \qquad (2.1)\\
\frac{\partial \xi_x^1}{\partial x_{(1,2)}} = \frac{\partial \xi_x^2}{\partial x_{(2,1)}}, \quad \frac{\partial^2 \xi_x^2}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \xi_x^1}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \xi_x^1}{\partial x_2^2}, \quad \frac{\partial^2 \xi_x^1}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \xi_x^2}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \xi_x^2}{\partial x_2^2}\\
n\frac{\partial \xi_u^2}{\partial x_{(1,2)}} - A\frac{\partial \xi_u^3}{\partial x_{(1,2)}} = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi_x^1}{\partial x_2^2} + \frac{1}{W}\frac{\partial \xi_u^2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi_x^1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{W}\frac{\partial \xi_u^2}{\partial x_2} = 0\\
\frac{\partial^2 \xi_x^1}{\partial x_2^2} + \frac{1}{n}\frac{\partial \xi_u^3}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \xi_x^1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{n}\frac{\partial \xi_u^3}{\partial x_2} = 0
\end{gathered}
$$

Из системы определяющих уравнений (2.1), как следствие, можно вывести уравнение

$$
\left(1 - \frac{A}{W}\right)\frac{\partial \xi_u^{(2,3)}}{\partial x_{(1,2)}} = 0
$$

из которого следует, что возможны два случая, либо $A = W$, либо

$$\frac{\partial \xi_u^{(2,3)}}{\partial x_{(1,2)}} = 0 .$$

В первом случае основная система допускает бесконечную группу, так как $\zeta_x^{(1,2)}$ выражаются через произвольные волновые функции. Во втором случае $\zeta_x^{(2,3)}$ не зависят от x и, следовательно, $\zeta_x^{(1,2)}$ зависит от x в первой степени. В дальнейшем будем считать, что $A \neq W$, т. е. будем рассматривать второй случай.

Для групповой классификации системы (S) необходимо найти специализацию системы за счет A и ε. Функции A и ε подчиняются системе уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial n} = 0, \qquad -\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{Q}\right) + \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial p}\right) + \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{n}{AQ}\frac{\partial Q}{\partial n}\right) = 0 \tag{2.2}$$

где

$$W\frac{\partial \ln A}{\partial n} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = F(p)\left[\frac{\partial \ln A}{\partial n}\left(1 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial p}\right) - \frac{\partial \ln A}{\partial p}\frac{\partial \varepsilon}{\partial n}\right]$$

$$Q\left(W\frac{\partial \ln A}{\partial n} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial n}\right) = \left(1 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial p}\right) - W\frac{\partial \ln A}{\partial p}$$

Можно показать, что, в частности, система уравнений (2.2) допускает решение вида

$$\varepsilon = a_1 p^{a_2} n^{a_3} + a_1^1 p^{a_2^1} n^{a_3^1}, \quad A = b_1 p$$

$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_1^1,\ a_2^1,\ a_3^1,\ b_1 = \mathrm{const})$$

При $b_1 = \gamma$, $a_1 = 1/(\gamma - 1)$, $a_2 = a_3^1 = 1$, $a_3 = 0$, $a_1^1 = m_0$, где m_0 — масса покоя частиц, γ — показатель адиабаты, имеем уравнение состояния релятивистского идеального газа

$$\varepsilon = \frac{p}{\gamma - 1} + nm_0, \qquad A = \gamma p \tag{2.3}$$

Для ультрарелятивистского случая

$$\varepsilon = p/(\gamma - 1) \qquad (p,\ \varepsilon \gg nm_0)$$

Это соответствует большим плотностям давления и внутренней энергии.

Общее решение системы (2.1) для уравнения состояния (2.3) имеет вид

$$\xi_x^1 = l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3, \qquad \xi_x^2 = l_2 x_1 + l_1 x_2 + l_4 \tag{2.4}$$

$$\xi_u^1 = l_2\sqrt{u_1^2 + 1}, \quad \xi_u^2 = l_5 p, \quad \xi_u^3 = l_5 n \qquad (l_1, \ldots, l_5 = \mathrm{const})$$

Отсюда находим базисные операторы алгебры Ли для основной группы G

$$\begin{gathered} X_1 = x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + \sqrt{u_1^2 + 1}\,\frac{\partial}{\partial u_1}, \quad X_2 = p\frac{\partial}{\partial p} + n\frac{\partial}{\partial n} \\ X_3 = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad X_4 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad X_5 = \frac{\partial}{\partial x_2} \end{gathered} \tag{2.5}$$

Как известно, для отыскания существенно различных частных решений необходимо построить оптимальную систему однопараметрических подгрупп группы G основной системы (S).

