УДК 533.6.011

О ПАРАМЕТРАХ СТРУЙНОГО ТЕЧЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОЙ ФОРМЫ ИДЕАЛЬНОЙ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ

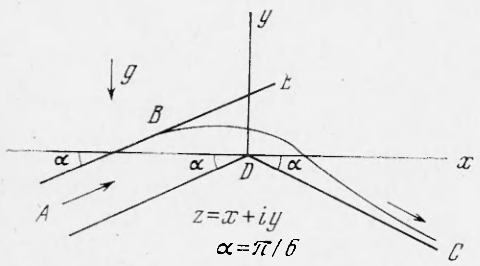
Ю. И. Петухов

(*Норильск*)

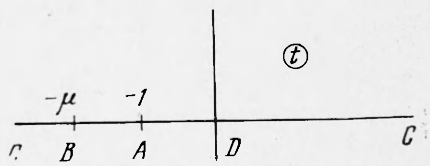
Возможность эффективно использовать аппроксимацию [1] граничного условия на свободной поверхности идеальной тяжелой жидкости для изучения струйных течений с полигональными твердыми границами, отдельные участки которых наклонены к горизонту под углами $\pi/2$ и $\pi/6$, указана в [2]. В этой работе введена аналитическая функция Φ, мнимая часть которой обращается в нуль на свободной границе.

В данной работе рассмотрено струйное течение идеальной тяжелой жидкости со свободной границей в такой геометрии, что на всей границе течения или действительная, или мнимая части функции Φ равны нулю. Это позволяет с точностью до нескольких констант восстановить функцию, а затем получить значения констант из анализа дополнительной информации о задаче.

Пусть имеется установившееся плоское течение идеальной тяжелой жидкости, представленное на фиг. 1. Здесь AD, DC и AE — твердые стенки, наклоненные к оси x под углами, указанными на чертеже. Жидкость истекает однородным потоком из бесконечно удаленной точки A, сходит по касательной к AE в точке B и струей со свободной границей BC течет по бесконечной стенке DC. Принимается схема безотрывного обтекания угла D, что означает обращение в бесконечность скорости в этой точке. Расход жидкости Q и ширина канала H в точке A известны. Ускорение свободного падения g ориентировано в отрицательном направлении оси y. Необходимо определить форму свободной границы и координаты точки схода B.



Фиг. 1



Фиг. 2

Примем за линейный масштаб параметр H, за масштаб потенциала и функции тока — величину Q и за масштаб скорости — отношение Q/H. Введем безразмерную переменную физической плоскости $z = x + iy$ и безразмерный комплексный потенциал $W = \varphi + i\psi$. В плоскости z ширина канала в точке A равна единице, в плоскости W область течения представляет собой полосу единичной ширины. Пользуясь свободой в выборе уровня потенциала, положим потенциал равным нулю в точке D. Введем вспомогательную комплексную переменную t такую, что области течения плоскости t соответствует верхняя полуплоскость. Переменные W и t с соответствием точек, указанным на фиг. 2, связаны соотношением

$$W = \frac{1}{\pi}\ln(t+1) \tag{1}$$

Поскольку потенциал точки B неизвестен, введем параметр μ, характеризующий положение точки на действительной оси плоскости t.

Известно [3], что условие постоянства давления на свободной границе может быть записано в следующей дифференциальной форме:

$$\frac{\nu}{3}\frac{dv^3}{d\varphi} + \sin\theta = 0, \qquad \nu = \frac{Q^2}{H^3 g} \tag{2}$$

Здесь θ — угол между вектором скорости жидкости на свободной границе и осью x, отсчитываемый от оси x против часовой стрелки. Дальнейшее преобразование условия (2) проведем, следуя [2]. Введем функцию τ соотношением $v = e^{\tau}$ и будем считать угол θ малым, так что $\sin\theta \approx {}^1/_3 \sin 3\theta$.

Пусть $\xi = -\tau + i\theta$

$$\Phi = -i\nu \frac{d\xi}{dW} + \frac{1}{3} e^{3\xi} \tag{3}$$

$$\operatorname{Re} \Phi = \nu \frac{\partial\theta}{\partial\varphi} + \frac{1}{3} e^{-3\tau} \cos 3\theta$$

$$\operatorname{Im} \Phi = \nu \frac{\partial\tau}{\partial\varphi} + \frac{1}{3} e^{-3\tau} \sin 3\theta$$

Можно установить, что условие на свободной границе в новых переменных формулируется в виде $\operatorname{Im} \Phi = 0$.

Из (3) для действительной части функции Φ видно, что на прямолинейных твердых границах течения, составляющих с осью x углы $\theta = \pm \pi / 6$, $\operatorname{Re} \Phi = 0$. Поэтому на всей действительной оси плоскости t имеем

$$\begin{array}{lll} & \operatorname{Im} \Phi = 0 & (-\infty, -\mu) \\ (4) & \operatorname{Re} \Phi = 0 & (-\mu, -1) \\ & \operatorname{Re} \Phi = 0 & (-1, 0) \\ & \operatorname{Re} \Phi = 0 & (0, \infty) \end{array}$$