Оптимальная система строится путем использования внутренних автоморфизмов группы G и имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} H_1 = X_4 - X_5, \quad H_2 = X_3, \quad H_3 = X_2 - X_4 + X_5 \\ H_4 = X_1, \quad H_5 = X_2 + X_3, \quad H_6 = X_1 + \alpha X_3 \\ H_7 = X_1 + X_2, \quad H_8 = X_1 + X_2 + \alpha X_3, \qquad (\alpha \neq 1) \end{gathered} \tag{2.6}$$

Восемь операторов (2.6) приводят к инвариантным решениям ранга единица.

Прежде чем перейти к изучению этих инвариантных решений, необходимо подчеркнуть, что точное аналитическое выражение для решений возможно получить лишь в ультрарелятивистском случае. В релятивистском случае решение получается методом последовательных приближений, путем разложения по степеням константы m_0. Ниже анализ решений приводится только для ультрарелятивистского случая.

Подгруппа H_1. Инварианты оператора

$$I_1 = \lambda = x_1 + x_2, \qquad I_2 = V(\lambda) = u_1, \; I_3 = P(\lambda) = p, \; I_4 = R(\lambda) = n$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (S / H) имеет решение только с постоянными значениями скорости, давления и плотности, т. е. решение этой подгруппы описывает бесконечную и однородную среду.

Подгруппа H_2. Инварианты оператора X_3 таковы:

$$I_1 = \lambda = \frac{x_1}{x_2}, \quad I_2 = V(\lambda) = u_1, \quad I_3 = P(\lambda) = p, \quad I_4 = R(\lambda) = n \tag{2.7}$$

Система уравнений (S / H) имеет решение

$$V(\lambda) = \frac{\lambda - \sqrt{\gamma - 1}}{\sqrt{2-\gamma}\,\sqrt{1-\lambda^2}}, \quad \frac{P}{P_0} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^{\gamma}, \quad R = R_0 \exp\left\{\frac{1}{\sqrt{\gamma-1}} \arcsin \lambda\right\} \quad (\lambda \leqslant 1)$$

Для скорости среды имеем обычную формулу релятивистского сложения скоростей

$$v = \frac{\lambda - \sqrt{\gamma - 1}}{1 - \lambda\sqrt{\gamma - 1}}$$

где $\sqrt{\gamma - 1}$ — скорость распространения бегущей волны.

Подгруппа H_3. Инварианты оператора

$$I_1 = \lambda = x_1 + x_2, \; I_2 = p^{-1} \exp\{-{}^1/_2 (x_1 - x_2)\} = P, \; I_3 = p / n = R, \; I_4 = u_1 = V$$

Соответствующие уравнения (S / H) могут быть проинтегрированы, и для инвариантов имеем

$$\frac{P}{P_0} = \lambda_0^{\theta_1}, \quad \frac{R}{R_0} = \lambda_0^{\theta_2}, \quad V = \frac{\lambda_0 - 1}{2\sqrt{\lambda_0}}$$

$$\left(\lambda_0 = -2\beta\lambda + c_1, \quad \beta = \frac{2(\gamma-1)}{\gamma(2-\gamma)}, \quad \theta_1 = \frac{\gamma(4-\gamma)}{4(\gamma-1)}, \quad \theta_2 = \frac{1-\gamma}{2}\right)$$

Здесь не имеет места политропическая зависимость между плотностью и давлением, и, следовательно, энтропия σ не постоянна.

Подгруппа H_4. Инварианты оператора X_1

$$I_1 = \lambda = \sqrt{x_2^2 - x_1^2}, \quad I_2 = V(\lambda) = (x_2 - x_1)(u_1 + \sqrt{u_1^2 + 1})$$
$$I_3 = P(\lambda) = p, \; I_4 = R(\lambda) = n \tag{2.8}$$

Система дифференциальных уравнений (S / H) имеет вид

$$\frac{\gamma}{(\gamma-1)} P\left[V' \frac{(V^2+\lambda^2)}{V\lambda} - 2\right] + P' \frac{(V^2-\lambda^2)}{\lambda} = 0$$
$$R\left[V' \frac{(V^2-\lambda^2)}{V\lambda} + 2\right] + R' \frac{(V^2+\lambda^2)}{\lambda} = 0 \qquad \left(\frac{P'}{P} = \gamma \frac{R'}{R}\right) \tag{2.9}$$

Инвариант V удовлетворяет уравнению

$$\lambda^2 \left(\frac{V^2}{\lambda^2} + 1\right)^{4(\gamma-1)/(\gamma-2)} \left(\frac{V^2}{\lambda^2} - 1\right)^{2/(2-\gamma)} V^2 = c_1 \exp\left(-\frac{\lambda^4}{2}\right)$$

В частности, для $\gamma = {}^4/_3$ инвариант V определяется кубическим уравнением. Оператор X_1 можно трактовать как оператор растяжения.

Подгруппа H_5. Инварианты

$$I_1 = \lambda = \frac{x_1}{x_2}, \quad I_2 = P(\lambda) = \frac{x_1 - x_2}{p}, \quad I_3 = R(\lambda) = \frac{p}{n}, \quad I_4 = V(\lambda) = u_1$$

приводят к системе (S / H), но их решения не могут быть найдены в аналитическом виде. Здесь также не имеет места политропическая зависимость между плотностью и давлением.

Подгруппа H_6. В данном случае имеем комбинацию двух рассмотренных выше операторов, а именно, оператора растяжения X_1 и оператора простой волны X_3. Инварианты оператора

$$I_1 = \lambda = \frac{(x_1 - x_2)^{k+1/2}}{(x_1 + x_2)^{k-1/2}}, \quad I_2 = V(\lambda) = (u_1 + \sqrt{u_1^2 + 1})(x_1 - x_2)^{1/(1-2k)} \tag{2.10}$$
$$I_3 = P(\lambda) = p, \; I_4 = R(\lambda) = n, \; k = {}^1/_2 a$$

удовлетворяют системе (S / H) следующего вида:

$$\frac{\gamma}{(\gamma-1)}\frac{V'}{V}\left[(1-2k)V^2-(1+2k)\lambda^{\varkappa}\right]+$$

$$+\frac{P'}{P}\left[(1-2k)V^2+(1+2k)\lambda^{\varkappa}\right]+\frac{2\gamma}{(\gamma-1)(1-2k)}\lambda^{\varkappa-1}=0 \qquad (2.11)$$

$$\frac{V'}{V}\left[(1-2k)V^2+(1+2k)\lambda^{\varkappa}\right]+\frac{R'}{R}\left[(1-2k)V^2-(1+2k)\lambda^{\varkappa}\right]-\frac{2}{(1-2k)}\lambda^{\varkappa-1}=0$$

$$\frac{P'}{P}=\gamma\frac{R'}{R},\quad \varkappa=\frac{2}{1-2k},\quad k\neq\frac{1}{2}$$

Рассмотрим подробнее решение этих уравнений, поскольку здесь имеется важная для приложений политропическая зависимость между плотностью и давлением. Чтобы проинтегрировать уравнения (2.11), положим

$$V=\lambda^{(1-2k)^{-1}}\varphi(\lambda) \qquad (2.12)$$

Непосредственно выразить все инварианты V, R, P через известную функцию от переменной λ невозможно. Поэтому удобнее представить инварианты через новую переменную $y=\varphi^2$. В этих переменных интегралы уравнения (1.11) принимают вид

$$R/R_0=(y-\alpha_1)^{D_1}(y+\alpha_2)^{D_2}\left[y-(b_4+b_3)\right]^{D_3}\left[y-(b_4-b_3)\right]^{D_4}$$