Функция, удовлетворяющая условиям (4), может быть восстановлена с помощью формулы Келдыша — Седова [4], если известно положение и порядок ее полюсов. Изучим особенности функции Φ в рассматриваемом случае, для чего введем новую функцию $\chi = e^{-3\xi}$ и перепишем (3) в виде

$$\Phi = \frac{i\nu\pi}{3} (t + 1) \frac{1}{\chi} \frac{d\chi}{dt} + \frac{1}{3} \frac{1}{\chi} \tag{5}$$

Из (3) следует, что при $t = -1$ функция Φ не имеет особенностей. Рассмотрим поведение функции при $t \to +\infty$. Поскольку большие действительные значения аргумента соответствуют точкам на DC физической плоскости, то $\operatorname{Re} \Phi = 0$. Рассмотрим поведение $\partial\tau / \partial\varphi$. Так как $\tau = \ln v$, а из интеграла Бернулли $v \sim \sqrt{A - y}$, где A — некоторая постоянная; то

$$\frac{\partial\tau}{\partial\varphi} = \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial\varphi} \sim \frac{1}{v^2} \frac{\partial v}{\partial y}$$

Последнее выражение стремится к нулю при $y \to -\infty$ $(t \to +\infty)$. Следовательно, $\Phi \to 0$. Так же ведет себя Φ при $t \to -\infty$. Точка B тоже является регулярной точкой.

В точке D скорость обращается в бесконечность (функция χ имеет при $t = 0$ полюс первого порядка). Из (5) следует, что независимо от порядка полюса функции χ (важно, что он есть) функция Φ имеет при $t = 0$ полюс первого порядка. В остальных точках течения она аналитична.

Полученная информация позволяет с помощью формулы Келдыша — Седова [4] восстановить Φ

$$\Phi = c + ia \sqrt{\mu + t} / t \tag{6}$$

Здесь c и a — константы, подлежащие определению. Поскольку при $t \to \infty$ $\Phi \to 0$, то $c = 0$.

Рассмотрим выражения для действительной и мнимой частей функции Φ при $t \to -1$. Имеем $\operatorname{Re} \Phi \to 0$.

Слагаемое $\nu (\partial\tau / \partial\varphi) \to 0$ при $t \to -1$. Поэтому $\lim\limits_{t \to -1} \Phi = i / 3$. Отсюда и из соотношения (6) получим $t \to -1$

$$a \sqrt{\mu - 1} = -1/3 \tag{7}$$

Для определения параметров в (6) необходимо построить еще одно соотношение. Для этого перепишем (5) в форме

$$(t + 1) \frac{d\chi}{dt} + \frac{3i}{\pi\nu} \Phi\chi = \frac{i}{\pi\nu} \tag{8}$$

Уравнение (8) с известной функцией Ф является дифференциальным уравнением для отыскания χ.

Особенность функции Ф в точке $t = 0$ определяет вид особенности функции χ в этой точке. Поскольку из физических соображений следует, что χ должна иметь в этой точке полюс первого порядка, можно заключить, что Ф при $t \to 0$.

Пусть вблизи $t = 0$ $\chi \approx B / t$, где B — константа.

Тогда из (8) при $t \to 0$ следует:

$$-B / t^2 + \frac{3i}{\pi\nu} \frac{ia\sqrt{\mu}}{t} \frac{B}{t} = 0, \qquad \frac{3a\sqrt{\mu}}{\pi\nu} = -1 \tag{9}$$

Из (8) и (9) получаем

$$\mu = \pi^2\nu^2 / (\pi^2\nu^2 - 1), \qquad a = \sqrt{\pi^2\nu^2 - 1} / 3 \tag{10}$$

Формулами (6) и (10) функция Ф полностью определяется ($c = 0$).

Первое из соотношений (10) определяет посредством формулы (1) потенциал течения в точке схода.

Задача полностью решена, так как функция χ находится из уравнения (8). Появляющаяся при интегрировании уравнения константа отыскивается из интеграла Бернулли, записанного для любых двух значений t на свободной границе. Переход от переменной t к физической переменной z осуществляется по соотношению [3]

$$z = \int_0^t \frac{dW}{dt} \frac{e^{i\theta} dt}{v}$$

Здесь v — модуль скорости, θ — угол между осью x и вектором скорости.

Из определения параметра μ видно, что он положителен. Из (10) следует, что течение с касательным сходом в точке (фиг. 1) возможно только при условии $\pi\nu > 1$.

При малых числах ν можно ожидать, что свободная граница в окрестности точки B будет горизонтальна. Линия тока будет в этой точке претерпевать излом (угол излома $5\pi / 6$, а в предыдущем случае π). Анализом, подобным проведенному, можно установить, что Ф в этом случае имеет вид

$$\Phi = ia / t \sqrt{\mu + t} \tag{11}$$

Из (11) и из установленных свойств Ф для параметров a и μ имеем

$$\mu = 1 / (1 - \pi^2\nu^2), \qquad a = -\pi\nu / 3 \sqrt{1 - \pi^2\nu^2} \tag{12}$$

Параметр μ и в этом случае положителен. Следовательно, течение такого типа возможно только при $\pi\nu < 1$.

Поступила 17 I 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Девис Т. В.* Теория симметричных гравитационных волн конечной амплитуды. В сб. «Теория поверхностных волн». М., Изд-во иностр. лит., 1959.
2. *Багин В. М.* О некоторых задачах движения тяжелой несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 6.
3. *Гуревич М. И.* Теория струй идеальной жидкости. М., Физматгиз, 1961.
4. *Лаврентьев М. А.*, *Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1965.