$$V=c^{1/(1-2k)}y^{1/2(1-A)}(y-\alpha_1)^{-1/2B}(y+\alpha_2)^{-1/2C}$$

$$\lambda/c_1=y^{-1/2A(1-2k)}(y-\alpha_1)^{-1/2B(1-2k)}(y+\alpha_2)^{-1/2C(1-2k)} \qquad (2.13)$$

$$P/P_0=(R/R_0)^{\gamma}$$

где

$$D_1=-\frac{2A_1B}{(2-\gamma)(1-2k)},\qquad D_2=-\frac{2A_2C}{(2-\gamma)(1-2k)}$$

$$D_3=-\frac{2}{(2-\gamma)(1-2k)}\left[\frac{A}{2b_3}+BB_1+CB_2\right],$$

$$D_4=-\frac{2}{(2-\gamma)(1-2k)}\left[-\frac{A}{2b_3}+BC_1+CC_2\right]$$

$$A=\frac{b_1^2+2a_1b_1+a_2}{b_1^2-b_2^2},\qquad B=\frac{b_2^2-2a_1b_2+a_2}{2b_2(b_1+b_2)},\qquad C=\frac{b_2^2+2a_1b_2+a_2}{2b_2(b_2-b_1)}$$

$$A_1=\frac{\alpha_1}{(b_4-\alpha_1)^2-b_3^2},\qquad B_1=\frac{b_4+b_3}{2b_3(b_3+b_4-\alpha_1)},\qquad C_1=\frac{b_4-b_3}{2b_3(b_3-b_4+\alpha_1)}$$

$$A_2=-\frac{\alpha_2}{(b_4+\alpha_2)^2-b_3^2},\qquad B_2=\frac{b_4+b_3}{2b_3(b_3+b_4+\alpha_2)},\qquad C_2=\frac{b_4-b_3}{2b_3(b_3-b_4+\alpha_2)}$$

$$a_1=\frac{\gamma}{(2-\gamma)(1-2k)},\qquad a_2=\frac{4(1-\gamma)(1+2k)^2+\gamma^2}{(2-\gamma)^2(1-2k)^2}$$

$$b_1=\frac{2\gamma k}{(2-\gamma)(1-2k)},\qquad b_2=\frac{2k}{(1-2k)}\left[\left(\frac{\gamma}{2-\gamma}\right)^2+\frac{1-4k^2}{4k^2}\right]^{1/2}$$

$$b_3=\left(\frac{1+2k}{1-2k}\right)\left[\left(\frac{\gamma}{2-\gamma}\right)^2-1\right]^{1/2},\qquad b_4=\frac{\gamma(1+2k)}{(2-\gamma)(1-2k)}$$

$$\alpha_1=b_2+b_1,\quad \alpha_2=b_2-b_1$$

Подгруппа H_7. Инварианты этой подгруппы

$$I_1=\lambda=\sqrt{x_2^2-x_1^2},\qquad I_2=V(\lambda)=(u_1+\sqrt{u_1^2+1})(x_2-x_1)$$

$$I_3=P(\lambda)=(u_1+\sqrt{u_1^2+1})/p,\qquad I_4=R(\lambda)=p/n$$

удовлетворяют системе (S / H) уравнений, которые могут быть проинтегрированы тем же методом. Полагая $V=\lambda\varphi$, $y=\varphi^2$, решение получим в виде

$$P/P_0=(y-1)^{A_1}(y-\alpha_1)^{A_2}(y-\alpha_2)^{A_3}(y-\beta_1)^{A_4}(y-\beta_2)^{A_5}$$

$$R/R_0=y^{B_1}(y-1)^{B_2}(y+1)^{B_3}(y-\alpha_1)^{B_4}(y-\alpha_2)^{B_5}(y-\beta_1)^{B_6}(y-\beta_2)^{B_7} \qquad (2.14$$

$$\lambda/c_1=y^{E_1}(y+\delta_1)^{E_2}(y+\delta_2)^{E_3}$$

Постоянные, кроме констант интегрирования P_0, R_0, c_1, зависят от адиабаты γ.

Подгруппа H_8. Эта подгруппа отличается от подгруппы H_6 добавлением оператора X_2. Инварианты

$$I_1 = \lambda = \frac{(x_1 - x_2)^{k+1/2}}{(x_1 + x_2)^{k-1/2}}, \qquad I_2 = \left(u_1 + \sqrt{u_1^2 + 1}\right)^{1-2k} (x_1 - x_2)$$

$$I_3 = P(\lambda) = \left(u_1 + \sqrt{u_1^2 + 1}\right) / p, \qquad I_4 = R(\lambda) = p / n, \qquad k = {}^1/_2\, \alpha$$

также приводят к системе (S / H), которые интегрируются аналогично случаю подгрупп H_6 и H_7. Решение в общем виде имеет вид

$$\frac{P}{P_0} = y^{A_1} \left[y + \frac{(1+2k)}{(1-2k)}\right]^{A_2} (y - \alpha_1)^{A_3} (y - \alpha_2)^{A_4} (y - \beta_1)^{A_5} (y - \beta_2)^{A_6}$$

$$\frac{R}{R_0} = y^{B_1} \left[y + \frac{(1+2k)}{(1-2k)}\right]^{B_2} \left[y - \frac{(1+2k)}{(1-2k)}\right]^{B_3} \left[y + \frac{(\gamma - 1)(1+2k)}{(2\gamma + 1)(1-2k)}\right]^{B_4} \times \tag{2.15}$$

$$\times (y - \alpha_1)^{B_5} (y - \alpha_2)^{B_6} (y - \beta_1)^{B_7} (y - \beta_2)^{B_8}$$

$$\lambda / c_1 = (y - a)^{E_1} (y - c)^{E_2} (y + c)^{E_3}$$

Здесь все постоянные зависят от k и γ.

Таким образом, за исключением всех подгрупп, где отсутствует оператор X_2, политропическая зависимость между плотностью и давлением не имеет места. В настоящее время наибольший интерес представляет подгруппа H_6, так как энтропия здесь сохраняется, и поэтому полученные решения могут быть применены, например, к гидродинамической теории множественного образования частиц [4–5].

Поступила 4 XI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. Группы и инвариантно-групповые решения дифференциальных уравнений. Докл. АН СССР, 1958, т. 118, № 3.
2. Овсянников Л. В. Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности. Докл. АН СССР, 1959, т. 125, № 3.
3. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.
4. Халатников И. М. Некоторые вопросы релятивистской гидродинамики. ЖЭТФ, 1954, т. 27, вып. 5 (11).
5. Ландау Л. Д. О множественном образовании частиц при столкновениях быстрых частиц. Изв. АН СССР, Сер. физ., 1953, т. 17, № 1.

БИНАРНЫЙ ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ СОВМЕСТНОЙ СВОБОДНОЙ И ВЫНУЖДЕННОЙ КОНВЕКЦИИ

П. М. Брдлик, В. И. Дубовик

(Москва)

Рассматривается тепло-массообмен на вертикальной поверхности при совместной свободной и вынужденной конвекции. Преобразованные к обыкновенным дифференциальные уравнения пограничного слоя содержат параметр, который определяет влияние свободной конвекции на вынужденное движение. Для подразделения характера движения на чисто свободную, чисто вынужденную конвекцию и совместный режим движения даются критерии.

Обозначения

x, y — координаты,
u, v — составляющие скорости,
g — ускорение силы тяжести,
T — температура,
ν — кинематическая вязкость,
β — коэффициент термического расширения,
a — коэффициент температуропроводности,
ρ_1 — парциальная плотность пара,
D — коэффициент диффузии,
W_2 — весовая скорость воздуха,
η — независимая переменная
τ_w — касательное напряжение на стенке,
λ — коэффициент теплопроводности,
r — скрытая теплота фазового превращения,
θ,φ — безразмерные температура и парциальная плотность пара,
m^* — комплекс $(m_{1\infty} - m_{1w}) / (1 - m_{1w})$,
c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении,
G — число Грасгофа,
R — число Рейнольдса,
P — число Прандтля,
S — число Шмидта

$$G = \frac{g\beta (T_w - T_\infty) x^3}{\nu^2}, \qquad R = \frac{U_\infty x}{\nu}, \qquad P = \frac{\nu}{a}, \qquad S = \frac{\nu}{D}$$